

موقع في الفيزياء



تحميل جميع كتب مناهج اليمن الدراسية
بروابط تحميل مباشرة . اضغط هنا

بعد الاتصال بالإنترنت، من أدناه، انقر على الكتب المراد تحميلها، سوف تفتح صفحة في الموقع تحتوي على جميع كتب الصف المراد تحميله، بروابط مباشرة:

[كتب الصف السابع الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الثامن الأساسي pdf](#)

[كتب الصف التاسع الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الأول الثانوي pdf](#)

[كتب الصف الثاني الثانوي pdf](#)

[كتب الصف الثالث الثانوي pdf](#)

[كتب الصف الأول الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الثاني الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الثالث الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الرابع الأساسي pdf](#)

[كتب الصف الخامس الأساسي pdf](#)

[كتب الصف السادس الأساسي pdf](#)

[كتب أدلة المعلم اليمني pdf](#)

كتب أخرى قد تهتمك:

[كتب الحساب الذهني السريع pdf](#)

[قصص علمية للأطفال pdf](#)

[كتب أساسيات الرياضيات pdf](#)

[كتب علمية للأطفال pdf](#)

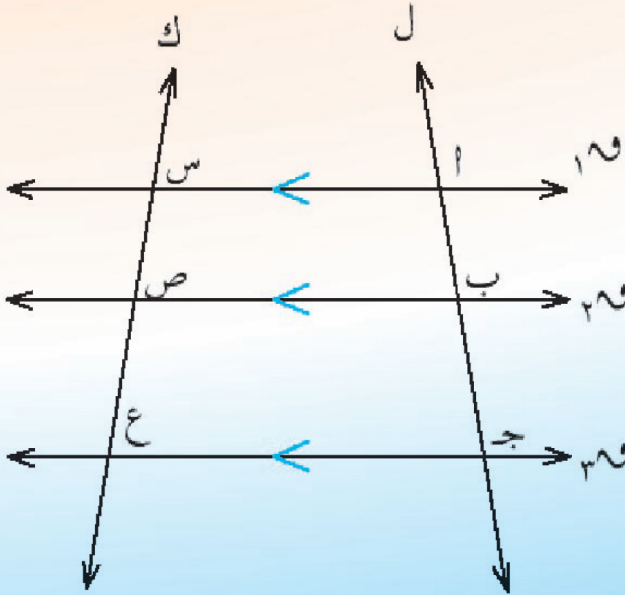


الجمهورية العربية السورية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للفف الثامن من مرحلة التعليم الأساسي

(الجزء الثاني)



حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم
٢٠١٤ م / ١٤٣٥ هـ





الجمهورية العربية السورية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للفيف الثامن من مرحلة التعليم الأساسي

(الجزء الثاني)

فريق التأليف

د. شبيب محمد باجرش / رئيساً.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| د. أمّة الإله علي حُمد الحوري. | د. محمد عبدالرب محمد بشر. |
| د. ردمان محمد سعيد. | د. علي شاهر نعمان القرشي. |
| د. منصور علي صالح عطاء. | د. محمد رشاد الكوري. |
| أ. مريم عبدالجبار سلمان. | د. عبدالله سلطان عبدالغني الصلاحي. |
| د. محمد علي مرشد. | أ. سالمين محمد باسلوم. |
| أ. يحيى بكار مصفر. | أ. ذا النون سعيد طه. |
| أ. عبدالباري طه حيدر. | أ. مصطفى عبد الواحد العبسي. |
| أ. عبده أحمد سيف. | أ. جميلة إبراهيم أحمد الرازي. |
| د. علي عبدالواحد. | أ. أحمد سالم باحويرث. |

فريق المراجعة:

- أ. جميلة إبراهيم الرازي. / أ. شرف عثمان الخامري.
أ. تهاني سعيد الحكيمي. / أ. مختار حيدر هزاع.
تنسيق: أ. / سعيد محمد ناجي الشرعبي.
تدقيق: د/ أمّة الإله علي حُمد الحوري.
إشراف: د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

الإخراج الفني

- الصف والتصميم: جلال سلطان علي إبراهيم.
إدخال التصويبات: علي عبدالله علي السلفي.
عبدالرحمن حسين المهرس.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

٢٠١٥م / ١٤٣٦هـ



النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي ردييه وأعيدي وأعيدي
واذكرني في فرحتي كل شهيد وامنحيه خللاً من ضوء عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي أنت عهد عالق في كل ذمّة
رايتي .. رايتي .. يا نسجاً جكته من كل شمس أخلدي خافقة في كل قمّة
أمّتي .. أمّتي .. امنحيني البأس يا مصدر بأسى واؤخريني لك يا أكرم أمّة

عشت إيماني وحبّي أمّيا
ومسييري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبض قلبي يمينيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| د. عبدالله عبده الحامدي. | أ/ علي حسين الحيمي. |
| د/ صالح ناصر الصوفي. | د/ أحمد علي المعمرى. |
| أ. د/ محمد عبدالله الصوفي. | أ. د/ صالح عوض عرم. |
| أ/ عبدالكريم محمد الجنداري. | د/ إبراهيم محمد الحوثي. |
| د/ عبدالله علي أبو حورية. | د/ شكيب محمد باجرش. |
| د/ عبدالله لملس. | أ. د/ داوود عبدالملك الحدابي. |
| أ/ منصور علي مقبل. | أ/ محمد هادي طواف. |
| أ/ أحمد عبدالله أحمد. | أ. د/ أنيس أحمد عبدالله طائع. |
| أ. د/ محمد سرحان سعيد المخلافي. | أ/ محمد عبدالله زيارة. |
| أ. د/ محمد حاتم المخلافي. | أ/ عبدالله علي إسماعيل. |
- د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية .

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية ، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات .

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً ، لتحقيق الأهداف المرجوة منه ، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها : الملاحظات الميدانية ، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور ، وتحديث المعلومات وبما يتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري ، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة ، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي .

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشرونا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستبعتها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة ، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها .

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدرسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية .

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

المقدمة:

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خاتم النبيين ، وآله وصحبه أجمعين .
لقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المناهج التعليمية لمرحلة التعليم
الأساسي وفق أسس علمية وتربوية . وبعد كتاب الصف السابع يأتي كتاب الصف
الثامن لمواكبة هذا التطوير .

وفي هذا الكتاب يجد أبنائنا الطلبة مادة الرياضيات معروضة لهم بأساليب
وقوالب جديدة تساعدهم على سرعة الفهم والاستيعاب ، وتسهل لهم التعامل مع
المادة وتحفزهم على حبها ، كما تنمي فيهم القدرات التفكيرية وتوسع ثقافتهم
العلمية .

إن الكتاب غني بالشرح والأمثلة إلى جانب الأنشطة والتدريبات لكل درس،
والتمارين العامة لكل وحدة دراسية ، ولذا على أبنائنا الطلبة بذل أقصى جهودهم
والاستفادة من توجيهات المدرسين ، والدراسة المتعمقة للمادة المقدمة وتتبعها بدقة
وحل أكبر قدر من التمارين والمسائل ، وهذا من شأنه ترسيخ المعرفة الرياضية في
أذهانهم وإكسابهم المهارات الكافية للأستمرار في التعلم .

وفي هذا الكتاب نقدم لأبنائنا الطلبة مادة الرياضيات بأسلوب واضح سهل
يتناسب ومستويات الطلبة وقدراتهم وبدقة علمية مع مراعاة جوانبها التربوية، ولذا
تضمنت وحدات الكتاب تعاريف رياضية دقيقة ولكنها مبسطة ، واحتوت على
برهنة رياضية ولكنها متدرجة . وترابطت المواضيع في بناء منطقي متسلسل يساعد
أبنائنا على التقدم الراسخ في تعلم المادة كما تم تقديم المادة بلغة مبسطة شيقة
ومدعومة بالأشكال والتوضيحات الكافية ترغيباً لهم في المادة ، وعلى طريق تحقيق
الطموح العلمي المنشود .

والله وراء القصد وهو ولي التوفيق ،،،

المؤلفون

المحتويات

الصفحة

الموضوع

الوحدة السادسة : النسبة والتناسب

١-٦	مراجعة	٧
٢-٦	خواص التناسب	١٠
٣-٦	تقسيم قطعة مستقيمة معلومة بنسبة معلومة	١٧
٤-٦	مبرهنة طاليس	٢٣
٥-٦	نتيجة على مبرهنة طاليس	٣١
٦-٦	المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية مثلث	٣٦
٧-٦	التشابه	٤٤
٨-٦	تشابه المثلثات	٥١
٩-٦	تمارين عامة ومسائل	٦٢
١٠-٦	اختبار الوحدة	٦٤

الوحدة السابعة : الهندسة

١-٧	العلاقات بين أضلاع المثلث وزواياه	٦٥
٢-٧	القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفين ضلعين في مثلث	٧٠
٣-٧	القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر	٧٤
٤-٧	الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث القائم	٧٧
٥-٧	متوسطات المثلث	٧٩
٦-٧	ارتفاعات المثلث	٨٣

تابع المحتويات

الموضوع الصفحة

٧-٧	تكافؤ المثلثات	٨٧
٨-٧	تكافؤ متوازي الأضلاع	٩٤
٩-٧	تمارين ومسائل عامة	٩٨
١٠-٧	اختبار الوحدة	١٠١

الوحدة الثامنة : القياس

١-٨	الهرم	١٠٣
٢-٨	المخروط	١٠٥
٣-٨	حجم الكرة ومساحة سطحها	١٠٩
٤-٨	تمارين عامة ومسائل	١١٣
٥-٨	اختبار الوحدة	١١٤

الوحدة التاسعة : الإحصاء

١-٩	قراءة الجداول والأشكال البيانية	١١٥
٢-٩	جدولة البيانات	١٢١
٣-٩	تمثيل البيانات الإحصائية	١٢٤
٤-٩	تمارين عامة	١٣٢
٥-٩	اختبار الوحدة	١٣٥

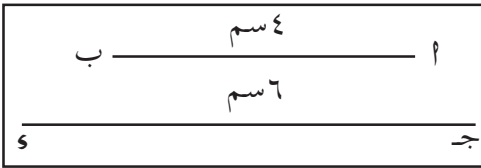
النسبة والتناسب

الوحدة السادسة

٦ : ١ مراجعة

درست سابقاً النسبة والتناسب وعرفت أن النسبة هي مقارنة بين كميتين من نوع واحد .
تذكر :

نسبة a إلى b هي $\frac{a}{b}$ (أو $a : b$) حيث $b \neq 0$ ، ويسمى a مقدم النسبة ، يسمى b تالي النسبة .



شكل (٦-١)

في الشكل (٦-١) :
نسبة طول a إلى طول b هي $\frac{4}{6}$ وتعلم أن : $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ لذلك

نقول إن الأعداد ٤، ٦، ٢، ٣ بهذا الترتيب متناسبة، ويسمى تساوي نسبتين تناسباً وبصورة عامة :

إذا كانت النسبتان $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ متساويتين فإننا نكتب ذلك على النحو التالي :
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (أو $a : b = c : d$) ونسمي هذا تناسباً . نسمى a ، c طرفي التناسب ، ونسمى b ، d وسطي التناسب وتسمى الكميات a ، b ، c ، d كميات متناسبة .



إذا كان $\frac{1}{ب} = \frac{ج}{س}$ فإن $ا \times ب = س \times ج$

وكذلك إذا كان $ا \times ب = س \times ج$ فإن $\frac{ج}{س} = \frac{1}{ب}$

أي أن حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين وتسمى هذه القاعدة (قاعدة الضرب التبادلي).

مثال (١)

بين أيًا من أزواج النسب التالية يشكل تناسباً :

١) $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{١١}{١٢}$ ، $\frac{١٠,٥}{٢}$ (ب) ، $\frac{١}{٤}$.

الحل :

بتطبيق قاعدة الضرب التبادلي :

١) $٦٠ = ١٢ \times ٥$ ، $٦٦ = ١١ \times ٦$ ،

$\therefore ١١ \times ٦ \neq ١٢ \times ٥$ $\therefore \frac{١١}{١٢} \neq \frac{٥}{٦}$.

إذن $\frac{١١}{١٢}$ ، $\frac{٥}{٦}$ لا تشكلان تناسباً .

(ب) $٢ = ٤ \times ٠,٥$ ، $٢ = ١ \times ٢$ ،

$\therefore ١ \times ٢ = ٤ \times ٠,٥$ $\therefore \frac{١}{٤} = \frac{٠,٥}{٢}$.

إذن $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٠,٥}{٢}$ تشكلان تناسباً .

مثال (٢)

إذا كان $\frac{4}{5} = \frac{س}{3 + س}$ ، فأوجد قيمة س .

الحل:

من التناسب نجد : $5س = 4(3 + س)$

$$5س = 4س + 12$$

$$5س - 4س = 12$$

$$\therefore س = 12$$

التحقق من الجواب :

$$\frac{12}{15} = \frac{12}{3 + 12}$$

$$\therefore \frac{4}{5} = \frac{12}{15} \quad (\text{لأن } 4 \times 15 = 5 \times 12)$$

تمارين ومسائل

[١] بيّن أيّاً من أزواج النسب التالية يكون تناسباً ؟

(أ) $\frac{10}{9}$ ، $\frac{6}{5}$ ، (ب) $\frac{3}{8}$ ، $\frac{٠,٧٥}{٢}$ ،

(ج) $\frac{1}{7}$ ، $\frac{٠,٢}{١,٤}$.

[٢] أوجد قيمة ل التي تجعل كل نسبتين تشكّلان تناسباً في كل مما يأتي :

(٢) ل : ٨ ، ٣٥ : ٢٨ ، (ب) $\frac{٨}{٣+ل}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ،

(ج) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{ل٢}{١-ل}$.

[٣] احسب قيمة س في كل مما يلي :

(١) $٤- = \frac{١-س}{٣}$ ، (ب) $\frac{٢}{٣} = \frac{٥+٢س}{٣٣}$ ،

(ج) $\frac{٧}{١٢} = \frac{س}{٥+س}$.

[٤] إذا أضيف س إلى كل من مقدم وتالي النسبة $\frac{٤}{٧}$ كان الناتج $\frac{٥}{٨}$ أوجد قيمة س .

٦ : ٢ خواص التناسب

هناك مجموعة من الخواص التي تساعدنا على حل تمارين ومسائل التناسب، سندرس في هذا البند أهم هذه الخواص .

ملحوظة: نشترط في جميع النسب أن تالي كل من هذه النسب لا يساوى صفراً.

خاصية (١) إذا كان $\frac{١}{ب} = \frac{ج}{س}$ ، فإن $\frac{ب}{١} = \frac{س}{ج}$

وعليه إذا كان : $\frac{٢}{٥} = \frac{٦}{١٥}$ ، يكون $\frac{٥}{٢} = \frac{١٥}{٦}$.

خاصية (٢) إذا كان $\frac{١}{ب} = \frac{ج}{س}$ ، فإن $\frac{ب}{س} = \frac{١}{ج}$

وعليه إذا كان $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ ، فإن $\frac{7}{28} = \frac{3}{12}$.

خاصية (٣)

$$\frac{\frac{ج + س}{س}}{\frac{ب + ١}{ب}} = \frac{\frac{ج}{س}}{\frac{١}{ب}}$$

فمثلاً إذا كان $\frac{٥}{٢٠} = \frac{١}{٤}$ فإن $\frac{٢٠ + ٥}{٢٠} = \frac{٤ + ١}{٤}$ ،

أي أن $\frac{٢٥}{٢٠} = \frac{٥}{٤}$.

مثال (١)

إذا كان : $\frac{٥}{٤} = \frac{س}{ص}$ ، وكان $س + ص = ١٨$ فأوجد كلا من $س$ ، $ص$

الحل:

$$\therefore \frac{٥}{٤} = \frac{س}{ص}$$

$$\therefore \frac{٩}{٤} = \frac{٤ + ٥}{٤} = \frac{س + ص}{ص}$$

$$\therefore س + ص = ١٨ ،$$

$$\therefore \frac{٩}{٤} = \frac{١٨}{ص}$$

$$٩ ص = ٧٢ \quad \text{ومنه} \quad \boxed{ص = ٨}$$

$$\therefore س = ١٨ - ص$$

$$\therefore س = ١٨ - ٨ \quad \text{ومنه} \quad \boxed{س = ١٠}$$



التحقق : تحقق من صحة الحل بنفسك

خاصية (٤)

$$\frac{ا-ب}{ب} = \frac{ج-د}{د} \quad \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$$

فمثلاً إذا كان : $\frac{27}{21} = \frac{9}{7}$ ، فإن $\frac{7-9}{7} = \frac{21-27}{21}$ ؛

أي أن : $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$.

مثال (٢)

إذا كانت نسبة طول $\overline{اب}$ إلى طول $\overline{جـد}$ هي ٧ : ٦ ، وكان $|اب| - |جـد| = ١,٥$ سم فأوجد كلاً من : $|اب|$ ، $|جـد|$.

الحل :

$$\therefore \frac{7}{6} = \frac{|اب|}{|جـد|}$$

$$\therefore \frac{6-7}{6} = \frac{|اب| - |جـد|}{|جـد|} \quad [\text{خاصية (٤)}] .$$

$$\therefore \frac{1}{6} = \frac{1,5}{|جـد|} \quad \text{ومنه} \quad |جـد| = 9 \text{ سم}$$

$$\therefore |اب| - |جـد| = 1,5$$

$$\therefore |اب| = 9 - 1,5 = 7,5 \text{ سم}$$

$$\frac{ج-١}{س-ب} = \frac{ج+١}{س+ب} \quad \frac{ج}{س} = \frac{١}{ب}$$

خاصية (٥)

وعليه إذا كان $\frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$ ، فإن $\frac{٢+١}{١٠+٥} = \frac{٢-١}{١٠-٥}$ ؛

أي أن $\frac{١-}{٥-} = \frac{٣}{١٥} = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$ ومنه $\frac{١-}{٥-} = \frac{٣}{١٥}$

مثال (٣)

إذا كان $٣ = \frac{١}{٢+ب} = \frac{٩+١٢}{٧-ب}$ فأوجد كلاً من ١ ، $ب$.

باستخدام خاصية (٥) نجد :

الحل:

$$٣ = \frac{١}{٢+ب} = \frac{١-٩+١٢}{(٢+ب)-(٧-ب)}$$

$$٣ = \frac{١}{٢+ب} = \frac{٩+١}{٩-ب}$$

$$٣ = \frac{١-٩+١}{(٢+ب)-(٩-ب)} \quad \text{أي أن}$$

$$٣ = \frac{٩}{١١-ب}$$

$$٩ = ٣٣ - ٦ب$$

$$٤٢ = ٦ب$$

$$٧ = ب$$



وبالتعويض عن قيمة ب في التناسب : $3 = \frac{1}{2 + ب}$ نجد :

$$3 = \frac{1}{2 + 7}$$

$$\therefore 27 = 1$$

$$\frac{ا + ج + د}{ب + س + و}$$

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{س} = \frac{د}{و}$$

خاصية (٦)

مثال (٤)

أوجد قيمتي : س و ص ، حيث أن : $\frac{5}{2} = \frac{3س}{2ص - 8} = \frac{س}{2ص}$.

الحل :

$$\therefore \frac{5}{2} = \frac{3س}{2ص - 8} = \frac{س}{2ص} ,$$

$$\therefore \frac{5}{2} = \frac{5 + 3س + س}{2 + 2ص - 8 + 2ص} \quad (\text{خاصية ٦}) ,$$

$$\text{ومنه} \quad \frac{5}{2} = \frac{5 + 4س}{10} ,$$

$$10 \times 5 = (5 + 4س) \times 2$$

$$50 = 10 + 8س$$

$$40 = 8س$$

$$\therefore 5 = س$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2 \text{ ص}} \quad \therefore \quad \frac{5}{2} = \frac{\text{س}}{2 \text{ ص}} \quad \therefore ,$$

$$\therefore 10 \text{ ص} = 10 \quad \text{ومنه} \quad \boxed{1 = \text{ص}}$$

تحقق من صحة الحل .

تدريب

مثال (٥)

أوجد قياس زاويتين متكاملتين ، إذا كانت النسبة بين قياسيهما ٣ : ٦ .

الحل:

$$\therefore \quad \frac{\text{قياس الزاوية الصغرى}}{\text{قياس الزاوية الكبرى}} = \frac{3}{6}$$

فإذا فرضنا أن قياس الزاوية الصغرى = س درجة

، قياس الزاوية الكبرى = ص درجة

$$\text{فإن} \quad \frac{3}{6} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} \quad , \quad \frac{9}{6} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}} \quad \text{[خاصية (٣)]}$$

$$\therefore \quad \text{س} + \text{ص} = 180^\circ \quad (\text{معطى})$$

$$\therefore \quad \frac{9}{6} = \frac{180}{\text{ص}} \quad \text{ومنه} \quad \text{ص} = \frac{180 \times 6}{9} = 120^\circ$$

أي أن قياس الزاوية الكبرى = 120°

$$\therefore \quad \text{س} = 180^\circ - \text{ص} \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\text{س} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

أي أن قياس الزاوية الصغرى = 60°

تحقق من صحة الحل .

تدريب

تمارين ومسائل

[١] إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل}$ ، فأكمل الفراغات :

(أ) $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{ص}{س}$ ، (ب) $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{ل}{ص}$ ،

(ج) $\frac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{}} = \frac{س - ص}{ص}$.

[٢] استخدم خواص التناسب لإيجاد قيمتي أ و ب في كل مما يلي :

(أ) $\frac{١}{ب} = \frac{١}{٢}$ ، $١٢ = ب + أ$.

(ب) $\frac{٧}{٣} = \frac{١}{ب}$ ، $٢٠ = ب - أ$.

(ج) $\frac{٤}{٣} = ١ + \frac{١}{ب}$ ، $١٤ = ب - أ$.

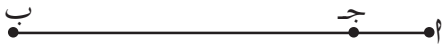
(د) $\frac{٢}{٥} = \frac{١٢}{ب٣}$ ، $٦٣ = ب٣ + أ٢$.

[٣] إذا كان : $\frac{٤}{٥} = \frac{١ - ١٦}{ب} = \frac{١}{ب}$ ؛ فأوجد قيمة كل من أ و ب .

[٤] إذا كان : $\frac{٣}{٤} = \frac{س - ١٥}{١ + ص} = \frac{س}{ص}$ ؛ فأوجد قيمة كل من س و ص .

[٥] إذا كان $\frac{٥}{٦} = \frac{١}{ب}$ ، $\frac{١}{٣} = \frac{ج}{ب}$ ، وكان : $١٠٤٠ = ج + ب + أ$ ؛

فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، ج .



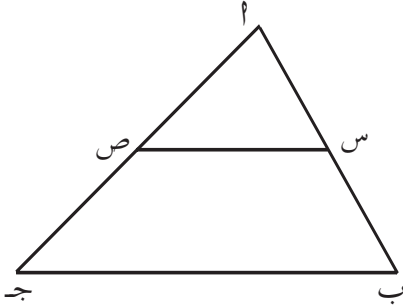
شكل (٦ - ٢)

[٦] في الشكل (٦ - ٢)

$$|أب| = ٢٢ \text{ سم} ، \frac{|أج|}{|أب|} = \frac{٢}{٩}$$

أوجد كل من $|أج|$ ، $|أب|$.

[٧] في الشكل (٦ - ٣)



شكل (٦ - ٣)

$$|أب| = ٨ \text{ سم} ، |أب| = ٤ \text{ سم} ،$$

$$|أص| = ٥ \text{ سم} .$$

$$\text{فإذا كان : } \frac{|أج|}{|أب|} = \frac{|أص|}{|أب|} ؛$$

فأوجد $|أص|$.

[٨] يزن ٣,٥ أمتار من سلك نحاس نصف كيلوجرام . كم يزن ٩,٤ أمتار

من سلك النحاس نفسه ؟

$$[٩] \text{ إذا كان } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} ، \text{ فأثبت أن : } (١) \frac{أ+ب}{ب} = \frac{ج+د}{د} . (٢) \frac{أ-ب}{ب} = \frac{ج-د}{د}$$

٦ : ٣ تقسيم قطعة مستقيمة بنسبة معلومة



شكل (٦ - ٤)

أولاً : التقسيم من الداخل :

في الشكل (٦ - ٤)

ج نقطة على $\overline{أب}$ ، نقول إن النقطةج تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة $|أج| : |أب|$ من جهة أ ، أو بنسبة $|أب| : |أج|$ من جهة ب .



مثال (١)

جد نقطة على \overline{AB} شكل (٦-٥)، تقسمها من الداخل بنسبة ٣ : ٤ ، من جهة A فإذا كان $|AB| = ١٤$ سم، احسب كل من $|AB|$ ، $|AJ|$.

الحل: \therefore جـ تقسم \overline{AB} من الداخل بنسبة ٣ : ٤

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{|AJ|}{|JB|}$$


شكل (٦-٥)

$$\frac{7}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{|AJ| + |JB|}{|AB|}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{|AB|}{|AB|} \quad \left(\text{لأن } |AJ| + |JB| = |AB| \right)$$

$$\frac{7}{4} = \frac{14}{|AB|} \quad \text{ومنه}$$

$$7 = |AB| \quad \therefore |JB| = 8 \text{ سم}$$

$$\therefore |AJ| = |AB| - |JB|$$

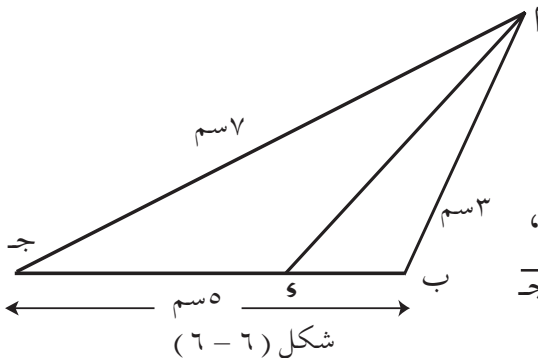
$$\therefore |AJ| = 14 - 8 \quad \therefore |AJ| = 6 \text{ سم}$$

مثال (٢)

في الشكل (٦-٦)

$$|AB| = 3 \text{ سم} \quad , \quad |AJ| = 7 \text{ سم} \quad ,$$

$$|BJ| = 5 \text{ سم} \quad , \quad \text{ونقطة على } \overline{AB}$$



$$\frac{|ب|}{|ا|} = \frac{|ب|}{|ا|} : \text{بحيث كان :}$$

أوجد كلاً من : $|ب|$ ، $|ا|$.

الحل :

$$\frac{3}{7} = \frac{|ب|}{|ا|} = \frac{|ب|}{|ا|} \therefore$$

$$\frac{10}{7} = \frac{7 + 3}{7} = \frac{|ا| + |ب|}{|ا|} \therefore$$

$$\left(\text{لأن : } |ا| + |ب| = |ا| \right) \quad \frac{10}{7} = \frac{|ا|}{|ا|}$$

$$\frac{10}{7} = \frac{5}{|ا|}$$

$$10 = |ا| \times 7 \therefore 35 = |ا|$$

$$35 - 5 = |ا| \therefore 30 = |ا|$$

$$35 - 5 = |ب|$$

$$10 = |ب|$$

ثانياً : التقسيم من الخارج :

ا ب ج
شکل (٦ - ٧)

في الشكل (٦ - ٧)

ج نقطة واقعة على امتداد ا ب .

نقول إنَّ النقطة ج تقسم ا ب من الخارج بنسبة |ا| : |ب| من جهة ا ،

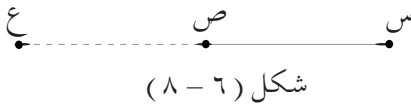


أو بنسبة |ب ج| : |ج د| : |د هـ| من جهة ب .

مثال (٣)

في الشكل (٦ - ٨) : ع نقطة واقعة على امتداد $\overline{ص}$ ، وتقسمها من الخارج بنسبة ٣ : ٢ من جهة س ، فإذا كان $|س ص| = ١٠$ سم ، أوجد $|ع ص|$ ، $|س ع|$.

الحل :



∴ ع تقسم $\overline{ص}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{|س ع|}{|ع ص|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2-3}{2} = \frac{|س ع| - |ع ص|}{|ع ص|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|س ص|}{|ع ص|} \quad \text{لماذا ؟}$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{10}{|ع ص|}$$

$$|ع ص| = 20 \text{ سم}$$

$$\therefore |س ع| = |ع ص| + |س ص|$$

$$\therefore |س ع| = 10 + 20 = 30 \text{ سم} \quad |س ع| = 30 \text{ سم}$$

مثال (٤)

في الشكل (٦ - ٩) :

$$|أب| = ٨ \text{ سم} ، |بج| = ٧ \text{ سم} ،$$

$$|أه| = ١٣ \text{ سم} ، \text{هـ واقعة على}$$

امتداد جـ بحيث كان

$$\frac{|جـه|}{|أه|} = \frac{|أب|}{|بج|}$$

أوجد |أه|، |بج|، |جـه|.

الحل:

$$\therefore \frac{١٣}{٨} = \frac{|أه|}{|أب|} = \frac{|جـه|}{|بج|}$$

$$\therefore \frac{٥}{٨} = \frac{٨ - ١٣}{٨} = \frac{|جـه| - |أه|}{|أه|}$$

$$\frac{٥}{٨} = \frac{|أبج|}{|أه|} \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$\frac{٥}{٨} = \frac{٧}{|أه|}$$

$$٥٦ = |أه|$$

$$\therefore |أه| = ١١,٢ \text{ سم}$$

$$، \therefore |جـه| = |أه| + |بج| \therefore |جـه| = ١١,٢ + ٧$$

$$|جـه| = ١٨,٢ \text{ سم} .$$

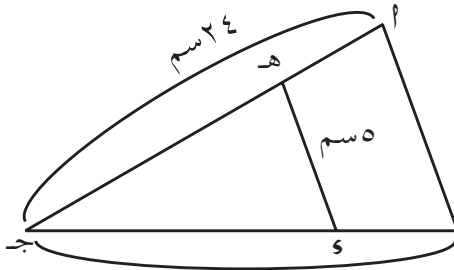
تمارين ومسائل

[١] ع نقطة على س ص ، بحيث كان : $\frac{5}{4} = \frac{|س ع|}{|ع ص|}$ ، $3 = |ع ص| - |ع ص|$ ،
أوجد كلاً من $|ص ع|$ ، $|ع س|$.

[٢] ج نقطة واقعة على امتداد $\overline{أ ب}$ ، تقسمها من الخارج بحيث كان :
 $\frac{3}{7} = \frac{|ج ب|}{|ج أ|}$ ، أوجد كلاً من $|ج أ|$ ، $|ج ب|$ علماً بأن : $|أ ب| = ١٥$ سم .

[٣] و نقطة واقعة على امتداد $\overline{ج ب}$ ، تقسمها من الخارج بنسبة ٣ : ١ ،
فإذا كان : $|أ ب| = ٨$ سم ، أوجد $|ج ب|$.

[٤] في الشكل (٦ - ١٠) :

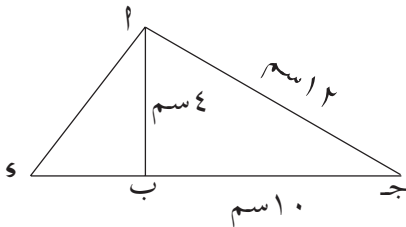


$|أ ج| = ٢٤$ سم ، $|أ ه| = ٥$ سم ،
 $|ب ج| = ٢٠$ سم ، ه نقطة على $\overline{أ ج}$ ،

تقسمها من الداخل بنسبة ٥ : ٧ من ب
من جهة أ ، و نقطة على $\overline{ب ج}$ ، فإذا كان :

$$\frac{|أ ه|}{|ه و|} = \frac{|أ ج|}{|أ ب|} ، \text{ أوجد } |أ ب| .$$

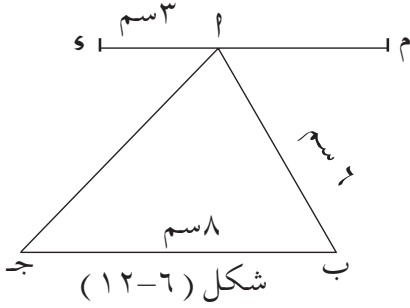
[٥] في الشكل (٦ - ١١) :



$|أ ج| = ١٢$ سم ، $|أ ب| = ٤$ سم ،
 $|ب ج| = ١٠$ سم ، و نقطة
واقعة على امتداد $\overline{ج ب}$ بحيث

شكل (٦ - ١١)

كان $\frac{|ج س|}{|س ب|} = \frac{|ج م|}{|م ب|}$ ، أوجد $|س ب|$ ، $|ج س|$.



[٦] في الشكل (١٢-٦) :

$|م ب| = ٦$ سم ، $|ج ب| = ٨$ سم ،

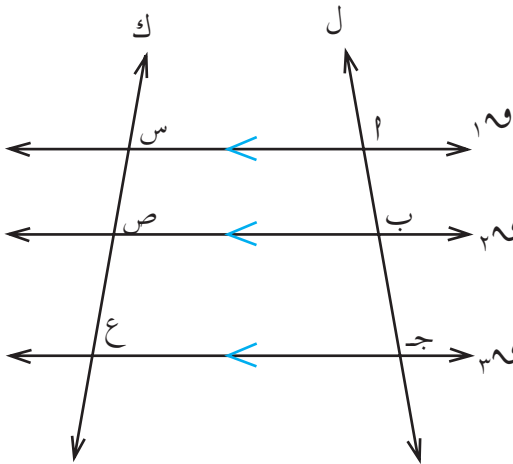
$|س م| = ٣$ سم ، م نقطة واقعة على

امتداد س م بحيث كان $\frac{|ج س|}{|س م|} = \frac{|ج م|}{|م ب|}$

أوجد $|م ب|$ ، $|س م|$.

٦ : ٤ مبرهنة طاليس

نشاط



شكل (١٣-٦)

(١) ارسم مستقيماً مثل ل ،

وحدد عليه النقاط ١م ، ب ، ج ،

كما في الشكل (١٣-٦)

(٢) من النقاط ١م ، ب ، ج ارسم

المستقيمات ١م، ٢م، ٣م،

بحيث $\vec{١م} \parallel \vec{٢م} \parallel \vec{٣م}$.

(٣) ارسم مستقيماً آخر ، سمّه ك ،

يقطع $\vec{١م}$ ، $\vec{٢م}$ ، $\vec{٣م}$ بالنقاط س ، ص ، ع على الترتيب .

(٤) استخدم المسطرة لقياس أطوال القطع المستقيمة ١م ب ، ب ج ، س ص ، ص ع

٥) احسب النسبتين $\frac{|أ ب|}{|ب ج|}$ ، $\frac{|أ ص|}{|ص ع|}$ ، ثم قارن بينهما ، ماذا تلاحظ؟

$$\frac{|أ ب|}{|ب ج|} = \frac{|أ ص|}{|ص ع|} .$$

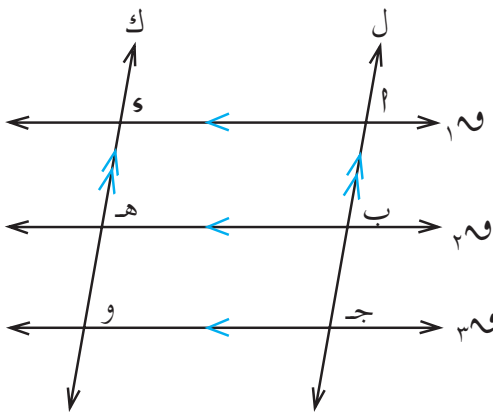
أي أن المستقيمات المتوازية $١م$ ، $٢م$ ، $٣م$ حدّدت على القاطعين $ل$ ، $ك$ قطعاً مستقيمة أطوالها متناسبة .

ما توصلنا إليه من النشاط السابق هو حالة خاصة من مبرهنة هامة تسمى **مبرهنة طاليس** ، والتي تنص على أن :

المستقيمات المتوازية تحدّد على قاطعين لها قطعاً متناسبة في الطول

لغرض التبسيط نبرهن فقط الحالة الخاصة التي يكون فيها القاطعان متوازيين .

المعطيات :



شكل (٦-١٤)

$$\vec{١م} \parallel \vec{٢م} \parallel \vec{٣م} .$$

والمستقيمان المتوازيان $ل$ ، $ك$

قاطعان لها، انظر الشكل (٦-١٤) .

المطلوب : إثبات أن :

$$\frac{|س هـ|}{|هـ و|} = \frac{|أ ب|}{|ب ج|}$$

البرهان :

$$\therefore \vec{١م} \parallel \vec{٢م} ، \vec{٢م} \parallel \vec{٣م} \Rightarrow \vec{١م} \parallel \vec{٣م}$$

∴ الشكل ١ ب هـ و متوازي أضلاع .

$$(١) \quad |١ ب| = |٤ هـ| .$$

بالمثل ، الشكل ب ج و هـ متوازي أضلاع . لماذا ؟

$$(٢) \quad |١ ب ج| = |٤ هـ و|$$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$\frac{|١ ب|}{|١ ب ج|} = \frac{|٤ هـ|}{|٤ هـ و|}$$

وهو المطلوب .

وبشكل عام ، إذا كان

$$\begin{array}{ccccccc} \overleftrightarrow{١} & \parallel & \overleftrightarrow{٢} & \parallel & \overleftrightarrow{٣} & \parallel & \overleftrightarrow{٤} \\ \overleftrightarrow{ك} & \parallel & \overleftrightarrow{ل} & \parallel & \overleftrightarrow{ك} & \parallel & \overleftrightarrow{ل} \end{array}$$

[انظر الشكل (٦ - ١٥)] .

ولتحديد التناسبات الناتجة من مبرهنة

طاليس بالاستعانة بالشكل (٦ - ١٥) :

– نكتب النقط الواقعة على القاطع

الأول بترتيب معين ، مثل

١ ، ب ، ج ، د ، هـ .

– نكتب تحتها النقط الواقعة على القاطع الثاني وبالترتيب نفسه

س ، ص ، ع ، و ، م فنكون بذلك قد عينا تقابلاً بين نقاط التقاطع

للقاطعين ل ، ك كما يلي :

١ ، ب ، ج ، د ، هـ
س ، ص ، ع ، و ، م

– ينتج عن التقابل السابق تقابلاً بين القطع المستقيمة المحددة بالمستقيمات

الموازية، فمثلاً $\overline{١ ب}$ تقابل $\overline{س ص}$ ، $\overline{ب هـ}$ تقابل $\overline{ص م}$.

نكوّن النسبة بين طولي قطعتين من القاطع الأول والنسبة بين طولي

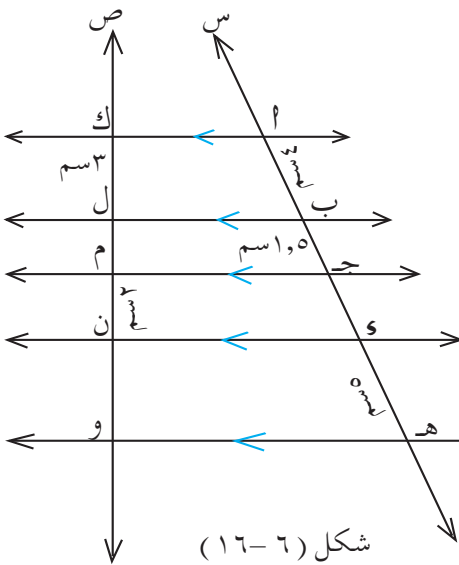
القطعتين المقابلتين لهما من القاطع الثاني ، نساوي بين هاتين النسبتين

فنحصل على تناسب ، فمثلاً :

$$، \quad \frac{|ص ع|}{|ع و|} = \frac{|ب ج|}{|ج د|}$$

$$. \quad \frac{|س ع|}{|س و|} = \frac{|أ ج|}{|أ د|}$$

مثال (١)



شكل (٦ - ١٦)

في الشكل (٦ - ١٦) :

$$\overleftrightarrow{أ ك} \parallel \overleftrightarrow{ب ل} \parallel \overleftrightarrow{ج م} \parallel \overleftrightarrow{د ن} \parallel \overleftrightarrow{هـ و} ،$$

$\overleftrightarrow{س}$ ، $\overleftrightarrow{ص}$ قاطعان لها .

أوجد كلاً من | ل م | ، | ج د | .

الحل :

$$∴ \overleftrightarrow{أ ك} \parallel \overleftrightarrow{ب ل} \parallel \overleftrightarrow{ج م} \parallel \overleftrightarrow{د ن} \parallel \overleftrightarrow{هـ و} ؛$$

$\overleftrightarrow{س}$ ، $\overleftrightarrow{ص}$ قاطعان لها .

$$∴ \frac{|أ ك|}{|ل م|} = \frac{|ب ج|}{|أ ج|} \quad \text{« مبرهنة طاليس »}$$

$$∴ \frac{٣}{|ل م|} = \frac{٤}{١,٥}$$

$$\therefore |ل م| = \frac{1,5 \times 3}{4} = \frac{4,5}{4} = 1,125 \text{ سم}$$

$$\therefore, \frac{|ل م|}{|م ن|} = \frac{|ب ج|}{|ج د|} \quad \text{«المبرهنة نفسها»}$$

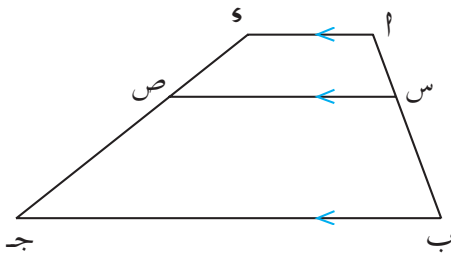
$$\therefore \frac{1,125}{2} = \frac{1,5}{|ج د|}$$

$$\therefore |ج د| = \frac{2 \times 1,5}{1,125} = 2,67 \text{ سم تقريباً .}$$

في المثال (١) : أوجد |ن و| .

تدريب

مثال (٢)



شكل (٦ - ١٧)

في الشكل (٦ - ١٧)

أب ج د شبه منحرف ، فيه

$$\overline{أ د} \parallel \overline{ب ج} , \overline{أ ب} \parallel \overline{أ د}$$

ويقطع $\overline{أ ب}$ في س ، $\overline{أ د}$ في ص .

فإذا كان : $|أ ب| = ٨ \text{ سم}$ ،

$$|أ ص| = ٦ \text{ سم} , |أ س| = \frac{١}{٣} |أ ب|$$

فأوجد كلاً من $|أ ب|$ ، $|أ د|$.

الحل:

$$\therefore \overline{أ د} \parallel \overline{أ ب} \parallel \overline{أ ج} , \overline{أ ب} \parallel \overline{أ ج} \text{ قاطعان لها}$$

$$\frac{|ا ص|}{|ا ب|} = \frac{|ا س|}{|ا ج|} \therefore$$

، وبالتعويض عن $|ا س| = \frac{1}{3} |ا ج|$ ، $|ا ب| = 8سم$ ، $|ا ص| = 6سم$.

$$\frac{\frac{1}{3} |ا ج|}{8سم} = \frac{6سم}{|ا ج|} \therefore$$

$$\therefore \frac{1}{3} |ا ج| = 48سم^2$$

$$|ا ج| = 144سم^2 ، |ا ج| = 12سم$$

$$، |ا س| = \frac{1}{3} |ا ج| = \frac{1}{3} \times 12سم = 4سم$$

$$، |ا ب| = |ا س| + |ا ب| = 4سم + 8سم = 12سم ،$$

$$، |ا ج| = |ا ص| + |ا ج| = 6سم + 12سم = 18سم .$$

تمارين ومسائل

[١] في الشكل (٦-١٨) :

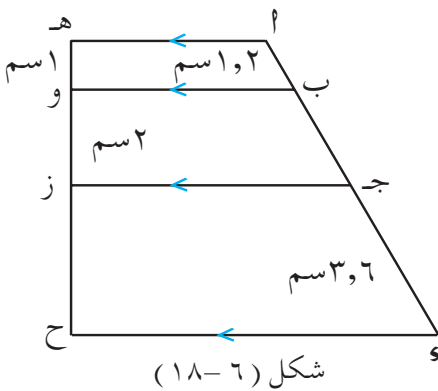
$$ا هـ \parallel ب و \parallel ج ز \parallel و ح ، ا هـ ، و ح \text{ قاطعان لها .}$$

فإذا كان :

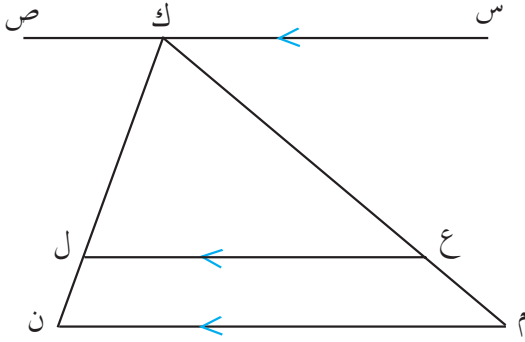
$$|ا ب| = 1,2سم ، |ا هـ و| = 1سم ،$$

$$|ا و ز| = 2سم ، |ا ج و| = 3,6سم$$

فأوجد كلاً من : $|ا ب ج|$ ، $|ا ز ح|$.



شكل (٦-١٨)



شكل (١٩-٦)

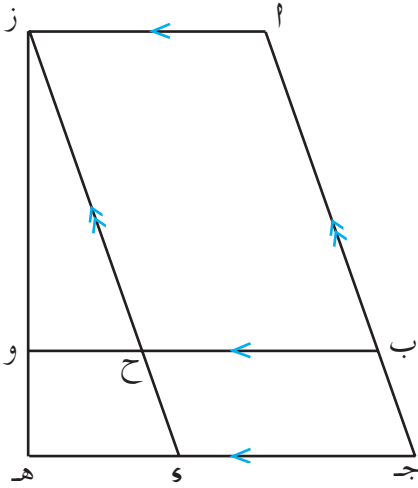
[٢] في الشكل (٦-١٩) :

سـص // عـل // مـن ،
كـم ، كـن قاطعان لها .

(١) أكمل ما يلي :

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{|كـع|}{|عـم|}$$

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{|كـم|}{|عـم|}$$



شكل (٢٠-٦)

(ب) إذا كان $|كـع| = ٥سم$ ،

$|عـم| = ٢سم$ ، $|لـن| = ١سم$.

فأوجد $|كـن|$.

[٣] في الشكل (٦-٢٠) :

$\overline{أـز} // \overline{بـو} // \overline{جـهـ}$ ، $\overline{أـجـ} // \overline{زـهـ}$

إذا كان :

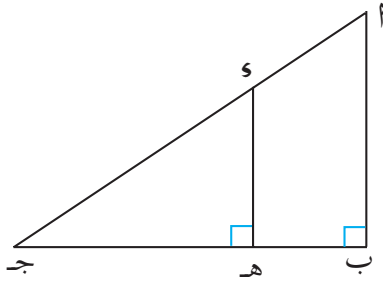
(١) $|زـو| = ٩سم$ ، $|هـو| = ٣سم$ ،

$|أـجـ| = ١٦سم$ ، فأوجد $|زـح|$

(ب) $|هـو| = ٢سم$ ، $|زـو| = ٤سم$ ،

$|زـح| = ٥سم$.

فأوجد $|أـجـ|$.



شكل (٦-٢١)

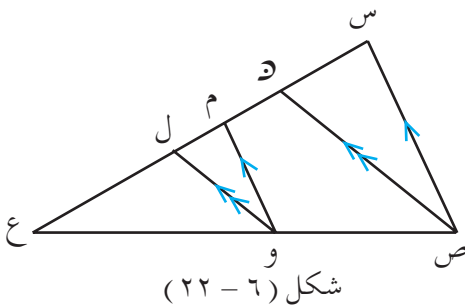
[٤] في الشكل (٦-٢١) :

ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،
هـ نقطة على ب ج ، فإذا أقيم من هـ
عمود يلاقي ا ج في النقطة و فأكمل
العبارات الآتية بما يجعلها صحيحة :

$$(أ) \text{ و هـ } \parallel \text{ ا ب } \text{ لأن } \dots$$

$$(ب) \frac{|\text{ا ب هـ}|}{|\text{هـ ج}|} = \frac{|\text{ج و}|}{|\text{ا س}|} \dots \quad (ج)$$

$$(س) \frac{|\text{ج و}|}{|\text{ا ج}|} = \frac{|\text{ج هـ}|}{|\text{ج ب}|} \dots \quad (هـ)$$

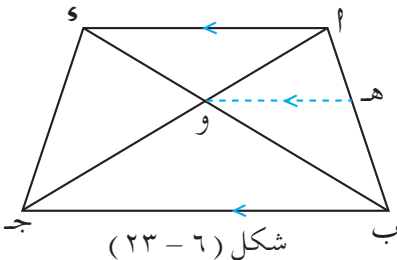


شكل (٦-٢٢)

[٥] في الشكل (٦-٢٢) :

م و \parallel س ص ، ل و \parallel ع ص
أثبت أن :

$$\frac{|\text{ا ع ل}|}{|\text{ل و}|} = \frac{|\text{ا ع م}|}{|\text{م س}|}$$



شكل (٦-٢٣)

[٦] في الشكل (٦-٢٣) ا ب ج و س شبه

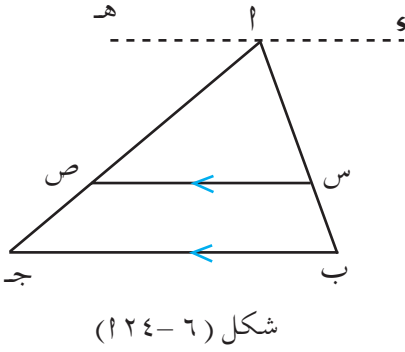
منحرف، فيه ا س \parallel ب ج ، النقطة و

هي نقطة تقاطع قطريه ا ج ، ب س . برهن أن

$$\frac{|\text{ا و}|}{|\text{ا ج}|} = \frac{|\text{ا س}|}{|\text{ا ب}|}$$

[إرشاد : ارسم و هـ \parallel ا س ويقطع ا ب في «هـ»].

٦ : ٥ | نتيجة على مبرهنة طاليس



المستقيم الموازي لضلع مثلث :

- في الشكل (٦-٢٤) $DE \parallel BC$ ،

$$DE \parallel BC .$$

أنشأنا المستقيم DF ماراً بـ D بحيث

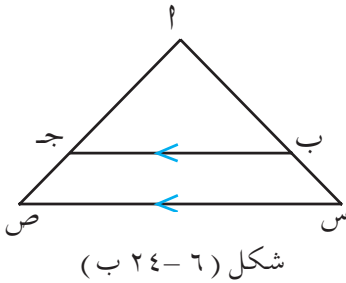
$$DF \parallel BC .$$

نلاحظ أن : $DE \parallel BC \parallel DF$ ،

بحسب مبرهنة طاليس .

$$\text{نستنتج : } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} . \text{ ونقول إنَّ } DE \parallel BC \text{ الموازي للضلع}$$

بـ DE يقسم الضلعين AB ، AC من الداخل إلى أجزاء متناسبة .



- وبالمثل في الشكل (٦-٢٤ ب)

$$DE \parallel BC , \text{ نقول إنَّ } DE \parallel BC$$

يقسم الضلعين AB ، AC من

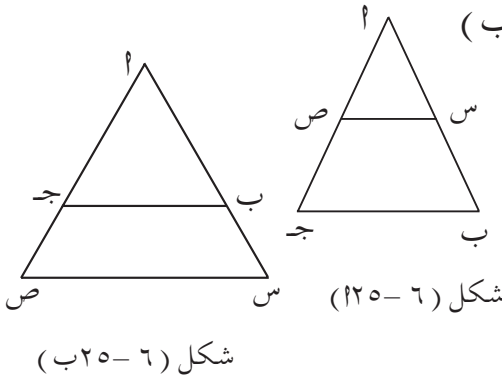
الخارج إلى أجزاء متناسبة .

نتيجة :

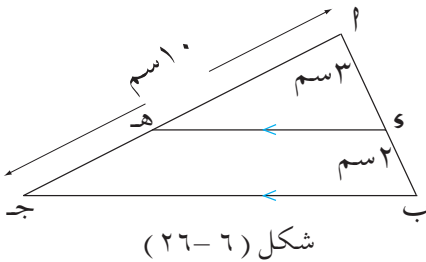
المستقيم الموازي لضلع مثلث يقسم الضلعين الآخرين إلى أجزاء متناسبة

عكس النتيجة :

إذا قسم مستقيم ضلعي مثلث إلى أجزاء متناسبة كان موازياً للضلع الثالث



مثال (١)



الحل :

$$\begin{aligned} & \because \overline{BC} \parallel \overline{PQ} \\ & \therefore \frac{|PA|}{|AH|} = \frac{|PB|}{|HD|} \quad (\text{نتيجة}) \\ & \therefore \frac{3}{2} = \frac{|AH|}{|HD|} \end{aligned}$$

لماذا ؟

$$\frac{5}{2} = \frac{|هـ١| + |هـج|}{|هـج|}$$

$$\therefore \frac{5}{2} = \frac{|هـ١ج|}{|هـج|} \quad \left(\text{لأن } |هـ١ج| = |هـج| + |هـ١| \right)$$

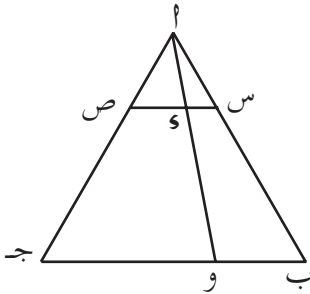
$$\frac{5}{2} = \frac{10}{|هـج|} \quad \text{ومنه } |هـج| = 4 \text{ سم}$$

$$، \therefore |هـ١ج| - |هـج| = |هـ١|$$

$$\therefore |هـ١| = 10 - 4$$

$$\therefore |هـ١| = 6 \text{ سم}$$

مثال (٢)



شكل (٦-٢٧)

في الشكل (٦-٢٧) :

س نقطة على $\overline{أب}$ بحيث كان :

$$\frac{|س١|}{|سب|} = \frac{1}{2} ، \text{ ص نقطة على } \overline{أج}$$

$$، \quad \frac{1}{2} = \frac{|ص١|}{|صج|} \text{ بحيث كان}$$

رسم المستقيم $\overline{أو}$ بحيث يقطع $\overline{سص}$ في س ، $\overline{بج}$ في و .

$$\text{برهن أن : } \frac{|س١|}{|وا|} = \frac{1}{3} .$$

المعطيات :

س نقطة على \overline{AB} بحيث $\frac{1}{2} = \frac{|AS|}{|SB|}$ ، ص نقطة على \overline{AJ} بحيث $\frac{1}{2} = \frac{|AS|}{|SB|}$ ، المستقيم $ل$ و يقطع \overline{S} ص في $و$ ، ويقطع \overline{B} ج في $و$.
المطلوب : إثبات أن :

$$\frac{1}{3} = \frac{|AS|}{|AW|}$$

البرهان :

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{|AS|}{|SB|} = \frac{|AS|}{|صج|} \quad (\text{معطى})$$

$$\therefore \overline{S} \parallel \overline{B} \quad (\text{عكس النتيجة})$$

$$\text{ومنه } \overline{S} \parallel \overline{B}$$

$$\therefore \frac{|AS|}{|SB|} = \frac{|AS|}{|و|} \quad (\text{نتيجة})$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{|AS|}{|و|} \quad \text{ومنه } \frac{2}{1} = \frac{|و|}{|AS|} \quad (\text{خواص التناسب}).$$

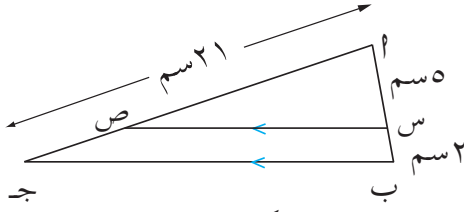
$$\therefore \frac{3}{1} = \frac{|AS| + |و|}{|AS|} \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$\therefore |AW| = |AS| + |و|$$

$$\therefore \frac{3}{1} = \frac{|AW|}{|AS|} \quad \text{أي أن : } \frac{1}{3} = \frac{|AS|}{|AW|} \quad \text{وهو المطلوب}$$

تمارين ومسائل

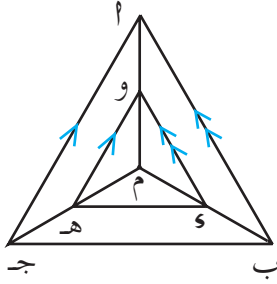
[١] في الشكل (٦ - ٢٨) :



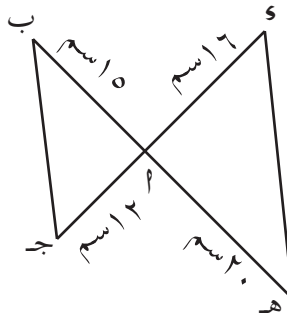
شكل (٦ - ٢٨)

$|ج| = |٢١ سم|$ ، $|١ سم| = |٥ سم|$ ،
 $|س| = |٢ سم|$ ، $س ص \parallel ب ج$ ،
 أوجد $|١ ص|$ ، $|ص ج|$.

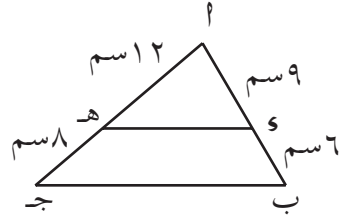
[٢] أثبت أن : $و هـ \parallel ب ج$ في كل من الأشكال (٦ - ٢٩ ، ب ، ج) :



شكل (٦ - ٢٩)

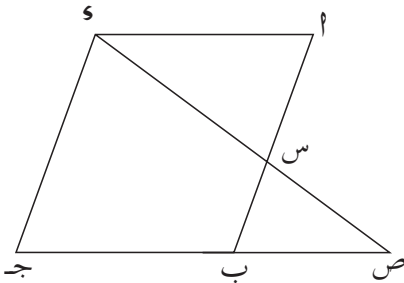


شكل (٦ - ٢٩)



شكل (٦ - ٢٩)

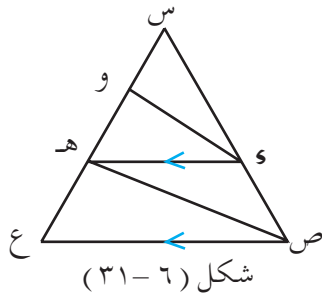
[٣] في الشكل (٦ - ٣٠) : $١ ب ج و$ متوازي اضلاع ، $س$ نقطة على



شكل (٦ - ٣٠)

$١ ب$. رسم $و س$ ومدّ حتى
 لاقى امتداد $ج ب$ في $ص$.

$$\text{برهن أن : } \frac{|ب س|}{|١ س|} = \frac{|ص ب|}{|ب ج|}$$



[٤] في الشكل (٣١ - ٦) : Δ س ص ع

فيه : $\overline{وه} \parallel \overline{ص ع}$ ، ونقطة على $\overline{س ع}$

$$\text{بحيث كان : } \frac{|س و|}{|وه|} = \frac{|س ه|}{|ه ع|} ,$$

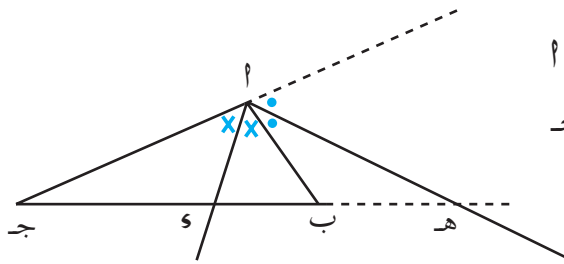
أثبت أن : $\overline{وه} \parallel \overline{ص ه}$.

[٥] أ ب ج مثلث ، و نقطة على $\overline{أ ب}$ بحيث كان : $\frac{٨}{٣} = \frac{|س أ|}{|أ ب|}$ ،

ه نقطة على $\overline{ب ج}$ بحيث كان : $\frac{٣}{٨} = \frac{|ب ه|}{|ه ج|}$. رسم $\overleftrightarrow{ب ص}$ بحيث

يقطع $\overline{وه}$ في س ، ويقطع $\overline{أ ج}$ في ص . أثبت أن : $\frac{٨}{١١} = \frac{|س ص|}{|أ ب|}$.

٦ : ٦ المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية مثلث



شكل (٣٢ - ٦)

في الشكل (٦ - ٣٢)

أ ب ج مثلث ، $\overleftrightarrow{أ د}$ ينصف \angle

من الداخل ويقطع الضلع ب ج

في النقطة د . لذلك يسمى

$\overleftrightarrow{أ د}$ منصفاً داخلياً للزاوية أ .

$\overleftrightarrow{أ ه}$ ينصف \angle من الخارج ويقطع

امتداد الضلع ج ب في النقطة ه ،

لذلك يسمى $\overleftrightarrow{أ ه}$ منصفاً خارجياً للزاوية أ .

مبرهنة المنصف :

المنصف لزاوية مثلث من الداخل أو الخارج يقسم الضلع المقابل للزاوية من الداخل أو الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولي ضلعي الزاوية

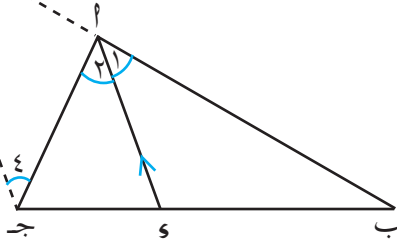
المعطيات : في Δ ا ب ج ،

ا س ينصف ا ب من الداخل ، [شكل (٦ - ٣٣)]

المطلوب : إثبات أن :

$$\frac{|ا ب|}{|ا ج|} = \frac{|ا ب|}{|ا س|}$$

العمل :



شكل (٦ - ٣٣)

من النقطة ج نرسم ج ه \parallel ا س

ويقطع ب ا في النقطة ه .

البرهان :

في Δ ا ب ج ه ، \therefore ا س \parallel ج ه (عملاً)

$$\therefore \frac{|ا ب|}{|ا ج|} = \frac{|ا ب|}{|ا ه|} \quad (١)$$

\therefore ا س \parallel ج ه ، ب ه ، ج ا قاطعان لهما

\therefore و (١ \times) = و (٣ \times) (بالتناظر)

، و (٢ \times) = و (٤ \times) (بالتبادل)

لكن و (١ \times) = و (٢ \times) (معطى)

$$\therefore \angle (3) = \angle (4)$$

وحيث أن $\angle 3$ ، $\angle 4$ هما زاويتا القاعدة في $\triangle م ج هـ$

$$\therefore |م ج| = |م هـ| \quad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن :

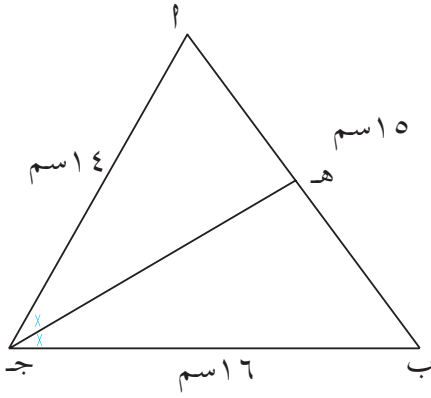
$$\frac{|م ب|}{|م ج|} = \frac{|م ب|}{|م هـ|}$$

وهو المطلوب

تدريب

برهن مبرهنة المنصف في حالة $\overleftrightarrow{م هـ}$ ينصف $\angle م$ من الخارج .

مثال (1)



شكل (٦-٣٤)

على الشكل (٦-٣٤) :

م ب ج مثلث فيه :

$$|م ب| = ١٥ \text{ سم} , |م ج| = ١٤ \text{ سم} ,$$

$$|م ج| = ١٦ \text{ سم} , \overleftrightarrow{م هـ} \text{ منصف}$$

داخلي للزاوية ج .

أوجد كلاً من $|م هـ|$ ، $|م ب هـ|$.

الحل:

$\therefore \overleftrightarrow{م هـ}$ منصف داخلي للزاوية ج في $\triangle م ب ج$

$$\therefore \frac{|م ب|}{|م ج|} = \frac{|م ب هـ|}{|م ج هـ|}$$

$$\frac{|أ هـ| + |ب هـ|}{|أ هـ|} = \frac{١٤ + ١٦}{١٤} \quad \text{ومنها} \quad \frac{|ب هـ|}{|أ هـ|} = \frac{١٦}{١٤} \quad \therefore$$

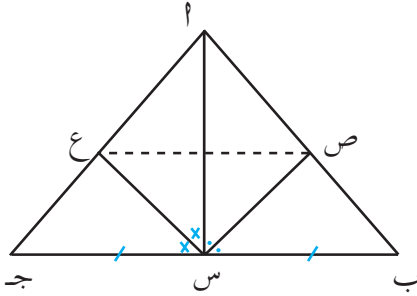
$$\frac{٣٠}{١٤} = \frac{١٥}{|أ هـ|} \quad , \quad \frac{٣٠}{١٤} = \frac{|أ ب|}{|أ هـ|}$$

$$\therefore |أ هـ| = \frac{١٤ \times ١٥}{٣٠} = ٧ \text{ سم} ,$$

$$|أ ب هـ| = |أ ب| + |ب هـ| = ١٥ \text{ سم} - ٧ \text{ سم} = ٨ \text{ سم}$$

مثال (٢)

في $\Delta أ ب ج$ النقطة (س) تنصف $\overline{ب ج}$ ، ص نقطة على $\overline{أ ب}$ ، ع نقطة على $\overline{أ ج}$ بحيث $\overline{س ص} \parallel \overline{أ ب}$ ينصف $\overline{أ س}$ ب ، $\overline{س ع} \parallel \overline{أ ب}$ ينصف $\overline{أ س}$ ج .
برهن أن : $\overline{ص ع} \parallel \overline{ب ج}$.



شكل (٦-٣٥)

المعطيات : في $\Delta أ ب ج$:

$$|أ ب| = |أ ج| , \quad \overline{س ص} \text{ تنصف } \overline{أ ب}$$

$$\overline{أ س} \text{ ب } , \quad \overline{س ع} \text{ تنصف } \overline{أ س} \text{ ج}$$

[انظر الشكل (٦-٣٥)] .

المطلوب : إثبات أن :

$$\overline{ص ع} \parallel \overline{ب ج}$$

البرهان :

$$\therefore \overline{س ص} \text{ تنصف } \overline{أ س} \text{ ب}$$

$$\therefore \frac{|أ ص|}{|ص ب|} = \frac{|أ س|}{|س ب|} \quad (١) \quad (\text{مبرهنة المنصف})$$

، $\therefore \overline{س ع} \text{ تنصف } \angle س ج$

$$\therefore \frac{|س ا|}{|س ج|} = \frac{|ع ا|}{|ع ج|} \text{ ، لكن } |س ب| = |س ج|$$

$$\therefore \frac{|س ا|}{|س ب|} = \frac{|ع ا|}{|ع ج|} \quad (٢)$$

بمقارنة (١) ، (٢) ينتج أن

$$\frac{|س ا|}{|ص ب|} = \frac{|ع ا|}{|ع ج|}$$

$\therefore \overline{ص ع} \parallel \overline{ب ج}$ (نتيجة) وهو المطلوب

عكس مبرهنة المنصف :

« إذا قسم أحد أضلاع مثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليها تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين . كان المستقيم الواصل من نقطة التقسيم إلى الرأس المقابل هو المنصف من الداخل أو من الخارج لزاوية الرأس » .

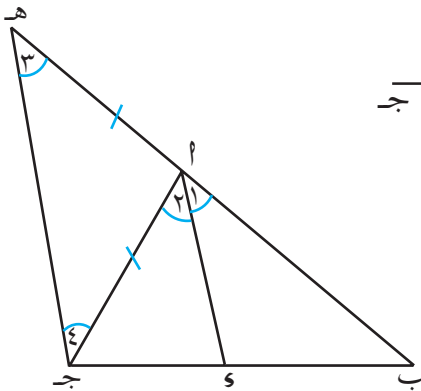
المعطيات :

في $\Delta ا ب ج$ النقطة (س) تقسم $\overline{ب ج}$

$$\text{بحيث } \frac{|ب ا|}{|ب ج|} = \frac{|س ا|}{|س ج|}$$

المطلوب : إثبات أن :

$\overline{ا س}$ ينصف $\angle ا$ من الداخل



شكل (٦-٣٦)

العمل: نمد $\overline{ب\alpha}$ إلى النقطة «هـ» بحيث: $|ا\alpha| = |ا\هـ|$ ، نرسم $\overline{هـج}$
 [انظر الشكل (٦-٣٦)] .

البرهان : في $\Delta ا\هـج$

$$\therefore |ا\هـ| = |ا\alpha| \quad (\text{عملاً})$$

$$\therefore \alpha\hbar = (3\hbar) = (4\hbar)$$

$$\therefore \frac{|ب\alpha|}{|ا\alpha|} = \frac{|ب\alpha|}{|ا\هـ|} \quad (\text{معطى})$$

$$\therefore \frac{|ب\alpha|}{|ا\alpha|} = \frac{|ب\alpha|}{|ا\هـ|}$$

$$\therefore \overline{ا\alpha} \parallel \overline{هـج} \quad \text{ومنه}$$

$$\alpha\hbar = (1\hbar) = (3\hbar) \quad \text{بالتناظر}$$

$$\alpha\hbar = (2\hbar) = (4\hbar) \quad \text{بالتبادل}$$

$$\therefore \alpha\hbar = (3\hbar) = (4\hbar)$$

$$\therefore \alpha\hbar = (1\hbar) = (2\hbar)$$

أي أن : $\overline{ا\alpha}$ ينصف $\alpha\hbar$ وهو المطلوب

تدريب

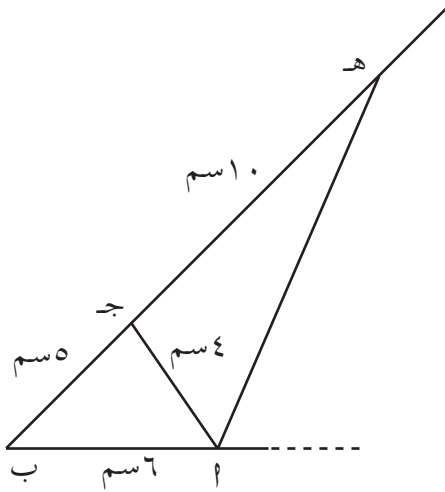
برهن عكس المبرهنة عندما تقسم النقطة «و» الضلع ب جـ من الخارج

$$\text{بحيث} \quad \frac{|ب\alpha|}{|ا\alpha|} = \frac{|ب\alpha|}{|ا\alpha|}$$

مثال (٣) في الشكل (٦-٣٧) $ا\alpha$ جـ مثلث فيه $|ا\alpha| = ٦$ سم،

$|ب ج| = ٥سم$ ، $|أ ج| = ٤سم$ مدت $\overline{ب ج}$ إلى النقطة هـ بحيث
 $|ج هـ| = ١٠سم$. أثبت أن : $\overline{أ هـ}$ منصف خارجي للزاوية أ .
 المعطيات :

في $\Delta أ ب ج$: $|أ ب| = ٦سم$ ، $|ب ج| = ٥سم$ ، $|أ ج| = ٤سم$ ،
 هـ نقطة على امتداد $\overline{ب ج}$ ، $|ج هـ| = ١٠سم$.
 المطلوب : إثبات أن : $\overline{أ هـ}$ ينصف $\angle أ$ من الخارج .
 البرهان :



شكل (٦-٣٧)

$$(١) \quad \frac{3}{2} = \frac{\cancel{٦}سم^3}{\cancel{٤}سم^2} = \frac{|أ ب|}{|أ ج|} \quad \therefore$$

$$(٢) \quad \frac{3}{2} = \frac{\cancel{٥}سم^3}{\cancel{١٠}سم^2} = \frac{|ب هـ|}{|ج هـ|}$$

بمقارنة (١) ، (٢) ينتج أن :

$$\frac{|ب هـ|}{|ج هـ|} = \frac{|أ ب|}{|أ ج|}$$

$\therefore \overline{أ هـ}$ ينصف $\angle أ$ من الخارج .

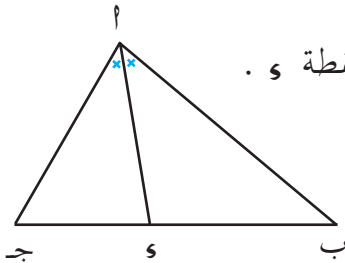
تمارين ومسائل

[١] في الشكل (٦-٣٨) : أ ب ج مثلث ،

أ هـ منصف للزاوية أ يقابل ب ج في النقطة و .

أكمل العبارات التالية بما يجعلها صحيحة :

$$\dots = \frac{|ج و|}{|و ب|} \quad (١)$$



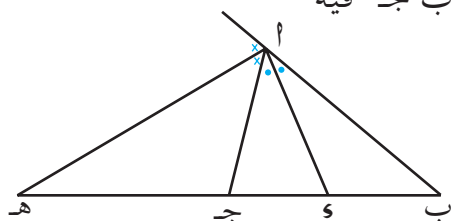
شكل (٦-٣٨)

(ب) إذا كان $\frac{2}{3} = \frac{|أج|}{|أب|}$ ، $|أب| = |أج| = ٦$ سم فإن $|ج و| = \dots$

(ج) إذا كان $|أب| = |أج|$ فإن $|أب| = |ج و| = \dots$

(و) إذا كان $|أب| < |أج|$ فإن $|أب| < |ج و| = \dots$

[٢] في الشكل (٦ - ٣٩) Δ $أب ج$ فيه



$أ$ ، $أه$ المنصفان الداخلي

والخارجي على الترتيب

للزاوية $أ$ ، فإذا كان

شكل (٦ - ٣٩)

$|أب| = |أج| = ٦$ سم ، $|أه| = ٤$ سم ،

$|أو| = ٣$ سم . فأوجد كلاً من $|ج د|$ ، $|هـ د|$.

[٣] باستخدام (مبرهنة المنصف) ، برهن على أن « في المثلث المتساوي

الساقين ، المنصف للزاوية الرأس ينصف القاعدة » .

[٤] $أب ج$ مثلث مختلف الأضلاع . نصفت الزاوية $أ$ من الداخل بالمنصف

$أو$ ، ومن الخارج بالمنصف $أهـ$ بحيث يلاقيان $ب ج$ وامتداده في

النقطتين $و$ ، $هـ$ على الترتيب . برهن أن $أهـ \perp أو$.

[٥] $أب ج$ مثلث فيه : $|أب| = ١٢$ سم ، $|أج| = ٨$ سم ، نصفت $أ$

بمنصف لاقى $ب ج$ في النقطة $و$ بحيث كان $|أو| = ٦$ سم . فإذا

مدت $ب ج$ إلى نقطة $هـ$ بحيث كان $|ج هـ| = ٢٠$ سم فأثبت أن

$أهـ$ منصف خارجي للزاوية $أ$.

[٦] برهن أن « في المثلث المتساوي الساقين ، المنصف الخارجي للزاوية الرأس

يوازي القاعدة » .

[٧] ا ب ج د مثلث . فرضت نقطة (س) داخله ثم وصلت كلاً من $\overline{س ا}$ ، $\overline{س ب}$ ، $\overline{س ج}$ نصف الزوايا ب س ج ، ج س ا ، ا س ب بمنصفات لاقت الأضلاع ب ج ، ج ا ، ا ب على الترتيب في النقاط و ، هـ . أثبت أن :

$$١ = \frac{|ا هـ|}{|هـ ب|} \times \frac{|ج و|}{|و ا|} \times \frac{|ب ز|}{|ز ج|}$$

٦ : ٧ التشابه

تمهيد :

تأمل الصور الموضحة في الشكل (٦ - ٤٠) . ماذا تلاحظ ؟



(ج)



(ب)



(ا)

شكل (٦ - ٤٠)

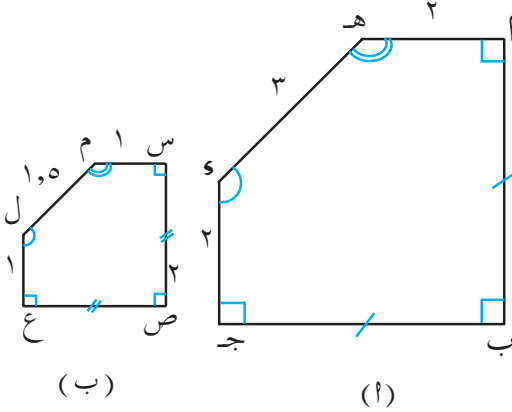
تلاحظ أن الصور الثلاث تحوي الشكل نفسه (المسجد الأقصى) ، ولكنها ليست كلها بنفس الأبعاد . فالصورتان (ا) ، (ج) لهما نفس الأبعاد بينما الصورة (ب) تختلف عنهما بالأبعاد . نسمي مثل هذه الأشكال - أشكال متشابهة .

نشاط

– تأمل الشكلين (٦ – ١٤١) ،

(٦ – ٤١ ب) .

– احسب النسب التالية :



$$\frac{اس}{اه} ، \frac{اس}{اب} ، \frac{صع}{اب} ، \frac{ام}{اه} ، \frac{لع}{وج} ، \frac{لم}{وه} .$$

شكل (٦ – ٤١)

ماذا تلاحظ على هذه النسب ؟

– قارن زوايا الشكلين . ماذا تلاحظ ؟

مما سبق تلاحظ أن : $\angle ا = \angle س$ ، $\angle و = \angle ص$ ، $\angle ه = \angle ع$ ،

$\angle ب = \angle ج$ ، $\angle ل = \angle ع$ ، $\angle ز = \angle و$ ، $\angle ه = \angle ع$.

كما تلاحظ أن :

$$\frac{اس}{اه} = \frac{ام}{هـ} = \frac{لع}{وج} = \frac{صع}{اب} = \frac{سص}{اب}$$

وبناء على ذلك نقول إنَّ الشكلين متشابهان ، ونسبة تشابههما هي

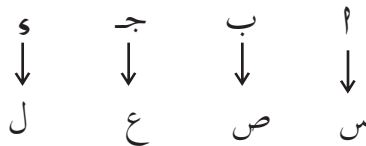
$$\frac{اس}{اب} ، أو \frac{صع}{اب} ، أو \frac{لع}{وج} ، أو \frac{ام}{هـ} ، أو \frac{سص}{اب}$$

يتشابه الشكلان الهندسيان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة
وتطابقت (تساوت في القياس) زواياهما المتناظرة .
وتسمى النسبة بين طولي ضلعين متناظرين نسبة التشابه .

ملاحظة هامة :

لتحديد الأضلاع المتناسبة والزوايا المتطابقة لشكلين هندسيين (مُضلعين)
متشابهين ، من المناسب كتابة رموز هذين المضلعين بطريقة يستدل بها
على التناظر بين عناصرهما (الأضلاع والزوايا) ، أي بحيث يكون ترتيب
رؤوس المضلعين واحداً .

فعلى سبيل المثال إذا كان الشكلان ١ ب ج د ، س ص ع ل متشابهين فإننا
نكتب ذلك على النحو التالي ١ ب ج د ~ س ص ع ل .
ويعني ذلك :



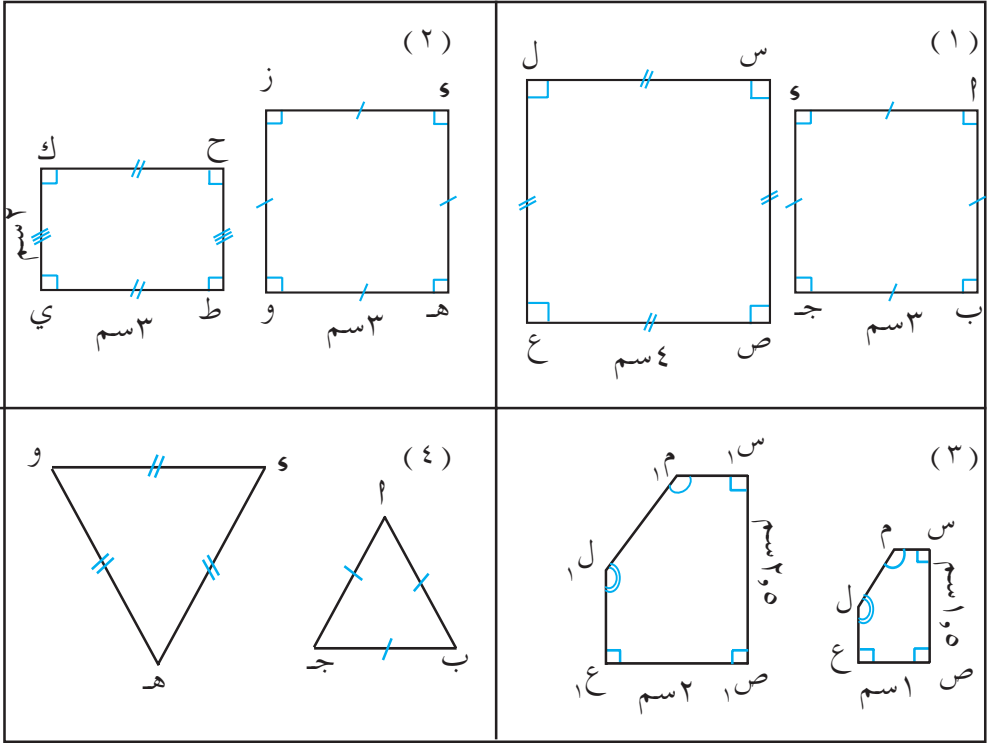
أي أن :

$$\begin{aligned} \text{١} \times \text{س} &= \text{س} \times \text{س}, \text{١} \times \text{ب} = \text{ص} \times \text{ب}, \text{١} \times \text{ج} = \text{ع} \times \text{ج}, \text{١} \times \text{د} = \text{ل} \times \text{د} \\ \text{١} \times \text{س} &= \text{س} \times \text{س} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{س} = \frac{س}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{ج}{ع} = \frac{د}{ل}$$

مثال (١)

حدد أزواج الأشكال المتشابهة وغير المتشابهة ، مع ذكر السبب في كل مما يلي :



شكل (٦ - ٤٢)

الحل:

(١) واضح أن الزوايا المتناظرة في الشكلين متطابقة « جميعها قوائم » ،

$$\frac{٣}{٤} = \frac{|س١|}{|س٢|} ، \frac{٣}{٤} = \frac{|س١|}{|س٢|} ، \frac{٣}{٤} = \frac{|س١|}{|س٢|} ، \frac{٣}{٤} = \frac{|س١|}{|س٢|}$$

أي أن الأضلاع المتناظرة متناسبة ، إذن الشكلان متشابهان .

(٢) الزوايا المتناظرة في الشكلين متطابقة . لماذا ؟

$$\text{لكن } ١ = \frac{٣}{٣} = \frac{|ط١|}{|ط٢|} ، \frac{٢}{٣} = \frac{|ح١|}{|ح٢|}$$

$$\frac{|ط ي|}{|ه و|} \neq \frac{|ح ط|}{|ا ه|} \quad \text{أي أن}$$

∴ الشكلان غير متشابهين

(٣) الزوايا المتناظرة في الشكلين متطابقة . (تحقق من ذلك) .

$$\frac{1}{2} = \frac{|ص ع|}{|ص ع, ا|} \quad , \quad \frac{3}{5} = \frac{1,5}{2,5} = \frac{|س ص|}{|س, ا ص|} \quad \text{لكن}$$

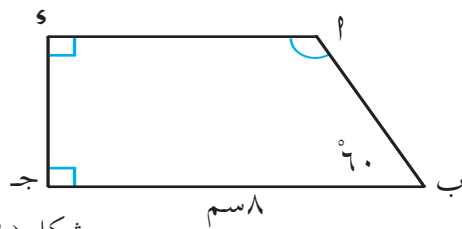
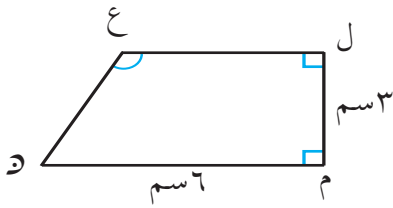
$$\frac{|ص ع|}{|ص ع, ا|} \neq \frac{|س ص|}{|س, ا ص|} \quad \text{أي أن} \quad \therefore \text{الشكلان غير متشابهين.}$$

(٤) الشكلان متشابهان ، لأن جميع الزوايا المتناظرة متطابقة ، الأضلاع المتناظرة متناسبة . (تحقق من ذلك)

مثال (٢)

في الشكل (٦ - ٤٣) : مضلعان متشابهان . أوجد :

(١) و (٥) (٢) نسبة التشابه (٣) |ا ج| .



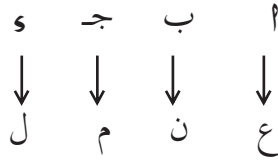
شكل (٦ - ٤٣)

الحل:

∴ المضلعان ا ب ج د ، ع ن م ل متشابهان ، و (٥) = و (٤) ، و (٤) = و (٥) ، و (٤) = و (٥) ، و (٤) = و (٥) .

$$\therefore (٥) = (٤) , (٤) = (٥) , (٤) = (٥) , (٤) = (٥) .$$

∴ نكتب رؤوس المضلعين على النحو التالي :



ومنها:

$$(١) \quad و = (ن \times ب) \quad و = (ب \times ن)$$

$$(٢) \quad \text{نسبة التشابه هي : } \frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨} = \frac{|م ن|}{|ج ب|}$$

$$(٣) \quad ∴ \overline{س ج} \text{ يناظر } \overline{ل م} \text{ ونسبة التشابه هي } \frac{٣}{٤}$$

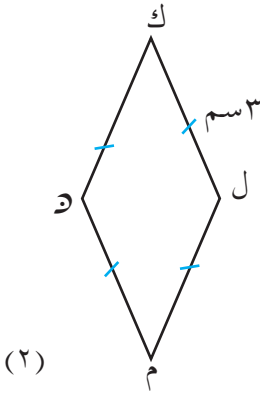
$$∴ \frac{٣}{٤} = \frac{|ل م|}{|س ج|}$$

$$\text{ومنه} \quad \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{|س ج|}$$

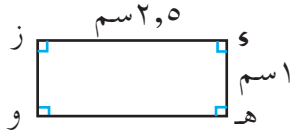
$$∴ |س ج| = ٤ سم .$$

تمارين ومسائل

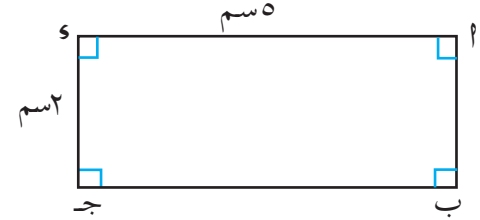
[١] أي الأشكال الآتية متشابهة . ولماذا ؟



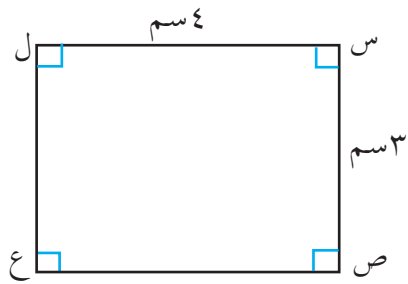
(٢)



(٤)



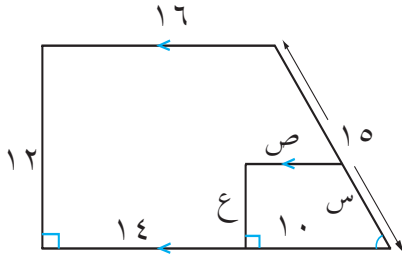
(١)



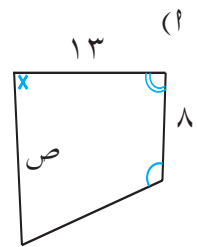
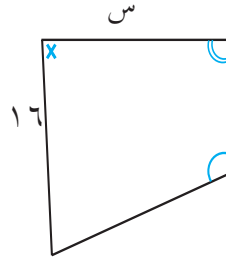
(٣)

شكل (٦-٤٤)

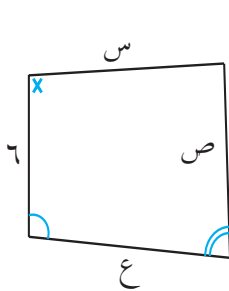
[٢] في كل مما يلي إذا علمت أن الشكلين متشابهان، فأوجد كلاً من س، ص، ع.



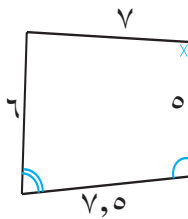
(ب)



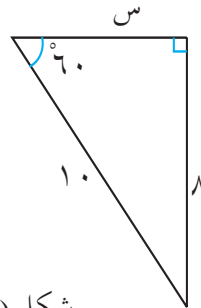
(١)



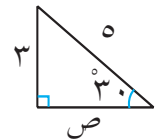
(٥)



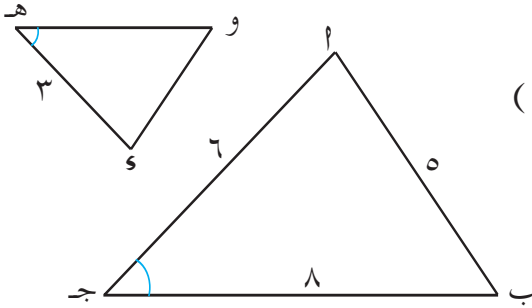
شكل (٦-٤٥)



(ج)



[٣] في الشكل (٦ - ٤٦) مثلثان متشابهان ونسبة تشابههما هي ٢ . أكمل :



شكل (٦ - ٤٦)

(١) $\Delta ABC \sim \Delta DEF \dots$

(٢) $\angle C = \angle F \dots$

(٣) $AC \parallel DF \dots$

(٤) $BC \parallel EF \dots$

[٤] ضع (✓) أمام العبارة الصحيحة فيما يلي :

(١) جميع المربعات متشابهة . (٢) يمكن أن يتشابه المعين والمربع .

(٣) جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة .

(٤) جميع المثلثات المتساوية الساقين متشابهة .

(٥) جميع المستطيلات متشابهة .

[٥] $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ، هـ و ، بحيث كان $\angle C = \angle F$ ،

$\angle B = \angle E$ ، $AB = 8$ سم ، $BC = 6$ سم ، $AC = 5$ سم ، $DE = 4$ سم ، $EF = 3$ سم ،

نسبة التشابه $\frac{2}{3}$ فأوجد AC ، BC ، AB .

٦ : ٨ تشابه المثلثات

تعلم أن تشابه مثلثين ABC ، DEF ينتج عنه :

١ - تناسب الأضلاع المتناظرة ، أي أن :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

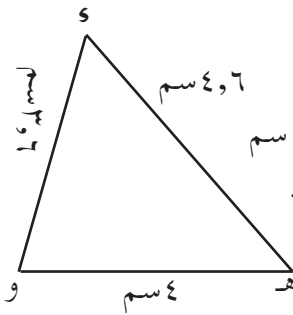
٢- تطابق الزوايا المتناظرة ، أي أن : $\angle (س) = \angle (ل)$ ،

$$\angle (ب) = \angle (هـ) ، \angle (ج) = \angle (و) .$$

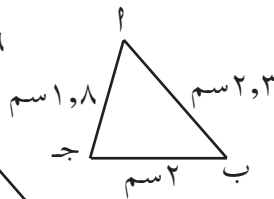
ولكي نثبت تشابه مثلثين ، فمن الضروري أن نثبت تناسب أضلاعهما المتناظرة وتطابق زواياهما المتناظرة ، غير أننا نستطيع أن نقلل تلك الشروط بحيث نطبق الشروط الكافية لتشابه مثلثين فقط ، وهذا ما نسميه حالات تشابه مثلثين .

الحالة الأولى لتشابه مثلثين :

نشاط



شكل (٦-٤٧ ب)



شكل (٦-٤٧ ب)

(١) ارسم المثلثين ل ب ج ، و هـ و

بالقياسات المعطاة ، كما في

الشكل (٦-٤٧ ب) .

(٢) تحقق من تناسب الأضلاع المتناظرة ،

$$\text{أي أن } \frac{|ل ب|}{|ل ج|} = \frac{|ل ب|}{|ل ج|} = \frac{|ل ب|}{|ل ج|}$$

(٣) استخدم المنقلة لقياس زوايا المثلثين ، وتحقق من تطابق الزوايا المتناظرة ،

أي أن $\angle (س) = \angle (ل)$ ، $\angle (ب) = \angle (هـ)$ ،

$$\angle (ج) = \angle (و) .$$

نستنتج أن المثلثين ل ب ج ، و هـ و متشابهان .

(٤) كرر الخطوات السابقة عدة مرات مع تغيير أطوال الأضلاع في المثلثين

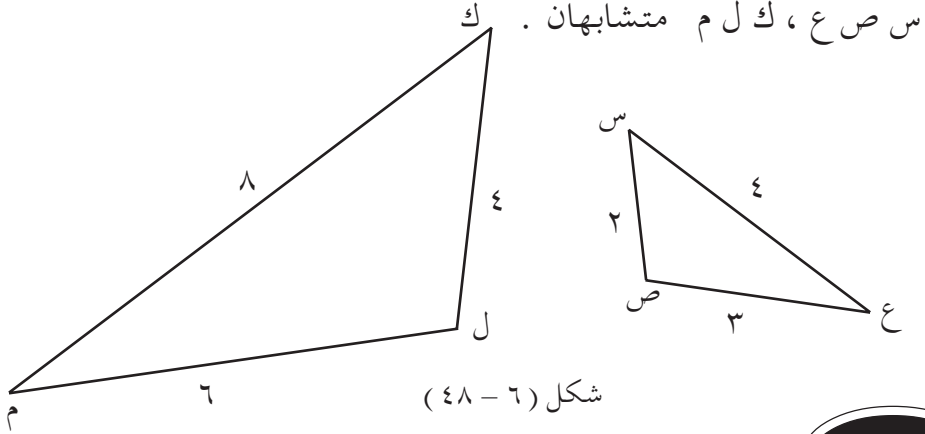
« بشرط أن تكون الأضلاع المتناظرة متناسبة في كل حالة » . ستجد في

كل مرة أن الزوايا المتناظرة متطابقة ، وبالتالي المثلثان متشابهان .

من النشاط السابق نستنتج :

يتشابه مثلثان إذا تناسب أضلاعهما المتناظرة

مثال (١) حسب البيانات الموضحة على الشكل (٦-٤٨)، أثبت أن المثلثين



الحل :

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{|ص ع|}{|ل م|} , \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{|س ص|}{|ك ل|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{|س ع|}{|ك م|}$$

$$\frac{|س ع|}{|ك م|} = \frac{|ص ع|}{|ل م|} = \frac{|س ص|}{|ك ل|} \text{ أي أن}$$

∴ المثلثان س ص ع ، ك ل م متشابهان .

مثال (٢)

ما أطوال أضلاع المثلث وهو المشابه للمثلث ٢ ب ج الذي فيه



أب = ٦,٦ سم ، أب ج = ٢,٤ سم ، أج = ٥,٧ سم ، حيث نسبة تشابه Δ وهو إلى Δ أب ج هي $\frac{1}{3}$ ؟

الحل:

∴ Δ وهو Δ أب ج ، نسبة التشابه $\frac{1}{3}$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{|ا و|}{|ا ب|} = \frac{|ا ه و|}{|ا ب ج|} = \frac{|ا ه|}{|ا ب|}$$

$$\text{ومنها } \frac{1}{3} = \frac{|ا ه|}{|ا ب|} ،$$

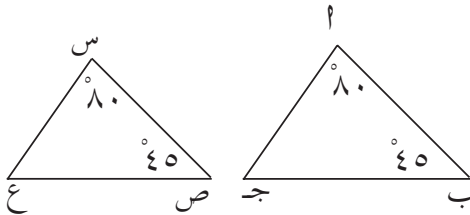
$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{|ا ه|}{6,6} \text{ ومنها } |ا ه| = \frac{6,6}{3} = 2,2 \text{ سم}$$

$$\text{بالمثل } \frac{1}{3} = \frac{|ا ه و|}{|ا ب ج|} \text{ ومنها } |ا ه و| = \frac{2,4}{3} = 0,8 \text{ سم ،}$$

$$|ا و| = \frac{5,7}{3} = 1,9 \text{ سم (لماذا ؟)}$$

الحالة الثانية لتشابه مثلثين :

نشاط



شكل (٦ - ٤٩)

(١) ارسم المثلثين أب ج ، س ص ع ، بحيث تكون :

$$\widehat{ا} = 80^\circ \text{ و } \widehat{ا} = (\text{س}) \text{ و } \widehat{ب} = 45^\circ \text{ و } \widehat{ب} = (\text{ص})$$

و (ب) = 45° و (ص) = 45° [انظر الشكل (٦ - ٤٩)] .

لاحظ أن :

$$\text{وه}(\text{جـ}) = \text{وه}(\text{ع}) = \text{وه} \text{ لماذا ؟}$$

(٢) استخدم المسطرة لقياس أطوال الأضلاع المتناظرة ، ثم احسب النسب التالية :

$$\frac{| \text{أ ب} |}{| \text{أ س} |} ، \frac{| \text{أ جـ} |}{| \text{أ س} |} ، \frac{| \text{ب جـ} |}{| \text{أ س} |} \text{ ماذا تلاحظ على هذه النسب ؟}$$

(٣) كرر ما سبق عدة مرات مع تغيير قياسات الزوايا (بشرط تطابق زاويتين من أحد المثلثين مع زاويتين من الآخر). ستجد في كل مرة أن الأضلاع المتناظرة متناسبة.

من النشاط السابق نستنتج :

يتشابه مثلثان إذا تطابقت زاويتان من أحدهما مع زاويتين من الآخر

مثال (٣)

في الشكل (٦ - ٥٠) : $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{جـ د}}$

١) أثبت أن $\Delta \text{أ م ب} \sim \Delta \text{م جـ د}$ ،

ب) إذا كان $| \text{أ ب} | = ٣ \text{ سم}$ ،

$| \text{أ جـ} | = ٦ \text{ سم}$ ، $| \text{أ م} | = ٥ \text{ سم}$ ،

$| \text{جـ د} | = ٤ \text{ سم}$.

فأوجد $| \text{أ ب} |$ ، $| \text{أ م} |$.

الحل :

١) $\therefore \overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{جـ د}} \therefore \text{وه}(\text{أ جـ}) = \text{وه}(\text{أ د})$ (بالتبادل)

، $\text{وه}(\text{أ ب}) = \text{وه}(\text{أ جـ})$ (بالتبادل)

$\therefore \Delta م ب \sim \Delta س م ج$

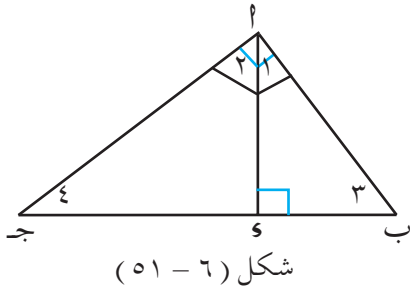
(ب) من تشابه المثلثين ينتج : $\frac{|م ب|}{|م ج|} = \frac{|م ب|}{|س م|} = \frac{|أ ب|}{|ج س|}$

$$\therefore \frac{|أ ب|}{14} = \frac{5}{|س م|} = \frac{3}{6}$$

من التناسب $\frac{5}{|س م|} = \frac{3}{6}$ ، ينتج $|س م| = \frac{5 \times 6}{3} = 10$ سم

ومن التناسب $\frac{3}{6} = \frac{|أ ب|}{14}$ ، ينتج $|أ ب| = \frac{3 \times 14}{6} = 7$ سم

مثال (٤)



في الشكل (٦ - ٥١) :

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في أ ،

$\overline{أ س} \perp \overline{ب ج}$. أثبت أن :

(أ) $\Delta ج أ ب \sim \Delta ج س أ$

(ب) $\Delta ب س أ \sim \Delta ب أ ج$

(ج) $\Delta أ س ب \sim \Delta ج س أ$.

الحل :

(أ) $\Delta ج أ ب$ ، $\Delta ج س أ$ فيهما :

$\angle ب = \angle ب$ (زاوية مشتركة) ، $\angle أ = \angle أ$ (زاوية قائمة)

، $\angle ج = \angle ج$ (زاوية مشتركة)

$$\therefore \Delta ج ا ب \sim \Delta ج و ا$$

(ب) بالمثل $\Delta ب و ا \sim \Delta ب ا ج$

(ج) من الفقرة (أ) نحصل على $و (ج) = (ج) (و) = (ج) (و)$ ،

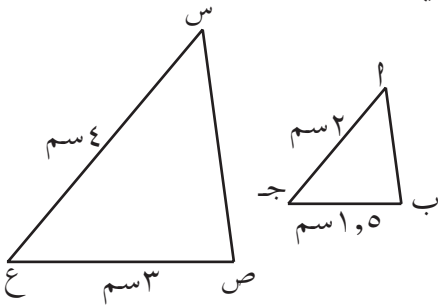
من (ب) نحصل على : $و (ج) = (ج) (و) = (ج) (و)$

$$\therefore \Delta ب و ا \sim \Delta ج ا ب .$$

الحالة الثالثة لتشابه مثلثين :

نشاط

(١) ارسم المثلثين أ ب ج ، س ص ع ، بحيث :



شكل (٦-٥٤)

$$| ا ج | = ٢ \text{ سم} ، | ب ج | = ٥ \text{ سم} ،$$

$$| ا س | = ٣ \text{ سم} ، | ص ع | = ٦ \text{ سم} ،$$

$$و (ج) = (ج) (و) = (ج) (و) = ٥٠$$

(٢) استخدم المسطرة لقياس كلٍ من :

$$| ا ب | ، | ا س | ، | ب ص | ، ثم احسب $\frac{| ا ب |}{| ا س |}$$$

(٣) قارن بين النسب $\frac{| ا ب |}{| ا س |}$ ، $\frac{| ا ج |}{| ا س |}$ ، $\frac{| ب ج |}{| ب ص |}$. ماذا تلاحظ ؟

(٤) استخدم المنقلة لقياس كلٍ من : $\angle ا ب ج$ ، $\angle ب ج ا$ ، $\angle ج ا ب$ ، $\angle س ص ع$ ، $\angle ص ع س$. ثم قارن قياسات

الزوايا المتناظرة . ماذا تلاحظ ؟ لاشك أنك لاحظت أن : الأضلاع المتناظرة

متناسبة ، والزوايا المتناظرة متطابقة .

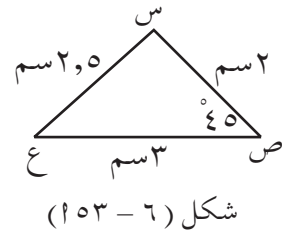
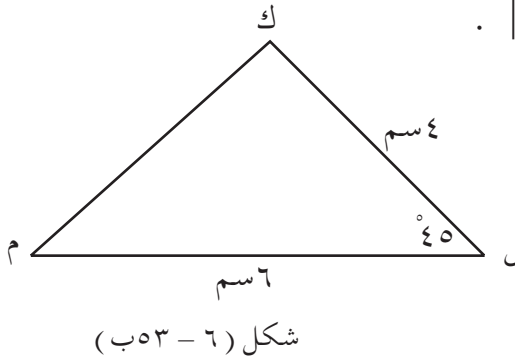
وبالتالي فإن $\Delta ا ب ج \sim \Delta س ص ع$.

مما سبق نستنتج أن :

يتشابه مثلثان إذا تطابقت زاوية من أحدهما مع زاوية من الآخر ،
وتناسب ضلعا الزاوية الأولى مع ضلعي الزاوية الأخرى .

مثال (٥) مستعيناً بالشكلين (٦-١٥٣ ، ب) : بيّن أن $\Delta س ص ع \sim \Delta ك ل م$ ، ك ل م

متشابهان ، ثم أوجد | ك م | .



الحل :

في $\Delta س ص ع \sim \Delta ك ل م$: $\angle س ص ع = \angle ك ل م$ ، $\angle س ع ص = \angle ك م ل$ ، $\angle ع ص س = \angle ل م ك$ معطى ،

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{|ص ع|}{|ل م|} , \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{|س ص|}{|ك ل|}$$

أي أن زاوية من أحد المثلثين تطابق زاوية من الآخر وضلعا الزاويتين متناسبان
∴ المثلثان س ص ع ، ك ل م متشابهان .

$$\frac{1}{2} = \frac{|س ع|}{|ك م|} \text{ ومنه نجد أن :}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2.5}{|ك م|} \quad \therefore$$

$$\therefore |ك م| = 5 \text{ سم}$$

تمارين ومسائل

[١] حدد فيما إذا كان المثلثان متشابهين في كل مما يلي ، مع ذكر السبب :

<p>(ب)</p>	<p>(٢)</p>
<p>(٤)</p>	<p>(جـ)</p>

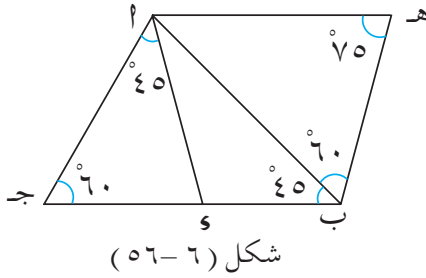
شكل (٦ - ٥٤)

[٢] في كل من الحالتين التاليتين مثلثان متشابهان. أوجد طول الضلع المطلوب ،

أو قياس الزاوية المطلوبة .

<p>(ب)</p> <p>أوجد هـو </p>	<p>(٢)</p> <p>أوجد \angle جـ</p>
--------------------------------	---

شكل (٦ - ٥٥)



[٢] بالاستعانة بالشكل (٦-٥٦)

سمّ مثلثين مشابهين

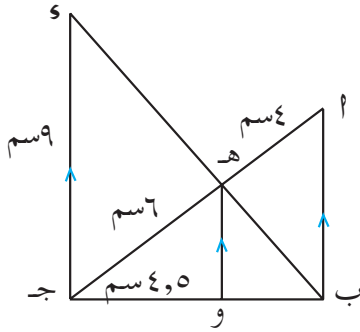
للمثلث $\triangle ABC$ مع ذكر السبب.

[٤] في الشكل (٦-٥٧) :

$\overline{AB} \parallel \overline{HO}$ ، $\overline{AC} \parallel \overline{SO}$ ،

هـ نقطة تقاطع \overline{AS} ، \overline{BS} .

أوجد AB ، HO ، AS ، BS .



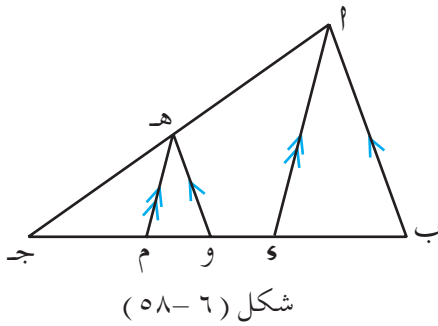
[٥] في الشكل (٦-٥٨) :

$\overline{AB} \parallel \overline{HO}$ ، $\overline{AC} \parallel \overline{HM}$.

١) أثبت أن $\triangle ABC \sim \triangle HMO$

ب) إذا كان $AM = 11$ سم ، $HO = 5$ سم ، $AB = 11$ سم ، $AC = 11$ سم ،

أوجد AB ، HO ، AS ، BS .



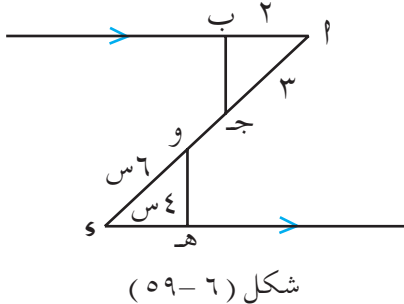
[٦] بالاستعانة بالشكل (٦-٥٩) :

أوجد قيم s ، v لكي يكون

المثلثان $\triangle ABC$ ، $\triangle HMO$:

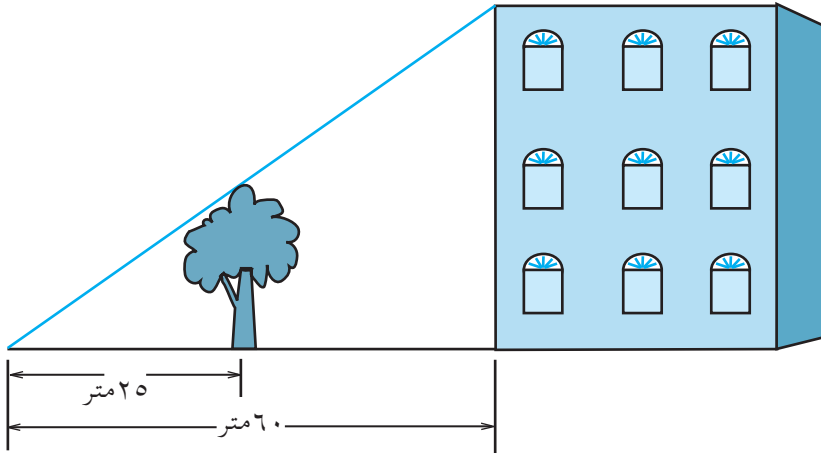
١) متطابقين .

ب) متشابهين وغير متطابقين .



[٧] س ص ع مثلث ، ك منتصف س ع ، ل نقطة على س ص بحيث
 $|س ل| = ٢ سم$ ، فإذا كان $|س ص| = ١٦ سم$ ، $|س ع| = ٨ سم$ ،
 $|ص ع| = ٤$ |ك ل| فأثبت أن : $\Delta س ك ل \sim س ص ع$.

[٨] استعن بالشكل (٦ - ٦٠) والأبعاد المحددة عليه لإيجاد ارتفاع المبنى ،
 علماً بأن ارتفاع الشجرة ٥ أمتار .



شكل (٦ - ٦٠)

٦ : ٩ تمارين عامه ومساءل

[١] باستخدام خواص التناسب . أوجد قيم س ، ص ، ع في كل مما يأتي :

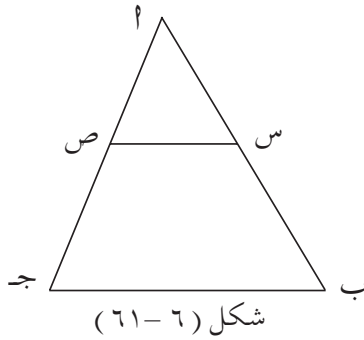
$$٢٤ = س + ص \quad , \quad \frac{٥}{٧} = \frac{س}{ص} \quad (أ)$$

$$٢٤ = س - ص \quad , \quad \frac{٢}{٣} = \frac{٣ + س}{٣ + ص} \quad (ب)$$

$$٣٦ = س + ص + ع \quad , \quad \frac{٤}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣} \quad (ج)$$

[٢] س ص قطعة مستقيمة طولها ١٥ سم ، ع نقطة تقسمها من الداخل بنسبة ٣ : ٢ من جهة س . أوجد كلاً من |س ع| ، |ع ص| .

[٣] في الشكل (٦١ - ٦) :



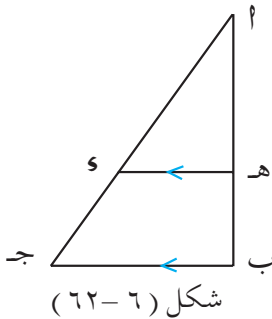
شكل (٦١ - ٦)

$$|أ ب| = ١٥ \text{ سم} , |أ س| = ١٠ \text{ سم} , |أ ص| = ٨ \text{ سم} .$$

$$\frac{|أ س|}{|أ ب|} = \frac{|أ ص|}{|ج ب|} \quad \text{فإذا كان}$$

فأوجد |ج ص| .

[٤] في الشكل (٦٢ - ٦) :



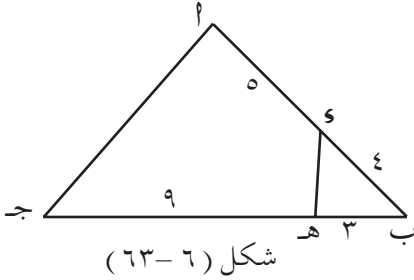
شكل (٦٢ - ٦)

$$|أ ب| = ١٣ \text{ سم} , |أ ج| = ١٦ \text{ سم} ,$$

$$|ج و| = ٦ \text{ سم} . \text{ فإذا كان } هـ و \parallel ج ب$$

فأوجد كلاً من |هـ ب| ، |هـ أ| .

[٥] في المثلث AB ج : و ، ه نقطتان على AB ، AG على الترتيب
حيث $|AG| = \frac{1}{3}|AB|$ ، $|AG| = \frac{1}{3}|AB|$ ، أنشئ من النقطة ج
مستقيم يوازي HE ويقطع AB في و . أثبت أن «و» منتصف AB .



[٦] استعن بالشكل (٦ - ٦٣) :

والأبعاد المحددة عليه لإثبات أن

أولاً : $\triangle ABH \sim \triangle AEG$

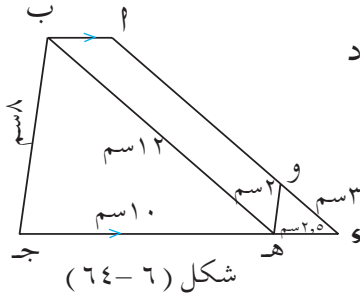
ثانياً : $|AG| = 3|HE|$

[٧] في الشكل (٦ - ٦٤) : $AB \parallel GW$ شبه منحرف فيه

$AB \parallel GW$. استعن بالشكل والأبعاد

المحددة عليه في إثبات أن :

الشكل AB هـ متوازي أضلاع .



[٨] أرض زراعية مستطيلة الشكل رسمت لها خريطة بمقياس ١ : ٢٠٠٠٠٠

فإذا كان بعدها على الخريطة هما ١٠ سم ، ٨ سم . فأوجد مساحتها

بالكيلومتر المربع .

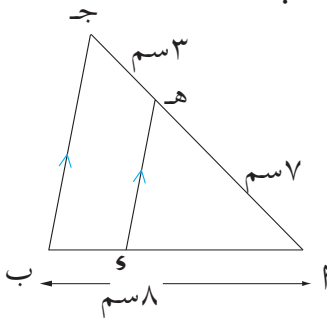
١٠ : اختبار الوحدة

[١] إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل}$ ، فأكمل ما يلي :

١ ($\square \times س = \square \times ع$)

ب ($\frac{\square + ع}{\square - ع} = \frac{س + ص}{س - ص}$)

[٢] أوجد قيمة ١ ، إذا كان $\frac{٥}{٢} = \frac{٢٠}{١٣ + ٢}$.



شكل (٦-٦٥)

[٣] في الشكل (٦ - ٦٥) :

و هـ // ب ج ، $|ا هـ| = ٧ سم$ ،

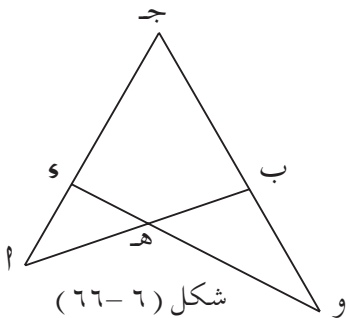
$|ا هـ ج| = ٣ سم$ ، $|ا ب| = ٨ سم$ ،

أوجد كلاً من $|ا و|$ ، $|و ب|$.

[٤] في المثلث ا ب ج : $|ا ب| = |ا ج|$ ، والنقطتان و ، هـ تقعان على

ا ج ، ا ب على الترتيب بحيث : ب و ينصف ا ب ، ج هـ ينصف

ا ج . برهن أن : و هـ // ب ج .



شكل (٦-٦٦)

[٥] في الشكل (٦ - ٦٦) : إذا كان

فبرهن أن $\frac{|ا هـ|}{|ا ج|} = \frac{|ا و|}{|ا ب|}$

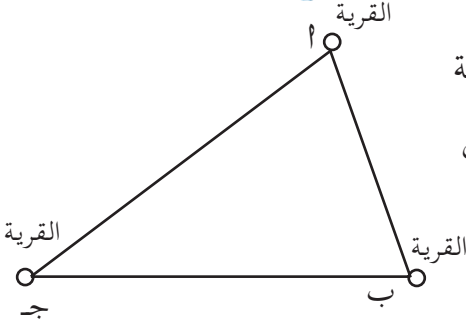
(١) $\Delta ا و هـ \sim \Delta ا ب ج$

(٢) $\angle (و ب هـ) = \angle (و ج هـ)$.

٧ : ١ العلاقات بين أضلاع المثلث وزواياه



تأمل الشكل التالي : ١ ، ب ، ج تمثل ثلاث قرى :
فاطمة تقيم في القرية ١ وإذا أرادت الذهاب إلى
القرية ج ، فإما أن تذهب مباشرة ، أو أن
تذهب عن طريق القرية ب .

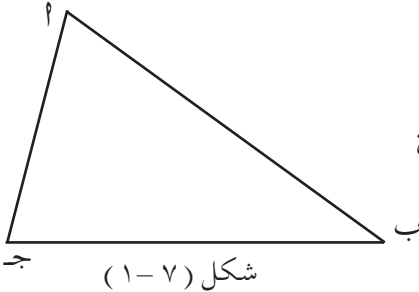


ستجد أن المسافة التي تقطعها فاطمة
عن طريق القرية ب هي أطول من
المسافة التي تقطعها بها مباشرة .

يمكننا أن نعتبر مواقع القرى الثلاث
رؤوساً لمثلث ، وبذلك نحصل على علاقة تسمى المتباينة المثلثية ، وتنص
هذه المتباينة على أن :

مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث

تدريب (١)



شكل (٧ - ١)

في الشكل (٧ - ١) : استخدم المسطرة

ثم أكمل ما يلي :

$$|١ب| + |بج| = \dots \text{سم} + \dots \text{سم} = \dots \text{سم}$$



ولكن $|أ ج| = \dots$ سم ،

$|أ ب| + |أ ج| = \dots$ سم + \dots سم = \dots سم

ولكن $|أ ب ج| = \dots$ سم ،

$|أ ب ج| + |أ ج| = \dots$ سم + \dots سم = \dots سم

ولكن $|أ ب| = \dots$ سم

ماذا تلاحظ ؟

يمكننا بواسطة المتباينة المثلثية أن نحدد فيما إذا كانت ثلاث قطع مستقيمة تمثل أضلاع مثلث أم لا .

مثال (١)

هل تمثل الأطوال التالية أضلاع مثلث ؟

(أ) ٥ سم ، ٦ سم ، ٧ سم ، (ب) ٧ سم ، ١٣ سم ، ٥ سم .

الحل:

(أ) $\because ٥ < ٦ + ٧$ ، $٦ < ٥ + ٧$ ، $٧ < ٥ + ٦$.

\therefore هذه الأطوال تشكل أضلاع مثلث .

(ب) $\because ١٣ > ٥ + ٧$ ،

\therefore الأطوال ٧ سم ، ١٣ سم ، ٥ سم لا تمثل أضلاع مثلث .

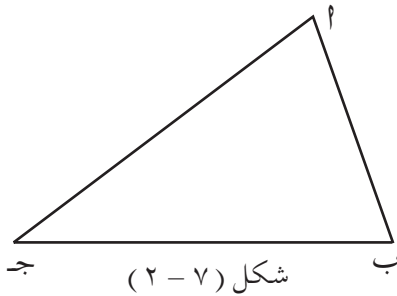
تدريب (٢)

ارسم أي مثلث مختلف الأضلاع ، قس زواياه ، قارن بين أضلاع المثلث ثم بين الزوايا المقابلة لها ، ماذا تستنتج ؟

الضلع الأكبر في المثلث تقابله الزاوية الكبرى والضلع الأصغر
تقابله الزاوية الصغرى والعكس صحيح .

الزاوية الكبرى في المثلث تقابل الضلع الأكبر فيه والزاوية الصغرى
تقابل الضلع الأصغر .

تدريب (٣) في الشكل (٧-٢) : استخدم أدوات القياس لإكمال ما يلي :



أ ب ج مثلث فيه :

أ ب = ... سم ،

أ ج = ... سم ،

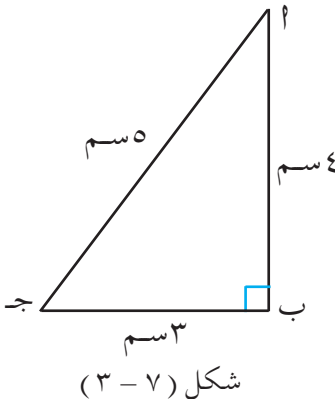
و (أ ب ج) = ... °

و (أ ج ب) = ... °

قارن .. ماذا تلاحظ ؟

إذا اختلف طولاً ضلعين في مثلث فأكبرهما تقابله زاوية أكبر من
التي تقابل الضلع الآخر .

مثال (٢)



ففي الشكل (٧ - ٣) :

أ ب ج مثلث فيه أ ب = ٤ سم ،

أ ج = ٥ سم ، ب ج = ٣ سم ،

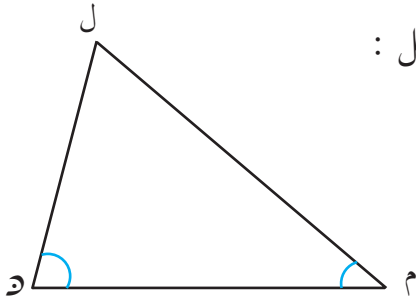
قارن بين زوايا المثلث .

الحل:

$$\therefore |ا ج| < |ا ب| < |ب ج|$$

$$\therefore \text{وه } (ا ب ج) < \text{وه } (ا ب ج) < \text{وه } (ا ب ج)$$

تدريب (٤)



شكل (٤ - ٧)

في الشكل (٧ - ٤) ، قس ثم أكمل :

$$\text{وه } (ا ل م) = \dots^\circ$$

$$\text{وه } (ا ل م) = \dots^\circ$$

$$ال م = \dots سم$$

$$ال د = \dots سم$$

قارن ، ماذا تلاحظ ؟

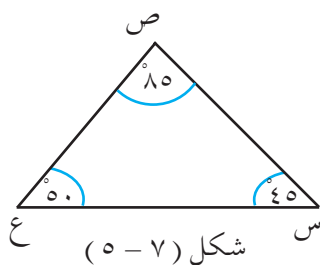
إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث ، فكبراهما تقابل ضلعاً أكبر من الضلع الذي تقابله الزاوية الأخرى .

تمارين ومسائل

[١] بيّن أيّ من الثلاثيات التالية يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث؟ واذكر السبب :

أ (٥ سم ، ٤ سم ، ١٠ سم) ، ب (٩ سم ، ٩ سم ، ٩ سم) ،

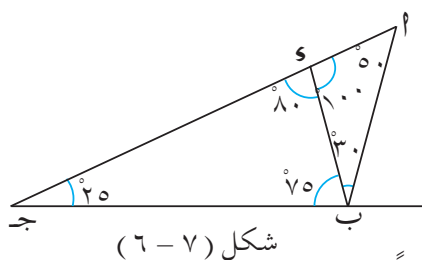
ج (٧ سم ، ٤ سم ، ٣ سم ، ٦ سم) ، د (٧ سم ، ٢ سم ، ٣ سم ، ٢ سم ، ٥ سم .



[٢] في الشكل (٧ - ٥) :

Δ س ص ع مثلث ، رتب أطوال

أضلاع المثلث تنازلياً .



[٣] في الشكل (٧ - ٦) :

١) رتب أطوال أضلاع Δ ا ب ج

تصاعدياً .

ب) رتب أطوال أضلاع Δ ا ب و تنازلياً .

ج) رتب أطوال أضلاع Δ و ب ج تصاعدياً .

[٤] ا ب ج مثلث فيه و (ا) > و (ب) > و (ج) قارن بين

أطوال أضلاعه .

[٥] أكمل ما يلي :

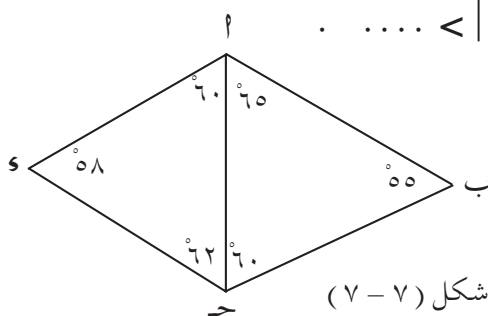
١) في المثلث ا ب ج : إذا كان $|ا ب| = ٧$ سم ، $|ب ج| = ٦$ سم فإن

$|ا ج| > \dots$ ، $|ا ج| < \dots$.

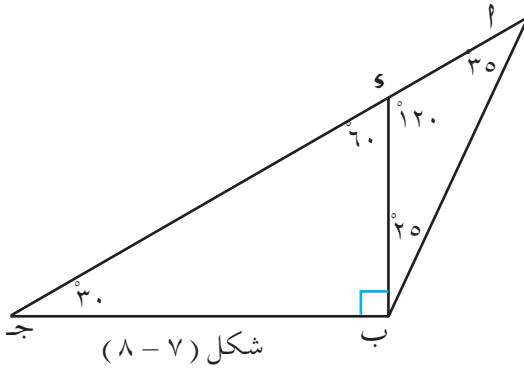
ب) في المثلث س ص ع : إذا كان $|س ص| = ١٠$ سم ، $|ص ع| = ٦$ سم

فإن $|س ع| > \dots$ ، $|س ع| < \dots$.

[٦] في الشكل (٧ - ٧) :



أي القطع الخمس أقصر طولاً ؟



شكل (٨ - ٧)

[٧] في الشكل (٨ - ٧) :

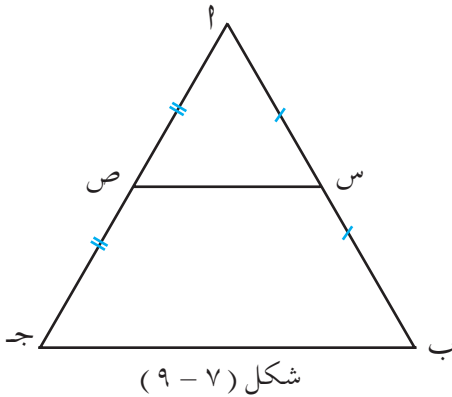
رتّب أطوال القطع الآتية
تصاعدياً ، مع ذكر السبب ؟
 $\overline{ب ج}$ ، $\overline{أ ج}$ ، $\overline{ب س}$ ، $\overline{ج س}$ ،
 $\overline{أ ج}$.

٧ : ٢ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفين ضلعين في مثلث

مبرهنة (٧ - ١) :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفين ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصف طوله .

المعطيات :



شكل (٩ - ٧)

١ ب ج مثلث ، النقطتان س ، ص
منتصفا ١ ب ، ١ ج على الترتيب
[انظر الشكل (٧ - ٩)] ،

المطلوب : إثبات أن :

أولاً : $\overline{س ص} \parallel \overline{ب ج}$

ثانياً : $|\overline{س ص}| = \frac{1}{2} |\overline{ب ج}|$

البرهان :

في $\Delta \Delta$ ١ س ص ، ١ ب ج

$$\frac{1}{2} = \frac{|اص|}{|اب|} = \frac{|اس|}{|اب|}$$

الزاوية \angle مشتركة

∴ المثلثان متشابهان ومن ذلك نستنتج أن :

$$\angle (ابج) = \angle (اسص) \text{ ، }$$

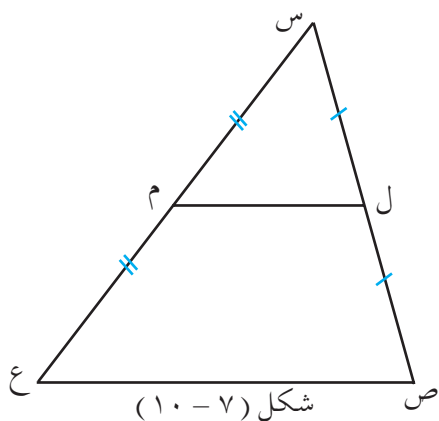
بما أنهما متناظرتان بالنسبة للمستقيمين $سص$ ، $بج$ ، والقاطع $اب$ ،

∴ $سص \parallel بج$ وهو المطلوب أولاً

ومن التشابه نستنتج أيضاً أن :

$$\frac{1}{2} = \frac{|اص|}{|اب|} = \frac{|صس|}{|بج|}$$

∴ $|صس| = \frac{1}{2} |بج|$ وهو المطلوب ثانياً .



مثال (١) في الشكل (٧-١٠) :

ل منتصف $سص$ ، م منتصف $سع$ ،
 $سم = ١٠$ ،
 فأوجد $|لم|$.

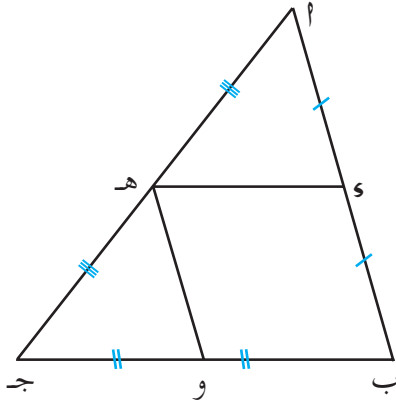
الحل :

∴ $لم$ واصل بين منتصفي الضلعين $سص$ ، $سع$ في المثلث $سصع$ ،

∴ $لم \parallel صع$ ويساوي نصفه (مبرهنة)

$$\therefore |لم| = \frac{1}{2} |صع| = \frac{1}{2} \times ١٠ = ٥$$

مثال (٢)



شكل (٧ - ١١)

في الشكل (٧ - ١١) :
 ا ب ج مثلث ، هـ ، و منتصفات
 الأضلاع مـب ، مـج ، هـو على الترتيب
 أثبت أن الشكل هـو ب متوازي أضلاع .

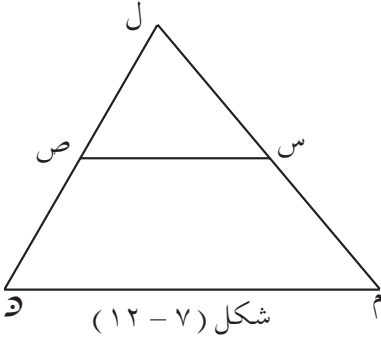
الحل :

∴ هـو واصل بين منتصفي الضلعين مـب ، ا ب ج في المثلث ا ب ج ،
 ∴ هـو // بـج (مبرهنة) ،
 ∴ هـو // بـو (١) ——— ،
 ∴ هـو واصل بين منتصفي الضلعين ا ب ج ، ب ج في المثلث ا ب ج .
 ∴ هـو // ا ب
 ∴ هـو // بـو (٢) ———
 من (١) ، (٢) نجد أن :
 الشكل هـو ب متوازي أضلاع .

نتيجة :

إذا رسم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلث موازياً ضلعاً آخر فيه
 فإنه ينصف الضلع الثالث .

تمارين ومسائل



[١] في الشكل (٧ - ١٢) :

س منتصف ل م ، ص منتصف ل د ،

أولاً: إذا كان $|م د| = ٦$ سم ، فأوجد

|س ص| ،

ثانياً: إذا كان |س ص| = ٦ سم ، فأوجد

|م د| ،

ثالثاً: إذا كان $و هـ$ (ل م د) $و هـ$ (ل س ص) .

[٢] س ص ع مثلث فيه و هـ ، و منتصفات الأضلاع س ص ، س ع ، ص ع

على الترتيب، فإذا كان $|و هـ| = ٤$ سم ، $|و هـ| = ٣$ سم ، $|و هـ| = ٥$ سم ،

احسب أطوال أضلاع المثلث س ص ع .

[٣] ا ب ج د مثلث ، و منتصف ا ب ، هـ منتصف ا ج ، و نقطة على ب ج ،

هـ و $ا ب \parallel$ ، أثبت أن :

أولاً : و ب و هـ متوازي أضلاع .

ثانياً : و منتصف ب ج .

[٤] ا ب ج د مثلث فيه النقاط م ، د ، و منتصفات الأضلاع على الترتيب

أثبت أن مساحة المثلث م د و $= \frac{1}{4}$ مساحة المثلث ا ب ج .

[٥] ا ب ج د شبه منحرف، فيه $ا ب \parallel ب ج$ ، نصف ا ب ، ا ج في س ، ص

على الترتيب، برهن على أن امتداد س ص ينصف و ج .

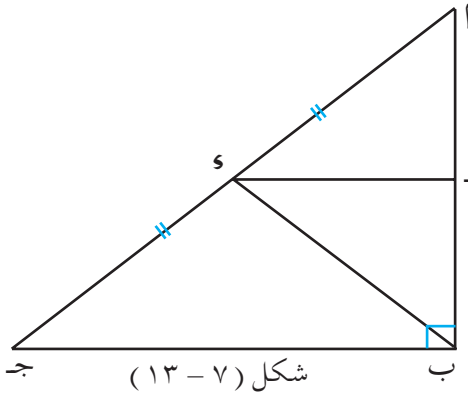


٧ : ٣ القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

مبرهنة (٧ - ٢) :

في المثلث القائم طول القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر
الوتر يساوي نصف طول الوتر .

المعطيات :



أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،

النقطة ه منتصف الوتر أ ج ،

[انظر الشكل (٧ - ١٣)] ،

المطلوب : إثبات أن :

$$|ب ه| = \frac{1}{2} |أ ج|$$

العمل : نرسم من ه قطعة مستقيمة توازي ج ب وتقطع أ ب في ه ،

البرهان :

$$|أ ه| = |ه ج| \quad (\text{معطى})$$

$$\overline{ه ه} \parallel \overline{ب ج} \quad (\text{عملاً})$$

$$\therefore \overline{ه ه} \perp \overline{أ ب} \text{ وينصفه}$$

$$\Delta \Delta \quad أ ه ه ، ب ه ه ، \text{ فيهما :}$$

$$|أ ه| = |ب ه| \quad (\text{نتيجة}) .$$

$\overline{ه ه}$ ضلع مشترك

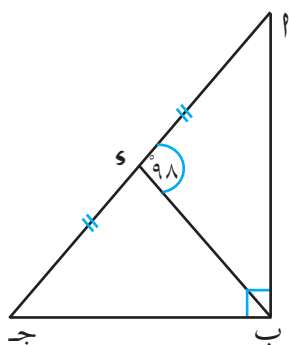
$$\sphericalangle ه أ ه = \sphericalangle ه ب ه \quad (\text{ضلع مشترك})$$

$\therefore \Delta AHS \cong \Delta BHS$ (ض ز ض) ، وينتج من تطابقهما أن :
 $|AS| = |BS|$

لكن $|AS| = \frac{1}{4} |AB|$ (معطى)

$\therefore |BS| = \frac{1}{4} |AB|$ وهو المطلوب .

مثال



شكل (٧ - ١٤)

في الشكل (٧ - ١٤) :
 $|AS| = |CS|$ ، قائمة ،
 $\angle ASB = 98^\circ$ ،
 أوجد $\angle ASB$.

الحل:

\overline{AS} واصله من رأس المثلث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر (معطى) .

$\therefore |AS| = \frac{1}{2} |AB|$ (مبرهنة)

ولكن $|AS| = \frac{1}{2} |AB|$ (معطى)
 $\therefore |AS| = |AS|$

$\therefore \Delta ASB$ متساوي الساقين .

$\therefore \angle ASB = \angle ASB$.

$\angle ASB = 98^\circ$ (معطى)

$$\therefore \text{و } (\angle \text{ب أ س}) + \text{و } (\angle \text{أ ب س}) = \angle \text{أ} = 98^\circ - 82^\circ = 16^\circ$$

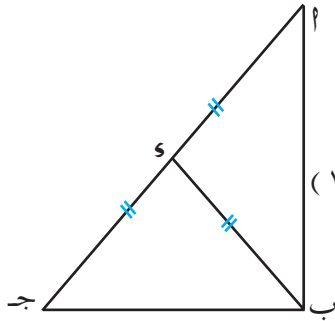
$$\therefore \text{و } (\angle \text{أ ب س}) = \frac{16^\circ}{2} = 8^\circ$$

تمارين ومسائل

[١] في الشكل (٧ - ١٥) :

أ ب ج مثلث ، و منتصف أ ج

$$\text{شكل (٧ - ١٥)} \quad | \text{أ ب} | = \frac{1}{2} | \text{أ ج} |$$



أثبت أن : و $(\angle \text{أ ب ج}) = 90^\circ$

[٢] ص ل ه مثلث قائم الزاوية في ل ، و $(\angle \text{ل ص ه}) = 35^\circ$ ، و منتصف

ص ه ، احسب و $(\angle \text{ص ل ه})$ ، و $(\angle \text{ل ه ه})$.

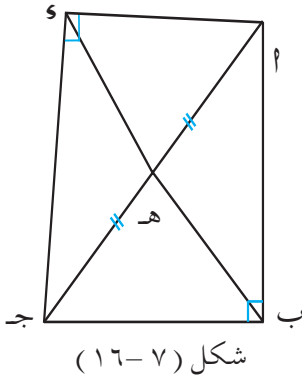
[٣] في الشكل (٧ - ١٦) :

$$\text{و } (\angle \text{ب}) = \text{و } (\angle \text{أ}) = 90^\circ$$

ه منتصف أ ج ،

أثبت أن :

$$| \text{أ ب} | = | \text{أ ه} |$$



شكل (٧ - ١٦)

[٤] أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في ب ، و منتصف أ ج ، و $(\angle \text{أ ب د}) = 80^\circ$ ،

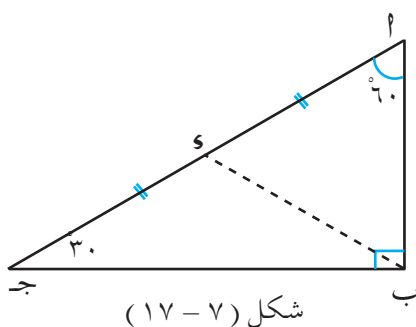
احسب : و $(\angle \text{أ})$ ، و $(\angle \text{ب د ج})$.

٧ : ٤ الضلع المقابل للزاوية ٣٠ في المثلث القائم

مبرهنة (٣ - ٧) :

في المثلث القائم ، طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوي نصف طول الوتر .

المعطيات :



أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،
فيه $\angle C = 60^\circ$ و $\angle A = 30^\circ$ ،
[انظر الشكل (٧ - ١٧)] .

المطلوب : إثبات أن :

$$|AB| = \frac{1}{2} |AC|$$

العمل : ننصف \overline{AB} في s ، ونرسم \overline{Bs} ،

البرهان : \overline{Bs} واصله من رأس القائمة إلى منتصف الوتر . (عملاً)

$$\therefore |Bs| = \frac{1}{2} |AB| \quad (\text{مبرهنة})$$

$$\therefore |Bs| = |Cs|$$

$$\therefore \angle C = 60^\circ \text{ و } \angle B = 30^\circ \quad (\text{لأن مجموع زوايا المثلث } = 180^\circ)$$

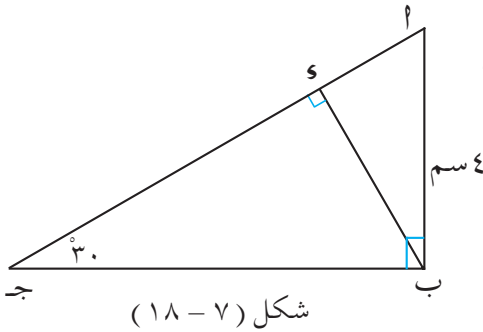
$$\therefore \angle C = 60^\circ \text{ و } \angle B = 30^\circ$$

\therefore المثلث ABs متساوي الأضلاع .

$$\therefore |AB| = |Bs| = |Cs| = \frac{1}{2} |AB| \quad \text{وهو المطلوب .}$$



مثال



Δ ا ب ج ، فيه \angle ب = 90° ،
 \angle ج = 30° ،
 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $|AB| = 4 \text{ سم}$.
 أوجد $|AD|$ ، $|BD|$.

الحل: في Δ ا ب ج

\angle ج = 30° ، \angle ا ب ج = 90° ،
 $\therefore \angle$ ب ا ج = 60°

في Δ ا ب د ، بما أن $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

\angle ب ا د = 60° ، \angle ا ب د = 90° ،
 $\therefore \angle$ د ا ب = 30°

$\therefore \overline{AD}$ يقابل الزاوية 30° في Δ ا ب د والقائم الزاوية في د ،

$$\therefore |AD| = |AB| \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ سم}$$

في Δ ا ب ج القائم الزاوية في ب ،
 \overline{AB} يقابل الزاوية 30°

$$\therefore |AB| = |BC| \times \frac{1}{2} \text{ ، } |BC| = 2 \times |AB|$$

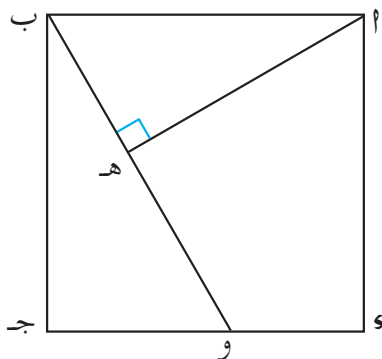
$$\therefore |BC| = 2 \times 4 = 8 \text{ سم}$$

$$\therefore |BD| = |BC| - |AD| = 8 - 2 = 6 \text{ سم وهو المطلوب .}$$

تمارين ومسائل

[١] Δ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، و $(\angle ج) = ٦٠^\circ$. $\overline{ب} \perp \overline{أ ج}$ ،

أثبت أن : محيط المثلث Δ ب ج = ضعف محيط المثلث Δ ب ج .



شكل (٧-١٩)

[٢] في الشكل (٧ - ١٩) :

Δ ب ج Δ مربع ، $\overline{أ ه} \perp \overline{ب و}$ ،

و $(\angle و ب ج) = ٣٠^\circ$ ،

$أ ب ه = ٦$ سم ،

احسب محيط المربع .

[٣] Δ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، و $(\angle أ ج ب) = ٣٠^\circ$ ، و منتصف

$\overline{أ ج}$. أثبت أن : المثلث Δ ب و متساوي أضلاع .

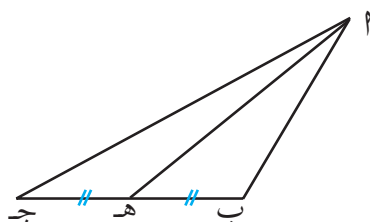
[٤] س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، $\overline{ع ل}$ تنصف $\angle س ع ص$ وتلاقي

$\overline{س ص}$ في ل ، و $(\angle ص س ع) = ٣٠^\circ$ ، أثبت أن :

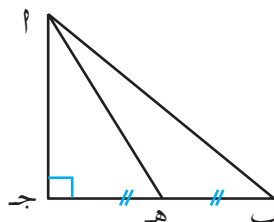
أولاً : $أ ل = ل ع$ ثانياً : $أ ل = ل ع = ل س$.

٧ : ٥ متوسطات المثلث

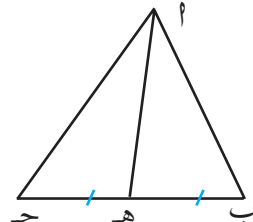
تأمل الأشكال (٧ - ٢٠ ، ب ، ج) :



شكل (٧-٢٠ ج)



شكل (٧-٢٠ ب)



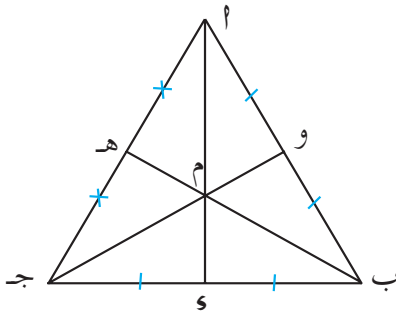
شكل (٧-٢٠ أ)

لدينا ثلاثة مثلثات الأول حاد الزوايا ، والثاني قائم الزاوية ، والثالث منفرج الزاوية ، القطعة المستقيمة $أه$ في كل منها تصل الرأس $أ$ بمنتصف الضلع المقابل (ب ج) ، تسمى القطعة $أه$ المتوسط .

تعريف :

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة التي تصل رأس المثلث بمنتصف الضلع المقابل لذلك الرأس .

نشاط



شكل (٧ - ٢١)

في الشكل (٧ - ٢١) : رسمت المتوسطات الثلاثة للمثلث $أ ب ج$ ،
سمّ هذه المتوسطات : ... ، ... ، ...
- ماذا تلاحظ على النقطة م ؟
- قس كلاً مما يلي ثم قارن :

(١) $|أم|$ ، $|س م|$ ، (٢) $|ب م|$ ، $|م هـ|$ ،

(٣) $|ج م|$ ، $|م و|$.

- أوجد : $|أم| : |س م| = : =$

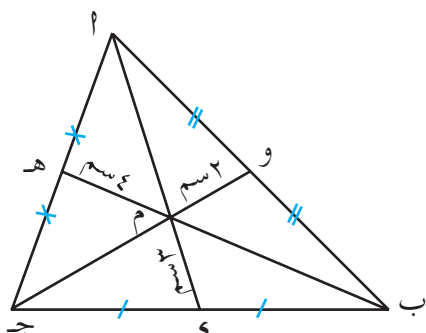
$|ب م| : |م هـ| = : =$

$|ج م| : |م و| = : =$

قارن النسب الثلاث .

$$\therefore \frac{|أم|}{|س م|} = \frac{|ب م|}{|م هـ|} = \frac{|ج م|}{|م و|} = \frac{2}{1}$$

القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة ، تقسم كلا منها من جهة رؤوس المثلث بنسبة ٢ : ١ .



شكل (٢٢ - ٧)

مثال (١) في الشكل (٧ - ٢٢) :

أ س ، ب هـ ، ج و متوسطات المثلث
 أ ب ج ، م نقطة تقاطع هذه المتوسطات ،
 $|م س| = ٣ سم$ ، $|م هـ| = ٤ سم$ ،
 $|م و| = ٢ سم$ ، احسب |م أ| ، |م ب| ، |م ج| .

الحل :

$$\frac{٢}{١} = \frac{|م أ|}{|م س|}$$

$$\therefore |م أ| = |م س| \times ٢ = ٣ \times ٢ = ٦ سم$$

$$\frac{٢}{١} = \frac{|م ب|}{|م هـ|}$$

$$\therefore |م ب| = |م هـ| \times ٢ = ٤ \times ٢ = ٨ سم$$

$$\frac{٢}{١} = \frac{|م ج|}{|م و|}$$

$$\therefore |م ج| = |م و| \times ٢ = ٢ \times ٢ = ٤ سم$$

مثال (٢)

أ ب ج مثلث فيه أ و قطعة متوسطة ، والنقطة م نقطة تقاطع المتوسطات ،



إذا كانا $\overline{م ه}$ ، $\overline{أ و}$ عمودين على $\overline{ب ج}$ ، أثبت أن : $|\overline{م ه}| = \frac{1}{3} |\overline{أ و}|$.

المعطيات : $\overline{أ و}$ متوسطة ، $م$ نقطة تلاقي القطع المتوسطة في $\Delta أ ب ج$
 $\overline{م ه} \perp \overline{ب ج}$ ، $\overline{أ و} \perp \overline{ب ج}$. انظر الشكل (٧ - ٢٣) .

المطلوب : إثبات أن : $|\overline{م ه}| = \frac{1}{3} |\overline{أ و}|$ ،

البرهان : $\Delta أ ه م$ ، $و ا$ ، $س$ فيهما :

$\sphericalangle ه (م ه س) = \sphericalangle ه (أ و س)$ قوائم
 $س$ مشترك .

\therefore المثلثان متشابهان ونستنتج أن :

$$\frac{|\overline{م ه}|}{|\overline{أ و}|} = \frac{|\overline{س م}|}{|\overline{س أ}|}$$

$$\text{لكن } \frac{1}{3} = \frac{|\overline{س م}|}{|\overline{س أ}|}$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{|\overline{م ه}|}{|\overline{أ و}|}$$

أي أن $|\overline{م ه}| = \frac{1}{3} |\overline{أ و}|$ وهو المطلوب .

تمارين ومسائل

[١] ارسم المثلث $أ ب ج$ الذي فيه $|\overline{أ ب}| = ٥ سم$ ، $|\overline{ب ج}| = ٦ سم$ ،

$|\overline{أ ج}| = ١٠ سم$ ، ثم ارسم القطع المتوسطة $\overline{أ و}$ ، $\overline{ب ه}$ ، $\overline{ج و}$.

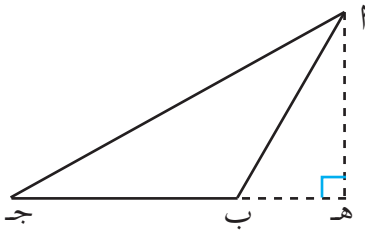
$م$ نقطة تقاطع المتوسطات، استخدم القياس للتأكد من صحة :

$$\frac{1}{2} = \frac{|م و|}{|ج م|} = \frac{|م هـ|}{|ب م|} = \frac{|م س|}{|أ م|}$$

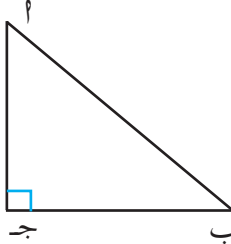
- [٢] س نقطة تقاطع $\overline{أ م}$ ، $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{ج و}$ متوسطات للمثلث $أ ب ج$ ،
 $|س أ| = |س م| = ٩$ سم ، $|ب س| = ١٢$ سم . أوجد : $|س أ|$ ، $|أ س|$ ، $|ب هـ|$.
- [٣] $أ ب ج$ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٩ سم ، $م$ ملتقى مستقيماته المتوسطة ، احسب طول كل من $\overline{أ م}$ ، $\overline{ب م}$ ، $\overline{ج م}$.

٧ : ٦ ارتفاعات المثلث

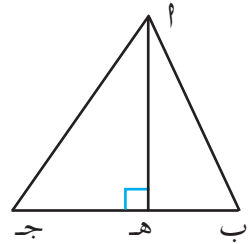
تأمل الأشكال (٧ - ٢٤ ، ب ، ج) :



شكل (٧ - ٢٤ ج)



شكل (٧ - ٢٤ ب)



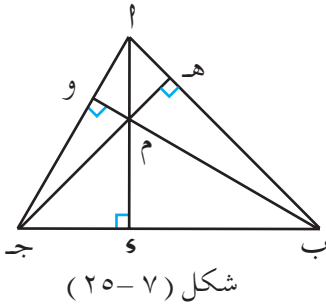
شكل (٧ - ٢٤ أ)

لدينا ثلاثة مثلثات الأول حاد الزوايا ، والثاني قائم الزاوية ، والثالث منفرج الزاوية ، القطع المستقيمة $أ هـ$ ، $أ ج$ تنزل من $أ$ عمودية على الضلع المقابل (ب ج) أو امتداده ، تسمى مثل القطع $أ هـ$ ، $أ ج$ ارتفاعات المثلث .

تعريف :

ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة تنزل من رأس المثلث عمودية على الضلع المقابل « أو امتداده » .

نشاط



(١) في الشكل (٢٥-٧) رسمت الارتفاعات الثلاثة للمثلث $\triangle ABC$ الحاد الزوايا ،
- سمِّ هذه الارتفاعات: ... ، ... ، ...

- ماذا تلاحظ على النقطة م ؟

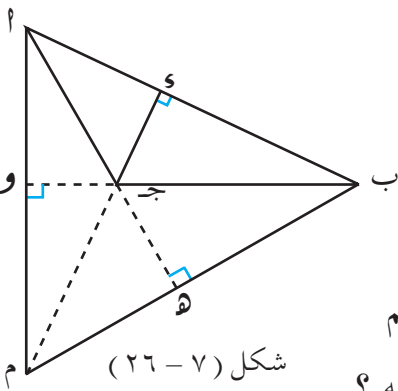
(٢) في الشكل (٢٦-٧) رسمت الارتفاعات الثلاثة للمثلث $\triangle ABC$ ب ج المنفرج الزاوية .

- سمِّ هذه الارتفاعات: ... ، ... ، ...

- ماذا تلاحظ عن النقطة م ؟

(٣) ارسم مثلثاً قائم الزاوية ، ثم ارسم

ارتفاعاته ، أين تقع نقطة تقاطع ارتفاعاته ؟



مبرهنة (٧-٤) :

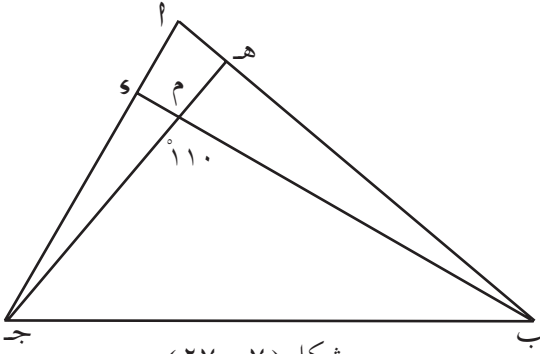
الارتفاعات النازلة من رؤوس المثلث على أضلاعه أو امتداداتها تتقاطع في نقطة واحدة .

مثال

$\triangle ABC$ مثلث فيه م نقطة تقاطع الارتفاعات ، $BE \perp AC$ ، $CF \perp AB$ ، $\angle A = 110^\circ$

أوجد قياس $\angle BCF$.

الحل:



شكل (٢٧-٧)

في الشكل (٢٧ - ٧) :

$$\overline{BE} \perp \overline{AC}$$

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ$$

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي شكل رباعي = 360°

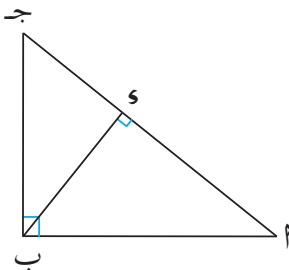
$$360^\circ = \angle BEC + \angle BEC + \angle BEC + \angle BEC$$

$$360^\circ = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$$

$$70^\circ = 290^\circ - 360^\circ = \angle BEC$$

$$\therefore \angle BEC = 70^\circ$$

تمارين ومسائل



شكل (٢٨-٧)

[١] في الشكل (٢٨ - ٧) :

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،

$$\overline{BE} \perp \overline{AC}$$

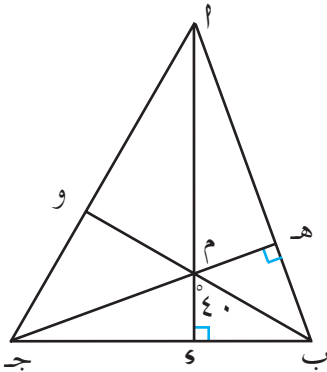
حدّد نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث .

[٢] اء ارتفاع للمثلث اء ب ج وينصف اء ، برهن أن Δ اء ب ج متساوي الساقين .

[٣] ارسم مثلث منفرج الزاوية، ثم ارسم ارتفاعاته الثلاثة، سمّ نقطة تقاطعها .

[٤] ارسم المثلث س ص ك فيه : $|س ص| = ٥$ سم ، $|ص ك| = ٤$ سم ،

و (ء س) = ١٢٥° ، ثم ارسم ارتفاعاته الثلاثة ، سمّ نقطة تقاطع الارتفاعات .



شكل (٧ - ٢٩)

[٥] في الشكل (٧ - ٢٩) :

اء ب ج مثلث ، $اء \perp ب ج$ ،

$ج ه \perp اء ب$ ، $اء \cap ج ه = م$ {

و (ء ب م) = ٤٠° ،

أوجد و (ء اء ج) .

[٦] في الشكل (٧ - ٣٠) :

اء ب ج مثلث متساوي الأضلاع ،

$اء$ ، $ب و$ ، $ج ه$ ارتفاعاته ،

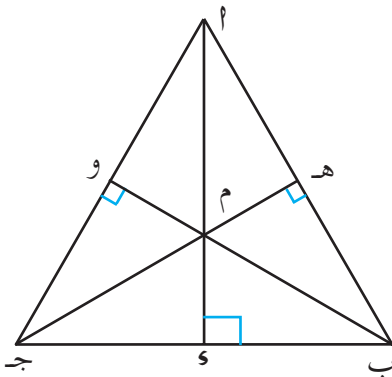
١- هل $اء$ ، $ب و$ ، $ج ه$ تلتقي في

نقطة واحدة ؟ ولماذا ؟

ب - ما أبعاد النقطة م كنقطة

تلاقي الارتفاعات عن رؤوس

المثلث ، وعن أضلاعه ؟



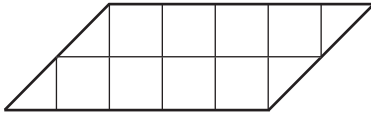
شكل (٧ - ٣٠)

٧ : ٧ تكافؤ المثلثات

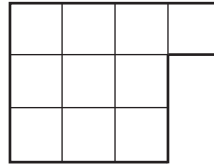
التكافؤ

نشاط (١)

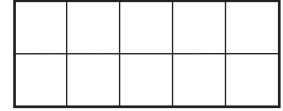
تأمل الأشكال (٧ - ٣١ ، ب ، ج) ادناه :



شكل (٧ - ٣١ ج)



شكل (٧ - ٣١ ب)



شكل (٧ - ٣١ أ)

- احسب مساحة الأشكال باستخدام المربع كوحدة للقياس .
- قارن مساحة هذه الأشكال ، ماذا تلاحظ ؟
- تلاحظ أن الأشكال تحوي العدد نفسه من الوحدات المربعة . أي أن هذه الأشكال متساوية في المساحة .
- في هذه الحالة نقول إن الأشكال متكافئة .

تعريف :

يكون الشكلان م ، م٢ متكافئين إذا كانا متساويين في المساحة ، ونكتب ذلك رمزياً : الشكل م \equiv الشكل م٢ .



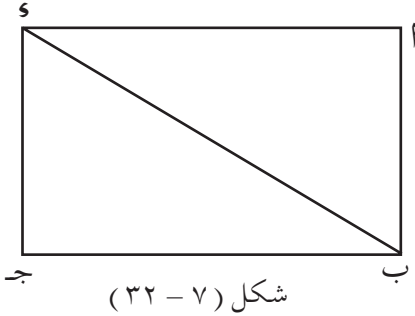
تكافؤ المثلثات :

عرفت بأن الشكلين المتساويين في المساحة يكونان متكافئين ، والآن نتعرف على بعض الخصائص المتعلقة بتكافؤ المثلثات .

كل مثلثين متطابقين متكافئان

بديهية

مثال (١)



في الشكل (٧ - ٣٢) Δ ب ج س
مستطيل ، يبين أن Δ ب س ج ، و Δ ج ب س
متكافئان .

الحل :

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ب س ج} = \frac{1}{2} \times |س ب| \times |س ج|$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ج ب س} = \frac{1}{2} \times |ج ب| \times |ج س|$$

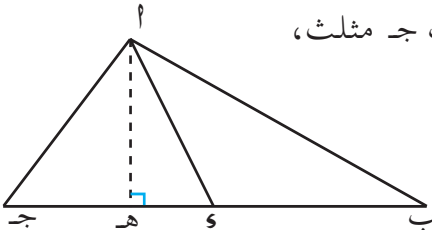
\therefore Δ ب ج س مستطيل

$$\therefore |س ب| = |ج ب| , |س ج| = |ج س|$$

$$\therefore \Delta \text{ ب س ج} \equiv \Delta \text{ ج ب س} .$$

مثال (٢)

في الشكل (٧ - ٣٣) Δ ب ج س مثلث ،



و منتصف $\overline{ج س}$ ، $|ه ج| = |ه س|$ ،

$\overline{پ ه} \perp \overline{ج س}$ ، $|پ ه| = |ه ج|$ ،

بين أن المثلثين Δ ب س ه ، Δ ج ه س متكافئان .

شكل (٧ - ٣٣)

الحل:

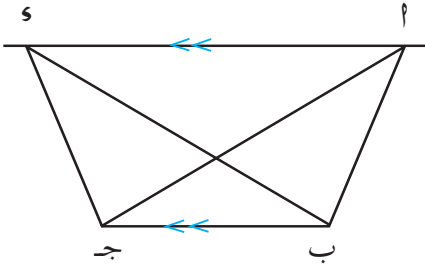
$$\text{مساحة المثلث أ ب س} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \text{ سم}^2 .$$

$$\text{مساحة المثلث س ج د} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \text{ سم}^2 .$$

$$\therefore \Delta \text{ أ ب س} \equiv \Delta \text{ س ج د} \text{ وهو المطلوب .}$$

المثلثات المتحدة في القاعدة :

نشاط



شكل (٧ - ٣٤)

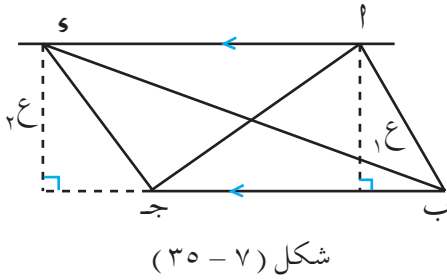
– ارسم مثلثين أ ب ج ، و ب ج د متحدين في القاعدة ويقع رأسهما على مستقيم يوازي القاعدة كما في الشكل (٧ - ٣٤) .

- قارن مساحة Δ أ ب ج بمساحة Δ و ب ج د ، ماذا تلاحظ ؟
- قارن ملاحظاتك مع ملاحظات زملائك في الفصل .

مبرهنة (٧ - ٥) :

إذا اتحد مثلثان في القاعدة وكان رأسهما على مستقيم يوازي القاعدة فإن المثلثين متكافئان .

المعطيات : أ ب ج د ، و ب ج د مثلثان متحdan في القاعدة ب ج د ،
 $\overline{س أ} \parallel \overline{ب ج د}$ [انظر الشكل (٧ - ٣٥)] .



المطلوب: إثبات أن

$$\Delta ABE \equiv \Delta CDE \text{ و } B \text{ ج}$$

العمل: نرسم ارتفاع المثلث ABE وارتفاع المثلث CDE ، وليكن h_1 ، وارتفاع المثلث و B ج وليكن h_2 ،

البرهان :

$$\text{مساحة } \Delta ABE = \frac{1}{2} \times AB \times h_1$$

$$\text{مساحة } \Delta CDE = \frac{1}{2} \times CD \times h_2$$

ولكن $h_1 = h_2$ لأنهما يقعان بين مستقيمين متوازيين ($AB \parallel CD$)

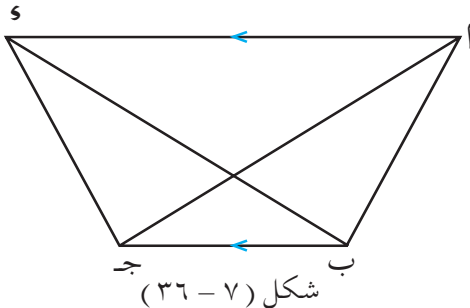
$$\therefore \frac{1}{2} \times AB \times h_1 = \frac{1}{2} \times CD \times h_2$$

\therefore مساحة المثلث ABE = مساحة المثلث CDE و B ج

أي أن $\Delta ABE \equiv \Delta CDE$ و B ج وهو المطلوب .

نتيجة (١) :

المثلثات التي قواعدها متساوية وارتفاعاتها متساوية متكافئة



مثال (٣)

في الشكل (٧ - ٣٦) ABE و CDE

شبه منحرف ، فيه $AB \parallel CD$ ،

بين أن $\Delta ABE \equiv \Delta CDE$ و B ج .

$\Delta \Delta$ ا ب ج ، و ب ج فيهما :

ب ج قاعدة مشتركة ، ا ، و يقعان على $\overline{ا و}$ ،

$\overline{ا و} \parallel \overline{ب ج}$

$\therefore \Delta \Delta$ ا ب ج \equiv و ب ج Δ (مبرهنة) وهو المطلوب .

مبرهنة (٧ - ٦) :

متوسط المثلث يقسمه إلى مثلثين متكافئين

المعطيات : ا ب ج مثلث فيه $\overline{ا و}$ متوسط ،

[انظر الشكل (٧ - ٣٧)] .

المطلوب : إثبات أن

$\Delta \Delta$ ا ب و \equiv و ب ج Δ .

العمل : ارسم ارتفاع المثلث ا ب ج

وليكن $\overline{ا هـ}$.

البرهان :

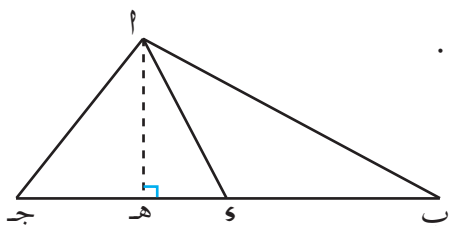
مساحة المثلث ا ب و = $\frac{1}{2} \times |ا هـ| \times |ب و|$ ،

مساحة المثلث ا و ج = $\frac{1}{2} \times |ا هـ| \times |و ج|$ ،

ولكن $|ب و| = |و ج|$ ($\overline{ا و}$ متوسط في المثلث ا ب ج)

\therefore مساحة Δ ا ب و = مساحة Δ ا و ج

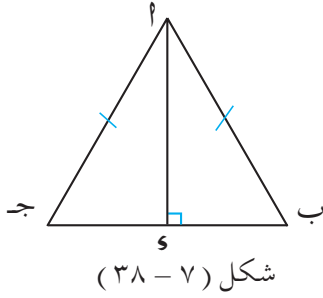
$\Delta \Delta$ ا ب و \equiv و ب ج Δ وهو المطلوب .



شكل (٧ - ٣٧)



مثال (٤)

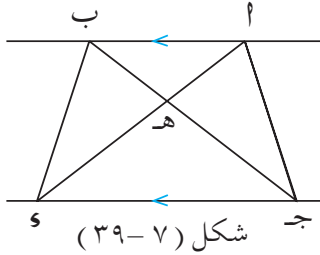


في الشكل (٣٨ - ٧) Δ ب ج
مثلث متساوي الساقين ، فيه $\overline{PJ} = \overline{PS}$ ،
 $\overline{JS} \perp \overline{PS}$ ،
بيّن أن Δ ب ج $\equiv \Delta$ ج س .

الحل:

∴ العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين إلى القاعدة هو متوسط ،
∴ Δ ب ج $\equiv \Delta$ ج س (مبرهنة) .

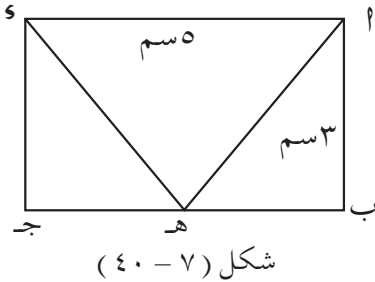
تمارين ومسائل



[١] في الشكل (٣٩ - ٧) :

$$\overline{PJ} \parallel \overline{PS}$$

أوجد ثلاثة أزواج من المثلثات
المتكافئة .



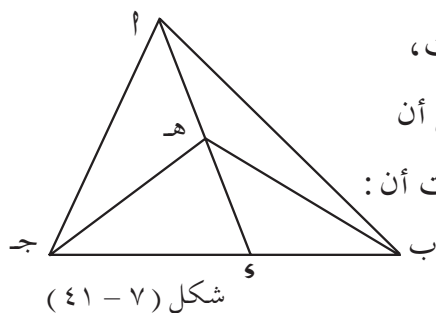
[٢] في الشكل (٤٠ - ٧) :

$$|PH| = |SH|$$

$$|JH| = |GH|$$

١- أوجد مساحة Δ ب ه س .

ب - إذا كان Δ ب ه $\equiv \Delta$ ج ه أوجد مساحة كل منهما .



[٣] في الشكل (٧ - ٤١) Δ ب ج مثلث ،

\overline{AS} ومتوسط ، ه نقطة على \overline{AB} . بَيِّنْ أن

Δ ب ه س \equiv Δ ه ج ، ومنها أثبت أن :

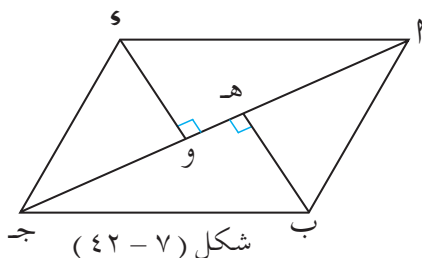
Δ ب ه س \equiv Δ ج ه .

[٤] في الشكل (٧ - ٤٢) : Δ ب ج س

متوازي اضلاع ، $\overline{BH} \perp \overline{AJ}$ ،

$\overline{SO} \perp \overline{AJ}$.

أثبت أن : $|BH| = |SO|$.



[٥] في الشكل (٧ - ٤٣) :

Δ ب ج مثلث ، $\overline{BJ} \parallel \overline{SO}$ ،

أثبت أن Δ ه ب س \equiv Δ ه ج ، ومن ذلك

أثبت أن Δ ب ه س \equiv Δ ج ه س

[٦] في الشكل (٧ - ٤٤) :

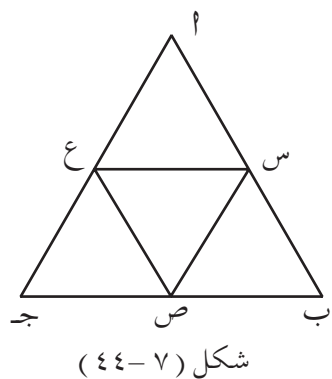
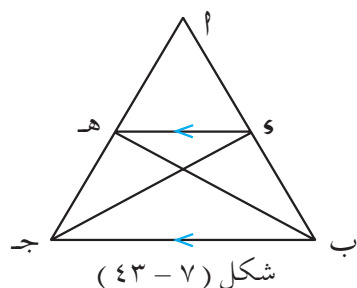
Δ ب ج مثلث متساوي الأضلاع ،

النقاط س ، ص ، ع منتصفات

الأضلاع \overline{AB} ، \overline{BJ} ، \overline{AJ} على

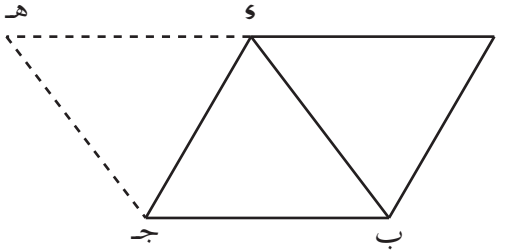
الترتيب . أثبت أن :

Δ ب ج ه \equiv Δ س ص ع .



٨ : ٧ تكافؤ متوازي الأضلاع

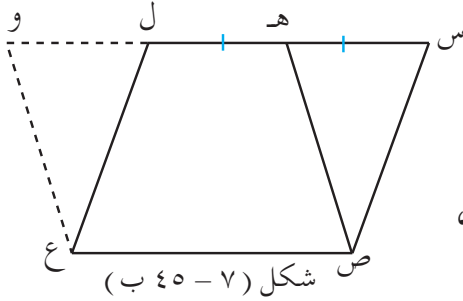
نشاط



شكل (٧ - ١٤٥)

- ارسم متوازي أضلاع ABCD .
- ارسم القطر AC .
- ارسم متوازي الأضلاع EBCF .
- كما في الشكل (٧ - ١٤٥) .

- قارن مساحة متوازي الأضلاع ABCD ومساحة متوازي الأضلاع EBCF . ماذا تلاحظ ؟



شكل (٧ - ٤٥) ب

- ارسم متوازي أضلاع آخر EFGH .
- ارسم النقطة H منتصف الضلع EF .
- ارسم متوازي الأضلاع EFGH .
- كما في الشكل (٧ - ٤٥) ب .

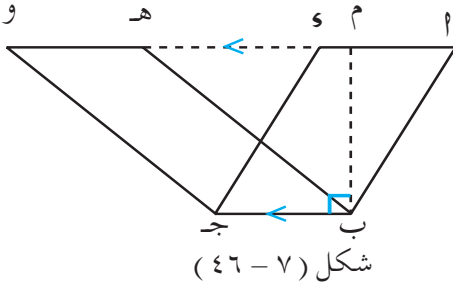
- قارن بين مساحتي متوازي الأضلاع ABCD و EFGH ، ومتوازي الأضلاع EFGH و EBCF . ماذا تلاحظ ؟ قارن ملاحظتك مع ملاحظات زملائك ، من ذلك نستنتج أن :

مبرهنة (٧ - ٧) :

متوازي الأضلاع المشتركان في القاعدة ورؤوسهما على مستقيم يوازي القاعدة متكافئان .

المعطيات : ABCD ، EBCF متوازي أضلاع ، BC قاعدة تهما المشتركة ،
 $AD \parallel BC$.

المطلوب: إثبات أن :



$$\square \text{ ا ب ج د } \equiv \square \text{ ه ب ج و }.$$

العمل : نقيم من النقطة ب عموداً

على $\overline{ب ج د}$ ليلاقي $\overline{أ و}$ في م .

البرهان : $\overline{أ و} \parallel \overline{ب ج}$

∴ متوازي الأضلاع ا ب ج د ، ه ب ج و لهما الارتفاع نفسه $\overline{ب م}$

مساحة $\square \text{ ا ب ج د } = \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع} = |\text{ب ج}| \times |\text{ب م}|$

وكذلك مساحة $\square \text{ ه ب ج و } = \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع} = |\text{ب ج}| \times |\text{ب م}|$

∴ $\square \text{ ا ب ج د } \equiv \square \text{ ه ب ج و}$ وهو المطلوب .

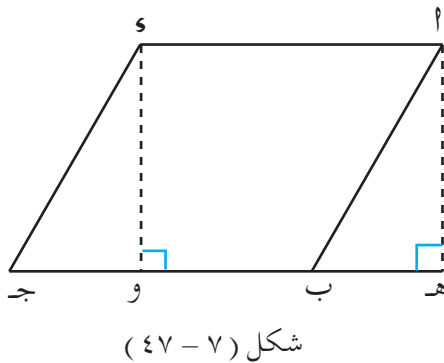
نتيجة (١) :

متوازي الأضلاع المتساويان في القاعدة والارتفاع متكافئان .

نتيجة (٢) :

المستطيل يكافئ متوازي الأضلاع المتحد معه في القاعدة والارتفاع .

مثال (١)



ا ب ج د متوازي أضلاع مساحته

$٢٠ \text{ سم}^٢$ ، انزل العمودين $\overline{أ ه}$ ، $\overline{و ه}$

على الضلع ب ج، أوجد مساحة

المستطيل ا ه و س .

[انظر الشكل (٧-٤٧)] .



الحل: $\therefore \overline{ا} \cong \overline{ب} ج$ (خواص متوازي الأضلاع)

وكذلك $\overline{ا} \cong \overline{هـ} و$ (طولاً المستطيل ا هـ و)

$\therefore \overline{ب} ج \cong \overline{هـ} و$

$\therefore \square ا ب ج هـ$ ، ا هـ و لهما : ا قاعدة مشتركة ا هـ ارتفاع مشترك

$\therefore \square ا ب ج هـ \equiv \square ا هـ و$.

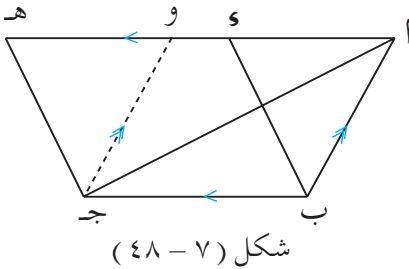
\therefore مساحة $\square ا هـ و = ٢٠ سم^٢$ وهو المطلوب .

مبرهنة (٧ - ٨) :

إذا اتحد مثلث ومتوازي أضلاع في القاعدة وكانا محصورين بين القاعدة ومستقيم يوازيها ، فإن المثلث يكافئ نصف متوازي الأضلاع .

المعطيات: $\triangle ا ب ج$ ، $\square و ب ج هـ$ متحدان في القاعدة ب ج ، ومحصوران بين القطعتين ا هـ ، ب ج [انظر الشكل (٧ - ٤٨)] .

المطلوب: إثبات أن :



$$\triangle ا ب ج \equiv \frac{1}{2} \square و ب ج هـ$$

العمل: من النقطة ج نرسم $\overline{ج و}$

يقطع ا هـ في النقطة و ويوازي ا ب .

البرهان: $\square ا ب ج و \equiv \square و ب ج هـ$ (لماذا؟)

ولكن مساحة $\triangle ا ب ج = \frac{1}{2}$ مساحة $\square ا ب ج و$ (ا ج قطر

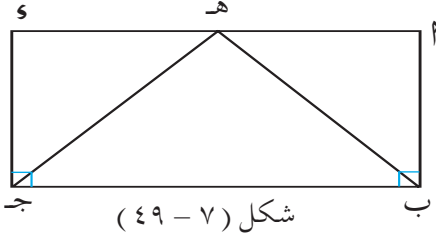
يقسم $\square ا ب ج و$ إلى مثلثين متطابقين)

\therefore مساحة $\triangle ا ب ج = \frac{1}{2}$ مساحة $\square و ب ج هـ$

أي أن $\triangle ا ب ج \equiv \frac{1}{2} \square و ب ج هـ$ وهو المطلوب .

نتيجة (١) :

إذا اتحد مثلث ومستطيل في القاعدة وكانا محصورين بين القاعدة ومستقيم يوازيها فإن المثلث يكافئ نصف المستطيل .



شكل (٧-٤٩)

مثال (٢) في الشكل (٧-٤٩) :

مساحة المثلث هـ ب جـ = ١٠ سم^٢

أوجد مساحة المستطيل أ ب جـ و .

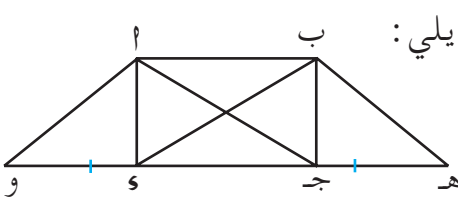
الحل :

المثلث هـ ب جـ ، والمستطيل أ ب جـ و متحdan في القاعدة والارتفاع

$$\therefore \Delta \text{ هـ ب جـ} \equiv \square \text{ أ ب جـ و} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{مساحة } \square \text{ أ ب جـ و} = 10 \times 2 = 20 \text{ سم}^2 .$$

تمارين ومسائل



شكل (٧-٥٠)

[١] مستعيناً بالشكل (٧-٥٠) اذكر ما يلي :

أ (متوازيات الأضلاع التي تكافئ

المستطيل أ ب جـ و .

ب (المثلثات التي تكافئ المثلث أ ب جـ .

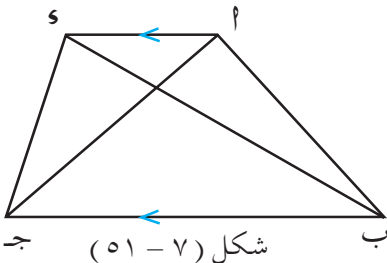
[٢] في الشكل (٧-٥١) : أ ب جـ و

شبه منحرف .

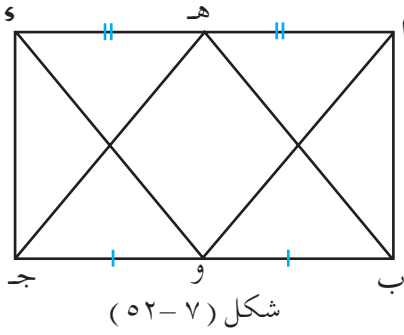
أ) أوجد زوجين من المثلثات المتكافئة .

ب) هل المثلثان و ب جـ ، و ب جـ

متكافئان ؟ علل ذلك .



شكل (٧-٥١)



[٣] في الشكل (٥٢-٧) : أ ب ج د

مستطيل ، النقطة هـ منتصف \overline{AC} ،
النقطة و منتصف \overline{BD} ، أوجد
الآتي مع ذكر السبب :

١) مثلثا يكافئ المثلث هـ ب ج د .

ب) مثلثا يكافئ المثلث أ ب هـ .

ج) متوازي أضلاع متكافئين .

[٤] في الشكل (٥٣-٧) : أ ب ج د

متوازي أضلاع ، أ هـ و ج مستطيل
بيّن أن :

$\square \text{ أ ب ج د } \equiv \square \text{ أ هـ و ج }$

[٥] أثبت أن قطري المربع يقسمانه إلى أربعة مثلثات متكافئة .

٧ : ٩ تمارين ومسائل عامة

[١] بيّن أيّاً من ثلاثيات الأعداد الآتية يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث

مع ذكر السبب ؟

أ) ١٥ سم ، ١٠ سم ، ١٢ سم . ب) ١٨ سم ، ٨ سم ، ٩ سم .

ج) ٢٠ سم ، ١٠ سم ، ١٠ سم . د) ٣ سم ، ٦ سم ، ٥ سم ، ٨ سم ، ٣ سم ، ٧ سم .

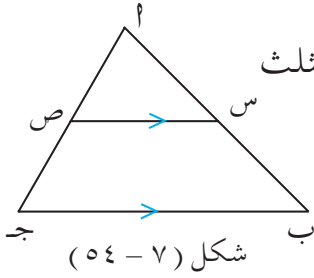
هـ) ١٥ سم ، ٢ سم ، ٤ سم ، ٢ سم ، ٧ سم .

[٢] $\triangle \text{ أ ب ج }$ فيه أ ب = ١٢ سم ، ب ج = ١٥ سم ، أ ج = ١٠ سم ،

رتب قياسات زوايا المثلث تنازلياً .

[٣] اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

أولاً : في الشكل (٥٤-٧) إذا كان محيط المثلث

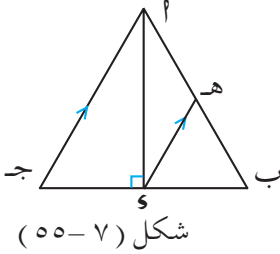


١ ب ج = ٣٤ سم ، ص منتصف $\overline{أ ج}$ ،
 $\overline{س ص} \parallel \overline{ب ج}$ ، $|أ ب| = ١٢$ سم ،
 $|أ ص| = ٤$ سم ، فإن $|س ص| =$

(١) ٦ سم (٢) ٧ سم (٣) ٨ سم (٤) ١٥ سم .

ثانياً : في الشكل (٥٥-٧) : إذا كان المثلث ١ ب ج متطابق

الضلعين ١ ب ، ١ ج ، $\overline{أ و} \perp \overline{ب ج}$ ، $\overline{أ و} \parallel \overline{هـ و}$ ،

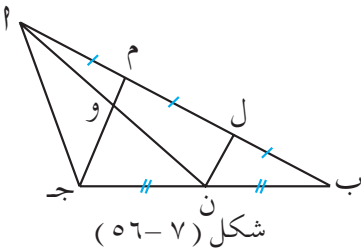


$|أ و| = ٣$ سم ، $|أ و ج| = ٤$ سم
 فإن $|أ هـ| =$

(١) ٥ ، ٢ سم (٢) ٣ سم

(٣) ٤ سم (٤) ٥ سم .

ثالثاً : في الشكل (٥٦-٧) : إذا كان ١ ب ج مثلث ، $|أ م| = |م ل| = |ل ب|$ ،



$|ب ن| = |ن ج|$ ، $|م ج| = ١٢$ سم ،
 فإن $|م و| =$

(١) ٣ سم (٢) ٤ سم

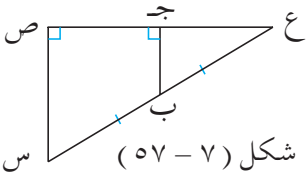
(٣) ٦ سم (٤) ٨ سم .

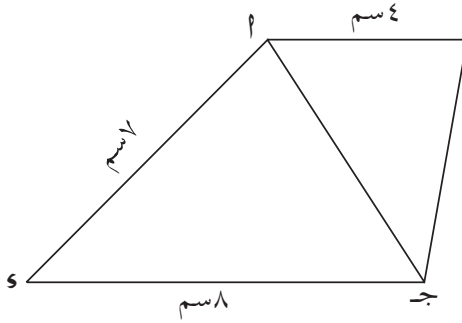
[٤] في الشكل (٥٧-٧) : س ص ع مثلث

قائم الزاوية في ص ، ب منتصف $\overline{س ع}$ ،

$\overline{ب ج} \perp \overline{ص ع}$ ،

أثبت أن : $|أ ج| = |أ ع|$.





شكل (٥٨ - ٧)

[٥] في الشكل (٥٨ - ٧) : ب

أ ب ج د شكل رباعي فيه

$$|أ ب| = ٤ \text{ سم} ، |أ ج| = ٥ \text{ سم} ،$$

$$|ج د| = ٨ \text{ سم} ، |د أ| = ٧ \text{ سم} ،$$

أثبت أن :

$$\angle (أ ب د) < \angle (ب ج د) .$$

[٦] Δ س ص ع قائم الزاوية في ص ، ل منتصف س ع ، $\angle (ص ل ع) = ٨٠^\circ$ ،

أوجد \angle س ص ع ، \angle ص س ع .

[٧] Δ أ ب ج ، فيه $|أ ب| = |أ ج| = ٤٥ \text{ سم}$ ، $\angle (أ ب ج) = ٣٠^\circ$ ،

و منتصف ب ج ، أوجد طول أ د .

[٨] أ ب ج مثلث فيه $\overline{أ ج} < \overline{أ ب}$ ، رسم د ه مواز ب ج وملاقٍ أ ب

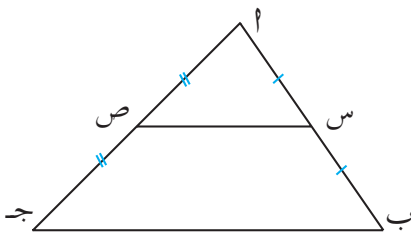
في د ، $\overline{أ ج}$ في ه ، أثبت أن : $\overline{أ د} > \overline{أ ه}$.

[٩] في الشكل (٥٩ - ٧) أ ب ج مثلث فيه $\overline{أ ج} < \overline{أ ب}$ ، س منتصف

أ ب ، ص منتصف أ ج

برهن أن :

$$\angle (أ س ص) < \angle (أ ص س) .$$

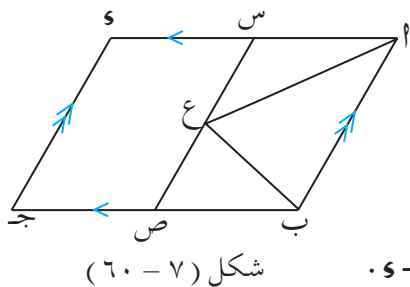


شكل (٥٩ - ٧)

[١٠] Δ س ص ع فيه $\angle (ص) = ٥٠^\circ$ ، أسقط من س العمود س ل بحيث

لاقى امتداد ع ص في ل ، وأسقط ل و \perp س ص فإذا كان $|س ل| = ٨ \text{ سم}$.

أوجد طول كل من س ص ، س و .

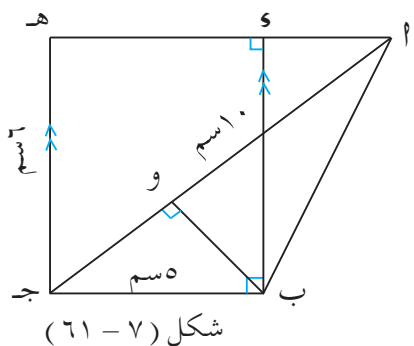


[١١] في الشكل (٦٠ - ٧) Δ ب ج د و

متوازي أضلاع ، س منتصف \overline{AD} ،

ص منتصف \overline{BD} ، ع نقطة على \overline{SE} ،

أثبت أن Δ ب ج د ع $\equiv \frac{1}{4}$ \square ب ج د و .



[١٢] في الشكل (٦١ - ٧) :

Δ ب ج د مثلث فيه $\overline{SO} \perp \overline{AD}$ ، $\overline{SO} = \frac{1}{2} \overline{AD}$ ،

$\overline{AB} = \overline{CD} = 5$ سم ، $\overline{BC} = \overline{AD} = 10$ سم ،

فيه ج د هـ = 6 سم . احسب طول \overline{BO} .

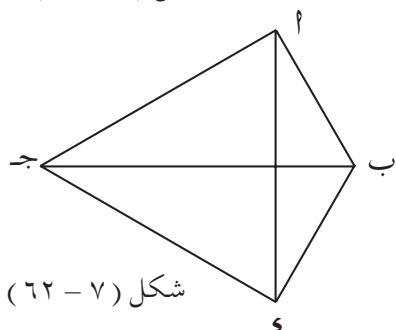
[١٣] في الشكل (٦٢ - ٧) :

$\Delta \Delta$ ب ج د ، ب ج د و مشتركان

في القاعدة \overline{BD} ، إذا علمت أن

المثلث Δ ب ج د يكافئ المثلث ب ج د و

أثبت أن الضلع ب ج ينصف \overline{AD} .

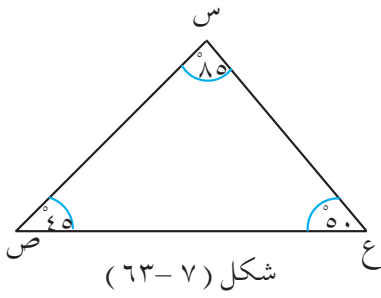


٧ : ١٠ اختبار الوحدة

[١] حدّد فيما يلي إن كانت القطع المستقيمة ، يمكن أن تشكل أضلاع

مثلث أم لا :

(أ) ٥٢ سم ، ٢٠ سم ، ٤٨ سم . (ب) ٥ سم ، ٤ سم ، ٩ سم ، ٤ سم .



[٢] في الشكل (٦٣-٧) س ص ع

مثلث فيه و ه (س) = ٨٥°،

و ه (ص) = ٤٥°، و ه (ع) = ٥٠°،

رتب أطوال أضلاع المثلث تنازلياً .

[٣] ارسم المثلث ا ب ج فيه |ا ب| = |ا ج| = ٥ سم ، و ه (ا) = ٩٠°، ثم

ارسم ارتفاعاته الثلاثة ، أين ستكون نقطة التقاء الارتفاعات ؟

[٤] ارسم المثلث ا ب ج فيه |ا ب| = |ا ج| = ٤ سم ، |ب ج| = ٣ سم ،

ثم ارسم متوسطاته .

[٥] ا ب ج مثلث فيه |ا ب| = |ا ج| ، و منتصف ا ب ، ه منتصف ب ج

أثبت أن المثلث و ب ه متساوي الساقين .

[٦] س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، و ه (ص س ع) = ٥٠° ، ه منتصف

س ع ، احسب و ه (س ص ه) .

[٧] متوسط رأس المثلث المتساوي الساقين إلى القاعدة يقسمه إلى مثلثين .

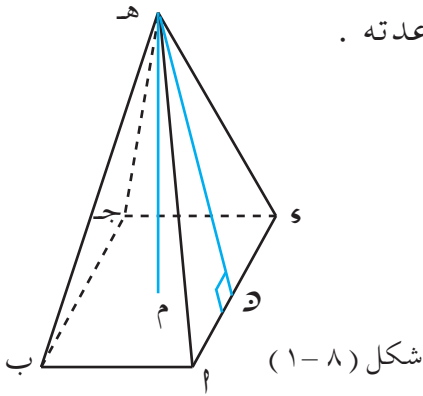
١) متطابقين ب) متكافئين ج) متكافئين ومتطابقين .

[٨] تكافؤ شكلين يعني :

١) التساوي في المحيط ب) التساوي في المساحة ج) التطابق .

٨ : ١ الهرم

تعرفت من قبل على الهرم القائم ، وأن أوجهه عبارة عن مثلثات متطابقة ، عدد هذه المثلثات هو نفسه عدد أضلاع قاعدته .



في الشكل (٨ - ١) : ترى هرمًا رباعياً قائماً ؛ قاعدته المربع ا ب ج د ، وأوجهه المثلثات ه ا ب ، ه ا د ، ه ب د ، ه ج د . وارتفاعه ه م . أما ارتفاعه الجانبي فهو ه ن .

تلاحظ أن $\overline{ه م}$ عمودية على قاعدة الهرم . أما $\overline{ه ن} \perp \overline{س ا}$.

تذكر :

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة \times الارتفاع .

مساحة الهرم الجانبية = مجموع مساحات أوجهه الجانبية .

مساحة الهرم الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة .

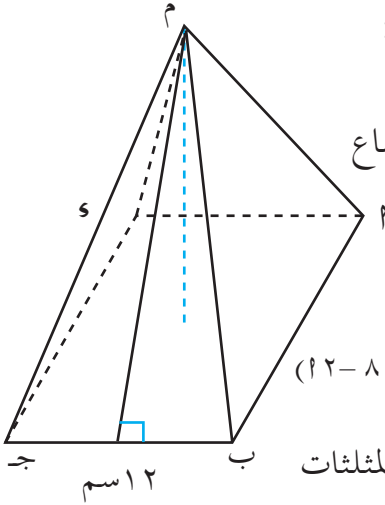
مثال

م ا ب ج د هرم رباعي قاعدته مربع طول ضلع القاعدة ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم ، وارتفاعه الجانبي ١٠ سم ، أوجد :

(١) حجم الهرم (٢) مساحة الهرم الجانبية (٣) مساحة الهرم الكلية .

الحل:

[انظر الشكل (٨ - ٢)] :



شكل (٨ - ٢)

(١) حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة \times الارتفاع

$$٨ \times (١٢ \times ١٢) \times \frac{1}{3} =$$

$$= ٣٨٤ \text{ سم}^٣$$

(٢) مساحة الهرم الجانبية = مجموع مساحات المثلثات

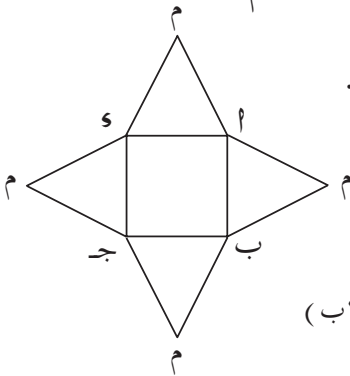
(أوجهه) [انظر الشكل (٨ - ٢)] .

مساحة الوجه الواحد = $\frac{1}{2}$ طول ضلع قاعدة الهرم \times الارتفاع الجانبي

$$= \frac{1}{2} \times ١٢ \times ١٠ = ٦٠ \text{ سم}^٢$$

مساحة الهرم الجانبية = مساحة أربعة مثلثات .

$$= ٦٠ \times ٤ = ٢٤٠ \text{ سم}^٢$$



شكل (٨ - ٢)

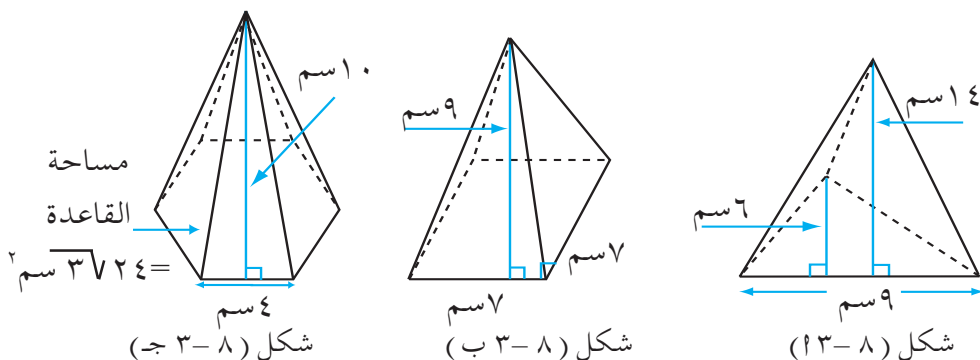
(٣) مساحة الهرم الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= ١٢ \times ١٢ = ١٤٤ \text{ سم}^٢$$

$$= ١٤٤ + ٢٤٠ = ٣٨٤ \text{ سم}^٢$$

تمارين ومسائل

[١] أوجد المساحتين الجانبية والكلية للأشكال (٨ - ١٣ ، ب ، ج) :



[٢] م ١ ب ج و هرم رباعي قاعدته مربع طول ضلعه ٣٠ سم وارتفاعه ٨ سم وارتفاعه الجانبي ١٠ سم . أوجد :

١) حجم الهرم

ب) مساحة الهرم الكلية .

[٣] ارتفاع أكبر أهرامات مصر ١٥٠ م وطول ضلع قاعدته المربعة ٢٥٠ م . أوجد حجم الهرم .

[٤] هرم ثلاثي قاعدته مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ١٠ سم وارتفاعه $5\sqrt{3}$ سم وارتفاع الهرم الجانبي ١٣ سم ، أوجد :

١) مساحة الهرم الجانبية

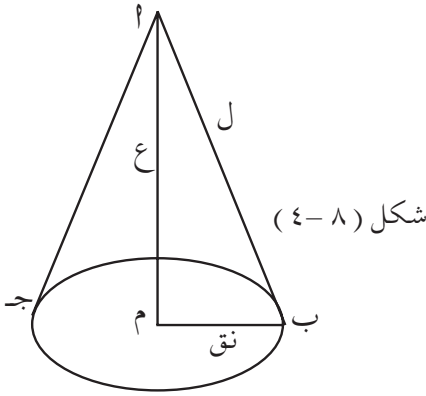
٢) مساحة الهرم الكلية .

٨ : ٢ المخروط

تعلم أن حجم المخروط $= \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times \text{ع}$

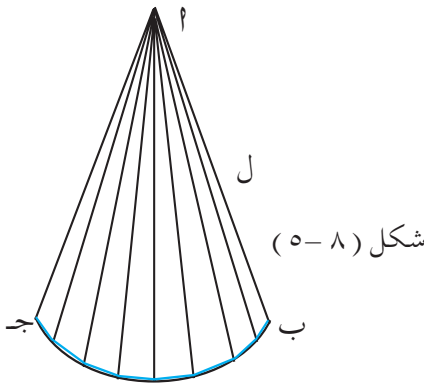
حيث نق : نصف قطر قاعدة المخروط ، ع : ارتفاع المخروط ، والآن عليك

أن تعرف قانوني المساحتين الجانبية والكلية للمخروط .



في الشكل (٨ - ٤) مخروط قائم فيه : $\overline{پم}$ الارتفاع ، $\overline{پب}$ الراسم ، $م$ مركز قاعدته .

إذا قُرد المخروط أعطانا شكل قطاع دائرة كما في الشكل : (٨ - ٥) . مساحة قطاع الدائرة يساوي مساحة المخروط الجانبية .



لحساب هذه المساحة نقسم هذا القطاع إلى عدد كبير جداً من القطاعات الصغيرة فيصبح كل منها مثلثاً صغيراً ارتفاعه يساوي طول الراسم (ل) وقاعدته قطعة صغيرة جداً من القوس ب ج .

∴ مساحة القطاع الدائري $پ ب ج$ = مجموع مساحات المثلثات الصغيرة

$$= \frac{1}{2} \times \text{مجموع قواعدها} \times \text{طول الراسم} = \frac{1}{2} \times \text{طول القوس ب ج} \times ل$$

ولكن طول هذا القوس هو محيط قاعدة المخروط التي نصف قطرها (نق)

$$∴ \text{المساحة الجانبية للمخروط} = \frac{1}{2} \times 2\pi \text{ نق} \times ل$$

المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = π نق ل .

وإذا أضفت مساحة قاعدة المخروط إلى مساحته الجانبية تحصل على المساحة

الكلية للمخروط .

المساحة الكلية للمخروط الدائري القائم = π نق ل + π نق^٢ .

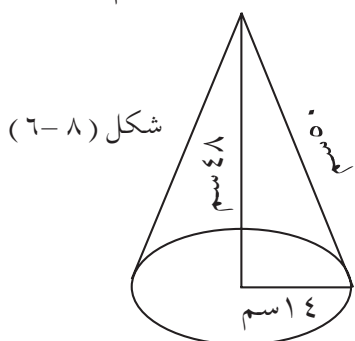
حيث نق : نصف قطر قاعدة المخروط ، ل : طول راسم المخروط .

مثال (١) مخروط دائري : نصف قطر قاعدته ١٤ سم وطول راسمه ٥٠ سم

وارتفاعه ٤٨ سم . أوجد كلاً من :

١) مساحة المخروط الجانبية . ب) مساحته الكلية . ج) حجم المخروط .

الحل :



شكل (٨-٦)

١) المساحة الجانبية للمخروط = π نق ل

$$= 2200 \text{ سم}^2 = 50 \times 14 \times \frac{22}{7}$$

ب) المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$\pi \text{ نق ل} + \pi \text{ نق}^2 = 2200 + 616 = 2816 \text{ سم}^2 = 14 \times 14 \times \frac{22}{7} + 2200$$

ج) حجم المخروط = $\frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \times \text{ع}$

$$= 9856 \text{ سم}^3 = \frac{1}{3} \times 14 \times 14 \times \frac{22}{7} \times 48$$

مثال (٢) الجزء السفلي لصاروخ على شكل إسطوانة ارتفاعها ٤٢ م ،

وقطر قاعدتها ١٤ م ، وجزؤه العلوي مخروط راسمه ١٥ م ، أوجد المساحة

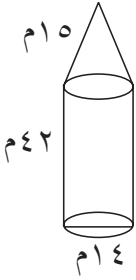
الكلية للصاروخ .

الحل:

[انظر الشكل (٧-٨)]

- مساحة قاعدة الاسطوانة = π نق^٢

شكل (٧-٨)



$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 104 \text{ م}^2$$

- المساحة الجانبية للأسطوانة = π نق^٢ × ع = $\frac{22}{7} \times 7 \times 42 = 1848 \text{ م}^2$ - المساحة الجانبية للمخروط = π نق^٢ × ل = $\frac{22}{7} \times 7 \times 15 = 330 \text{ م}^2$

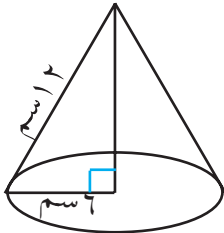
∴ المساحة الكلية للصاروخ = مساحة قاعدته + المساحة الجانبية للأسطوانة + المساحة الجانبية للمخروط

$$= 104 + 1848 + 330 = 22332 \text{ م}^2$$

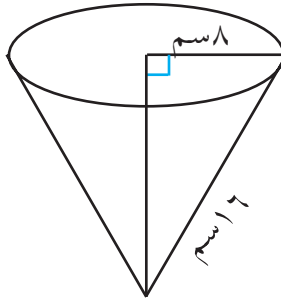
تمارين ومسائل

[١] في الأشكال (٨ - ١٨ ، ب ، ج) ، أوجد المساحة الجانبية والمساحة

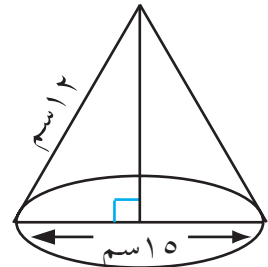
الكلية ، لكل مخروط .



شكل (٨-٨) (ج)



شكل (٨-٨) (ب)



شكل (٨-١٨)

[٢] مخروط دائري نصف قطر قاعدته ٢١ م ، وطول راسمه ٧٥ م وارتفاعه

٧٢ م ، أوجد :

(أ) مساحته الجانبية (ب) مساحته الكلية (ج) حجمه .

[٣] مخروط دائري نصف قطر قاعدته ٥ سم ، وطول راسمه ١٣ سم ، وارتفاعه

١٢ سم ، أوجد مساحته الكلية وحجمه $(\frac{22}{7} = \pi)$.

[٤] أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري طول راسمه ٧ سم ومساحته

الجانبية ١٩,٩ سم^٢ .

[٥] مخروط دائري طول راسمه ٣,٩ م ونصف قطر قاعدته ١,٤ م وارتفاعه

٣,٦ م . أوجد المساحة الكلية للمخروط ثم حجمه .

[٦] منارة مسجد على شكل اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٥ م ونصف

قطر قاعدتها ١,٧٥ م وجزؤها العلوي عبارة عن مخروط طول راسمه

٦,٢٥ م أوجد المساحة الجانبية للمنارة ثم أوجد حجمها إذا علمت أن

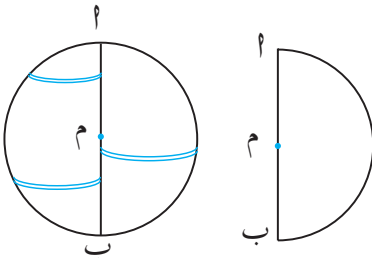
ارتفاع جزئها العلوي يساوي ٦ م ؟

٨ : ٣ حجم الكرة ومساحة سطحها

حجم الكرة :

إذا كان لديك دائرة ، وأدريتها نصف دورة حول أي قطر من أقطارها فإنك

تحصل على كرة .



شكل (٨ - ٩)



شكل (٨ - ٩)

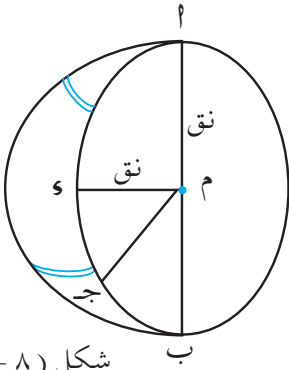
ماذا يحصل لو كان لديك نصف

دائرة وأدريتها حول قطرها دورة

كاملة ؟

[انظر الشكلين ٨ - ٩ ، ب)]

في الشكل (٨ - ١٠) : م مركز الدائرة وهو نفسه مركز الكرة . أي



شكل (٨-١٠)

قطعة تمر بمركز الكرة وينتهي طرفاها

بسطح الكرة تُسمى قطر الكرة .

أ ب : قطر الكرة ، م أ : نصف قطر

الكرة .

أ م = م ب = أ ج = ج م = م و = و نق .

لإيجاد حجم الكرة اتبع الخطوات التالية:

(١) خذ كرة معلوم نصف قطرها

وليكن نق (شكل ٨-١١).

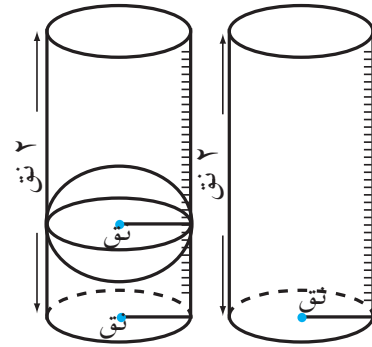
(ب) خذ إسطوانة مدرجة ،

نصف قطر قاعدتها نق، وارتفاعها

٢ نق شكل (٨-١١ ب) . شكل (٨-١١)

(ج) ضع الكرة داخل الإسطوانة

شكل (٨-١١ ج) .



شكل (٨-١١ ج)

شكل (٨-١١ ب)

(و) املاً الاسطوانة بالماء تماماً ، ثم أخرج الكرة، تجد أن حجم الماء المتبقي

يساوي $\frac{1}{3}$ حجم الماء الذي كان في الاسطوانة .

ومن ذلك نستنتج أن حجم الكرة يساوي $\frac{2}{3}$ حجم الماء السابق .

∴ حجم الماء السابق في الاسطوانة = حجم الاسطوانة = $\pi \times \text{نق}^2 \times ٢$ ع

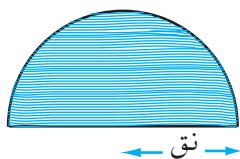
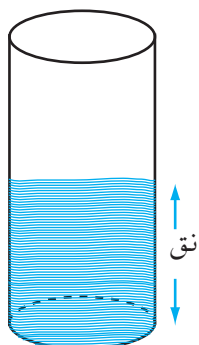
= $\pi \times \text{نق}^2 \times ٢ = ٢ \pi \times \text{نق}^2$.

$$\therefore \text{حجم الكرة} = \frac{2}{3} \times ٢ \pi \times \text{نق}^2 = \frac{4}{3} \pi \times \text{نق}^3 .$$

مساحة سطح الكرة :

لإيجاد مساحة سطح الكرة اتبع

الخطوات التالية :



شكل (٨-١١٢)

– خذ نصف كرة معلوم نصف قطرها
وليكن نق .

– خذ اسطوانة نصف قطر قاعدتها نق

– لف نصف الكرة بخيط حتى يغطيها كاملاً كما في الشكل (٨-١١٢) .

– بنفس طول الخيط السابق لف الاسطوانة ، تجد أن الخيط يلتف حول سطح

الاسطوانة ويصل إلى ارتفاع يساوي نصف قطرها (شكل ٨-١٢ ب) .

أي أن : مساحة سطح الكرة التي نصف قطرها نق يساوي مساحة السطح

الجانبى للأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها نق وارتفاعها ٢ نق .

∴ المساحة الجانبية للأسطوانة = $2\pi \times \text{نق} \times 2\text{نق} = 4\pi \times \text{نق}^2$ ،

وهذا يساوي مساحة سطح الكرة .

∴ مساحة سطح الكرة = $4\pi \times \text{نق}^2$.

مثال (١) كرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أوجد حجمها ومساحة سطحها .

الحل : حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi \times \text{نق}^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 27 = \frac{4}{3} \times 22 \times 9 = 264 \text{ سم}^3$$

مساحة سطح الكرة = $4\pi \times \text{نق}^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 = 264 \text{ سم}^2$



مثال (٢)

إذا كان حجم كرة $\frac{4312}{3}$ سم^٣، احسب طول نصف قطرها ($\frac{22}{7} = \pi$)،

ثم احسب مساحة سطحها .

الحل: حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$

$$\begin{array}{r} 7 \mid 343 \\ 7 \mid 49 \\ 7 \mid 7 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\frac{4312}{3} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3 \times \frac{22}{7}$$

$$\text{نق}^3 = \frac{7 \times 3 \times 4312}{4 \times 22} = 343$$

ومنه نصف قطر الكرة (نق) = $\sqrt[3]{343} = 7$ سم .

$$\text{مساحة السطح} = 4 \pi \text{ نق}^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616 \text{ سم}^2$$

تمارين ومسابقات

- [١] أوجد حجم الكرة التي نصف قطرها ١٠ سم .
- [٢] أوجد مساحة سطح كرة نصف قطرها ١٤ سم .
- [٣] أوجد حجم ومساحة سطح كرة نصف قطرها :
- [٤] (أ) ٣,٥ سم ، (ب) ١٢ سم ، (ج) $\frac{3}{2}$ مم . احسب نصف قطر كرة حجمها ٨,٥٠ سم^٣ ، ثم أوجد مساحة سطحها .
- [٥] إذا كانت مساحة سطح كرة ٢٤٦٤ سم^٢ . احسب طول نصف قطرها، ثم أوجد حجمها .
- [٦] كرة حجمها $\frac{1}{7} 900$ سم^٣ . أوجد مساحة سطحها .
- [٧] أوجد حجم كرة إذا علمت أن مساحة سطحها : (أ) ١٥٤ سم^٢ . (ب) 81π سم^٢ .
- [٨] لوح من المعدن منتظم السمك مساحته متر مربع، صُنعت منه كرة جوفاء قطرها ٢٨ سم أوجد مساحة الجزء الباقي من اللوح .
- [٩] عُمرت كرة من النحاس في اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها ٧ سم تحوي ماء فارتفع سطح الماء فيها بمقدار ٣,٤ سم ، أوجد حجم كرة النحاس وطول نصف قطرها لأقرب سنتيمتر .

[١٠] باعتبار الأرض كرة نصف قطرها ٦٤٠٠ كيلومتر ، أوجد :

١ (حجم الكرة الأرضية (ب) مساحة سطحها .

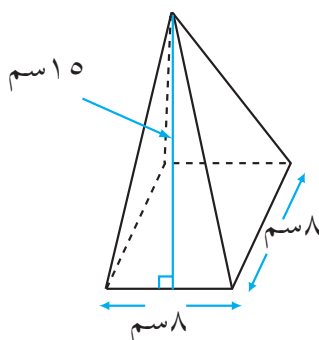
جـ) إذا كان حوالي $\frac{2}{3}$ سطح الأرض تغمرها المياه . فما مساحة اليابسة؟

٨ : ٤ تمارين عامة ومسائل

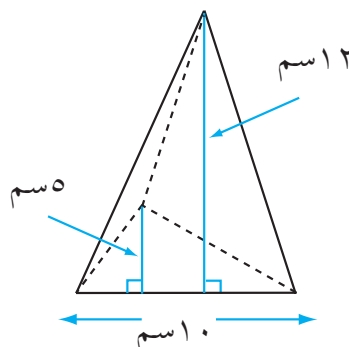
[١] مساحة قاعدة هرم سداسي قائم تساوي ٣٦٥٤ سم^٢ وطول ضلعها ٦ سم ،

وارتفاع الهرم الجانبي ١١ سم ، احسب مساحتيه الجانبية والكلية .

[٢] أوجد المساحتين الجانبية والكلية للشكلين (٨ - ١٣ ، ب) .

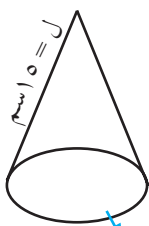


شكل (٨ - ١٣) ب



شكل (٨ - ١٣) ب

[٣] احسب المساحتين الجانبية والكلية للأشكال (٨ - ١٤ ، ب ، ج)



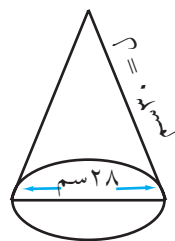
محيط القاعدة = ١٣٢ سم

شكل (٨ - ١٤) جـ



مساحة القاعدة = ١٩٨ سم^٢

شكل (٨ - ١٤) ب



شكل (٨ - ١٤) ب

[٤] كرة نصف قطرها ٥ م ، احسب حجمها ومساحة سطحها .



[٥] أوجد حجم ومساحة سطح كرة قطرها ٣٠ سم .

[٦] حجم كرة ٣٣,٥٠٤ متراً مكعباً ، احسب نصف قطرها ، ثم احسب مساحة سطحها ($\pi = 3,141$) .

[٧] إذا كانت مساحة سطح كرة $804 \frac{4}{7}$ سم^٢ ، فأوجد نصف قطرها ($\pi = \frac{22}{7}$) ، ثم أوجد حجمها .

[٨] صُهرت كرة ومكعب من معدن واحد وحولتا إلى إسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها $\frac{3}{11}$ ١٥ سم ، أوجد نصف قطر قاعدة الإسطوانة ، علماً بأن قطر الكرة يساوي طول ضلع المكعب ويساوي ١٤ سم ، وأنه لم يُفقد شيء أثناء عملية الصهر .

[٩] أكمل الجدول التالي ، حيث نق = نصف قطر قاعدة المخروط القائم وق = ارتفاعه ، ل طول راسمه ($\pi = \frac{22}{7}$) .

نق	ع	ل	مساحة القاعدة	حجم المخروط	المساحة الجانبية	المساحة الكلية
٧ سم	٢٤ سم	٢٥ سم				
٦ سم		١٠ سم		$301 \frac{1}{7}$ سم ^٣		
	١٥ سم	١٧ سم	$201 \frac{1}{7}$ سم ^٢			

٨ : ٥ اختبار الوحدة

[١] هرم رباعي قائم ارتفاعه ٨ سم ، قاعدته مربع طول ضلعه ١٢ سم ، وارتفاعه الجانبي يساوي ١٠ سم ، احسب :

أ (حجم الهرم) ب (المساحة الجانبية للهرم .

[٢] مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم ونصف قطر قاعدته ٥ سم وطول راسمه ١٣ سم ، احسب : أ (مساحته الكلية) ب (حجمه .

[٣] احسب حجم ومساحة سطح كرة قطرها ٢٠ سم ($\pi = 3,14$) .

٩ : ١ قراءة الجداول والأشكال البيانية

تعرفت في الصفين السادس والسابع على بعض الأساليب الإحصائية لقراءة وتبويب وتمثيل البيانات الإحصائية وتفسير بياناتها ، في هذه الوحدة سوف نتعرف على أسلوبين لقراءة الجداول التكرارية والأشكال البيانية :

أولاً : قراءة جداول التكرارات :

الجدول التالي يمثل الألوان لفئة زهرة تم ملاحظتها ، فهو يمثل بيانات مبوبة بحسب صفة اللون ، ويطلق على مثل هذا الجدول جدول تكرار الصفة أو بشكل عام يسمى جدول توزيع تكراري .

لون الزهرة	أبيض	أحمر	أصفر	مجموع الزهور
التكرار	٢٠	٥٠	٣٠	١٠٠

تلاحظ : في الصف الثاني متغيراً إحصائياً هو التكرار أي عدد مرات ملاحظة اللون فمثلاً اللون الأبيض تكررت ملاحظته (٢٠) مرة ويعني ذلك أن (٢٠) زهرة تم ملاحظة اللون الأبيض عليها ... وهكذا .

ما النسبة المئوية لكل تكرار على حدة ؟

$$\text{النسبة المئوية لتكرار اللون الأبيض} = \frac{٢٠}{١٠٠} = ٢٠\%$$

$$\text{النسبة المئوية لتكرار اللون الأحمر} = \frac{٥٠}{١٠٠} = ٥٠\%$$

$$\text{النسبة المئوية لتكرار اللون الأصفر} = \frac{٣٠}{١٠٠} = ٣٠\%$$

يطلق على نسبة التكرار المئوية « التكرار النسبي »

تلاحظ أن **مجموع التكرارات النسبية يساوي الواحد الصحيح**

مثال (١)

الجدول التالي يبين توزيع بيانات في جدول تكراري يسمى « جدول بيانات كمية » والبيانات المبوبة عبارة عن درجات (٣٠) طالباً في اختبار شهري درجته الكبرى (١٠) .

الدرجة	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	مجموع الطلاب
التكرار	٣	٥	٦	٧	٦	٣	٣٠

- ١) ما أصغر وأكبر درجة حصل عليها الطلاب ؟
 ب) ما مجموع التكرارات (عدد الطلاب) المناظرة لأكبر وأصغر درجة ؟
 جـ) ما مجموع الدرجات الكلية ؟

الحل:

- ١) أصغر وأكبر درجة هما على الترتيب (٥) و (١٠) درجات .
 ب) التكرار المناظر لأكبر درجة = ٣ طلاب .
 التكرار المناظر لأصغر درجة = ٣ طلاب .
 بالتالي فإن مجموعهما = ٣ + ٣ = ٦ طلاب .
 جـ) لحساب مجموع الدرجات الكلية : نضرب كل درجة في التكرار المناظر ، ثم نجمع بعد ذلك .

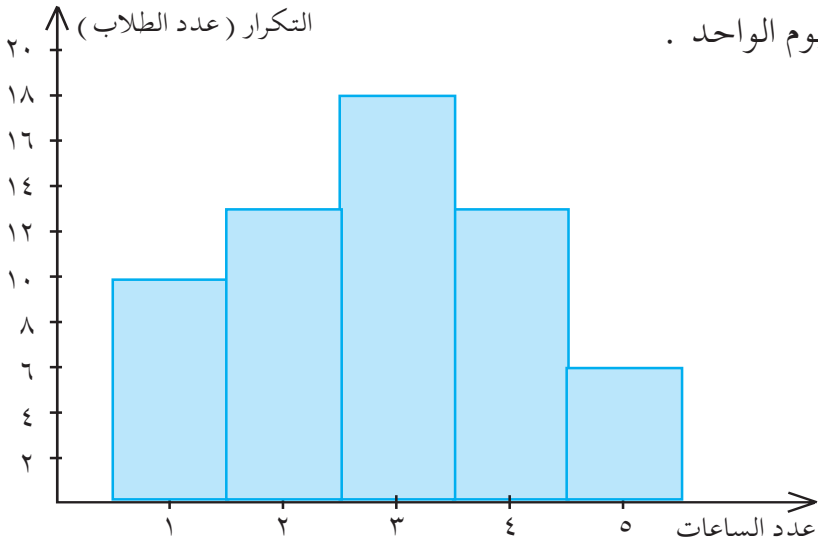
$$\therefore \text{المجموع الكلي للدرجات} = ٣ \times ١٠ + ٦ \times ٩ + ٧ \times ٨ + ٦ \times ٧ + ٥ \times ٦ + ٣ \times ٥ = ٢٢٧ = ٣٠ + ٥٤ + ٥٦ + ٤٢ + ٣٠ + ١٥ =$$

أوجد المتوسط الحسابي في المثال (١) . الإجابة = ٧,٥٧

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (حاصل ضرب الدرجات } \times \text{ تكراراتها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

ثانياً : قراءة الأشكال البيانية :

من أنواع الأشكال البيانية المدرج التكراري والمضلع التكراري .
المدرج التكراري التالي يبين عدد الساعات التي يقضيها (٦٠) طالباً في الدراسة في اليوم الواحد .



شكل (٩ - ١)

تلاحظ أن أقل ساعات يقضيها الطلبة في الدراسة في اليوم هي ساعة واحدة ، وأكثر ساعات هي (٥) ساعات ، كما تلاحظ أن (١٣) طالباً يقضون ساعتين في الدراسة في اليوم .

كم عدد الطلبة الذين يدرسون (٤) ساعات أو أكثر في اليوم .
عدد الطلبة الذين يدرسون (٤) ساعات أو أكثر في اليوم = عدد الطلبة الذين يدرسون ٤ ساعات + عدد الطلبة الذين يدرسون ٥ ساعات
= ١٣ + ٦ = ١٩ طالباً .



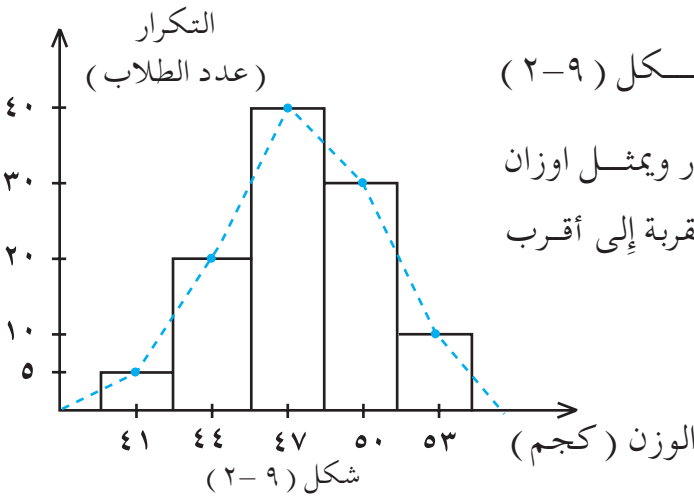
تدريب

من مدرج التكرار المعطى في الشكل (٩-١) .

١) انقل المعلومات إلى جدول تكراري فيه الصف الأول لعدد الساعات والصف الأخير للتكرار المناظر .

ب) احسب المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (حاصل ضرب الساعات } \times \text{ تكراراتها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$



الشكل (٩-٢)

مثال (٢)

هو مضلع التكرار ويمثل اوزان عدد من الطلبة مقربة إلى أقرب كجم .

١) كم عدد الطلبة الذين أوزانهم أقل من ٤٧ كجم .

ب) كم عدد الطلبة الذين أوزانهم ٤٧ كجم .

ج) كم عدد الطلبة الذين أوزانهم أكثر من ٤٧ كجم .

الحل:

١) عدد الطلبة الذين أوزانهم أقل من ٤٧ كجم = ٥ + ٢٠ = ٢٥ طالباً .

ب) عدد الطلبة الذين أوزانهم ٤٧ كجم = ٤٠ طالباً .

ج) عدد الطلبة الذين أوزانهم أكثر من ٤٧ كجم = ٣٠ + ١٠ = ٤٠ طالباً .

ملاحظة:

مضلع التكرار عبارة عن خط منقط (منكسر كل قطعة فيه) تربط بين نقطتين تنصف كل واحدة المضلع العلوي لكل مستطيل من مستطيلات مدرج التكرار أي أننا ننصف الأضلاع العلوية للمستطيلات ، ثم نصل بين كل منتصفين متتاليين .

تمارين ومسائل

[١] الجدول الآتي يبين توزيع عدد طلاب الرياضيات في المستويات الأربعة للعام ٢٠٠٠م – ٢٠٠١م بكلية التربية جامعة صنعاء .

المستوى	عدد الذكور	عدد الإناث	المجموع
الأول	٧٠	١٢٠	١٩٠
الثاني	٥٠	١٠٠	١٥٠
الثالث	٦٠	٧٠	١٣٠
الرابع	٤٠	٥٠	٩٠
المجموع	٢٢٠	٣٤٠	٥٦٠

١ (ما نوع البيانات المبوبة في الجدول السابق ؟

ب (ما النسبة المئوية للطالبات لجميع المستويات ككل ؟

ج (ما النسبة المئوية للطلاب لجميع المستويات ككل ؟

[٢] الجدول الآتي يبين درجات (٣٠) طالباً في امتحان شهري درجته الكبرى (١٠) درجات ؟

الدرجة	الفرز	التكرار
٥		٤
٦		٥
٧		٦
٨		٨
٩		٤
١٠		٣
المجموع		٣٠



- (أ) ما الصفة التي على أساسها تم تنظيم البيانات السابقة في الجدول ؟
- (ب) كم المجموع الكلي للدرجات ؟ (ج) ما المتوسط الحسابي لهذه الدرجات ؟
- [٣] جدول التكرار الآتي يمثل أوزان (١٠٠) طالب مقربة إلى أقرب كجم :

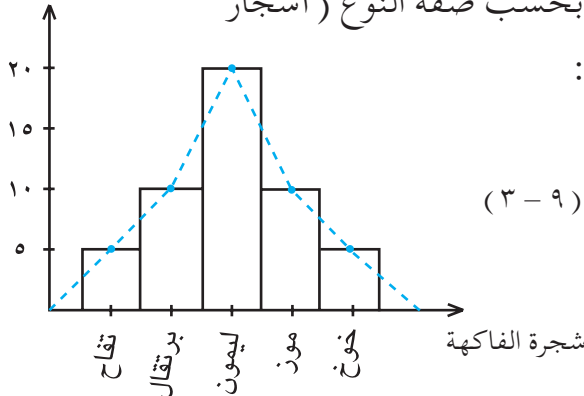
الوزن (كجم)	التكرار (عدد الطلاب)	النسبة المئوية	التكرار النسبي
٤١	٥	٥٪	٠,٠٥
٤٤	١٥		
٤٧	٤٥		
٥٠	٢٥		
٥٣	١٠		
المجموع	١٠٠ طالب		

- (١) أكمل العمود الثالث والرابع في الجدول .
- (ب) ما مجموع التكرارات النسبية ؟ (ج) احسب المتوسط الحسابي .
- [٤] الجدول التالي يبين توزيع أوزان مجموعة من الأسماك اصطادها أحد الصيادين في أحد الأيام من خليج عدن :

الوزن (كجم)	١	٢	٣	٤	المجموع
التكرار × الوزن	٥	٢٠	٤٥	٨٠	١٥٠ كجم

- (١) كم عدد الأسماك المناظر للوزن ٤ كجم ؟
- (ب) إذا كان المتوسط الحسابي = ٣ كجم . فما مجموع التكرارات (مجموع الأسماك) ؟
- [٥] الشكل (٩ - ٣) يبين توزيع بيانات إحصائية بحسب صفة النوع (أشجار

التكرار (عدد الاشجار)



ثمرة) :

شكل (٩ - ٣)

- ١) ماذا تمثل المستطيلات البيانية ؟
- ب) ماذا يمثل الشكل الناتج من توصيل الخطوط بين نقاط منتصفات الأضلاع العلوية للمستطيلات ؟
- ج) ما عدد أشجار الموز ؟
- د) ما مجموع التكرارات ؟ (أي مجموع عدد الأشجار)
- هـ) ما التكرار النسبي لأشجار الليمون ؟
- و) أنشئ جدولاً تكرارياً للأشجار وتكراراتها المناظرة من المعلومات المتوفرة في الشكل (٩ - ٣) .

٩ : ٢ | جدول البيانات

سبق وتعلمت كيفية تبويب بيانات إحصائية في جداول في الصف السابع، وهنا سوف تتعرف على كيفية جدول بيانات إحصائية أولية بحسب تصنيف هذه البيانات .

فمثلاً يصنف أفراد المجتمع إلى ذكور وإناث وتصنف الأشجار المثمرة إلى أشجار موز ، برتقال ، تفاح ... الخ مثل هذه التصنيفات يسمى بيانات نوعية، أي أن جدول هذا النوع من البيانات تكون بحسب صفة النوع .

كما تصنف البيانات التي تمثل قياسات لدرجة الحرارة أو الأطوال أو الأوزان ... وهكذا كل هذه الأنواع من البيانات تسمى بيانات كمية .

تدريب

صنف البيانات التالية إلى بيانات وصفية أو كمية :

- ١) الحالة التعليمية (يقرأ، أمي) . ب) سرعة السيارة بالكيلومتر / ساعة .
- ج) الحالة الاجتماعية (متزوج ، أعزب ، مطلق ، أرملة) .
- د) الألوان : أحمر ، أخضر ، أزرق .



مثال (١)

أحصى ياسر أعداد الماشية التي شاهدها أثناء زيارته لإحدى

مزارع تربية الماشية فسرّد البيانات كما يلي :

جمل خروف ماعز جمل بقرة خروف بقرة خروف شاه ماعز
 ماعز شاه بقرة بقرة جمل شاه شاه ماعز بقرة ماعز
 خروف شاه ماعز خروف بقرة ماعز ماعز خروف خروف شاه
 أنشئ جدولاً لهذه البيانات .

الحل :

البيانات الأولية السابقة يمكن تنظيمها في جدول يسمى جدول

تكراري على النحو التالي :

نوع الماشية	الفرز	التكرار
جمل		٣
بقرة		٦
ماعز		٨
خروف		٧
شاه		٦
النوع		٣٠

تدريب

ما النسبة المئوية لكل نوع من أنواع الماشية ؟

مثال (٢)

الدرجات النهائية التي حصل عليها (٣٠) طالباً في مادة

الإحصاء في إحدى كليات جامعة صنعاء .

٧٠	٨٥	٦٠	٩٠	٦٠
٧٠	٩٠	٦٥	٦٥	٦٥
٧٥	٩٥	٧٠	٨٥	٧٥
٦٠	٧٥	٧٥	٧٠	٨٠
٦٥	٨٥	٧٥	٧٠	٧٥
٨٥	٨٠	٨٠	٨٠	٨٠

نظم البيانات السابقة في جدول تكراري واحسب التكرار النسبي .

الحل: البيانات السابقة عبارة عن بيانات كمية ويمكن تنظيمها في

جدول توزيع تكراري كما يلي :

الدرجة	الفرز	التكرار	النسبة المئوية	التكرار النسبي
٦٠		٣	٪١٠	٠,١
٦٥		٤	٪١٣,٣	٠,١٣
٧٠		٥	٪١٦,٧	٠,١٧
٧٥		٦	٪٢٠	٠,٢٠
٨٠		٥	٪١٦,٧	٠,١٧
٨٥		٤	٪١٣,٣	٠,١٣
٩٠		٢	٪ ٦,٧	٠,٠٧
٩٥		١	٪ ٣,٣	٠,٠٣
المجموع		٣٠	٪١٠٠	١

نلاحظ أن مجموع التكرارات النسبية تساوي واحداً صحيحاً .

تمارين ومسائل

[١] صنف كلاً من البيانات التالية إلى نوعية وكمية :

١) الزوايا بالدرجات . ب) العمر بالسنوات .

ج) مجموعة أشكال هندسية حسب عدد أضلاعها .

د) نزلاء أحد المستشفيات حسب الأمراض التي يعانون منها .

[٢] لاحظت أروى عند زيارتها لجدها في المزرعة الأشجار المثمرة التالية :



تفاح	برتقال	موز	تفاح	برتقال
موز	برتقال	تفاح	تفاح	برتقال
تفاح	موز	برتقال	برتقال	تفاح
تفاح	تفاح	برتقال	تفاح	موز

١) جدّول البيانات السابقة مبيناً تكرار كل نوع من الأشجار .
ب) ما النسبة المئوية للتفاح ؟

[٣] لديك البيانات التالية :

٢	٣	٢	٣	١	٤	٢	١
٣	٣	٤	٢	١	٢	٢	٣
٣	٢	٣	٣	٣	٢	٤	١
٢	٣	٤	٢	٤	٣	١	٢

١) نظم هذه البيانات في جدول تكراري يحتوي العمود الأول على العدد والعمود الثاني على التكرار والعمود الثالث حاصل ضرب العدد في تكراره المناظر .

ب) ما مجموع التكرارات .

ج) ما المجموع الكلي لحاصل ضرب العدد في تكراره ؟

د) احسب المتوسط الحسابي لهذه الأعداد .

٩ : ٣ تمثيل البيانات الإحصائية

لتكن لديك البيانات التالية وطلب منك تمثيلها باستخدام المصّلع

التكراري :

٦	٥	٦	٧	١٠	٢	١	٨	٩	١٠
٦	٥	٥	٨	٤	٩	٣	٩	٨	١٢
٥	٤	٧	١٢	٢	٧	٨	١٠	٩	١١
١٠	٩	٤	٢	١١	٣	٥	٦	٧	٨

كي تمثل هذه البيانات بمصّلع تكراري فإنك أولاً بحاجة إلى إنشاء جدول

تكرار لهذه البيانات ولكن الجدول سيكون طويلاً وغير واضح لذا يجب البحث عن طريقة يمكن بواسطتها اختصار الجدول وهذه الطريقة هي استخدام الفئات حيث يمكن تجزئة البيانات في مجموعات صغيرة تسمى كل وحدة منها فئة : فمثلاً المجموعة $\{ 1, 2, 3 \}$ تمثل فئة وتكتب ١ - ٣ ، ... وهكذا .

الفئة هي مجموعة من البيانات تبدأ بملاحظة تسمى الحد الأدنى وتنتهي بملاحظة تسمى الحد الأعلى للفئة

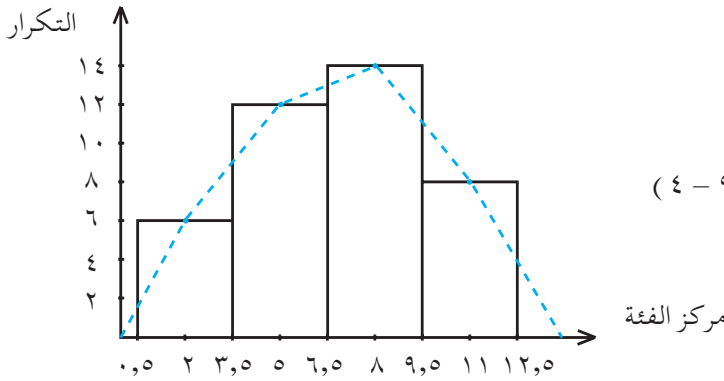
فمثلاً : الفئة (١ - ٣) حدها الأدنى = ١ ، وحدها الأعلى = ٣ .
... وهكذا . ولكي نمثل البيانات بيانياً بحسب الفئة فإننا نمثل مركز الفئة على المحور السيني وتكرارات الفئة على المحور الصادي .
ويعرف مركز الفئة كالاتي :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2}$$

يتم تبويب البيانات السابقة وفقاً لهذه المعلومات في جدول التكرار التالي :

الفئة	مركز الفئة	التكرار
١ - ٣	٢	٦
٤ - ٦	٥	١٢
٧ - ٩	٨	١٤
١٠ - ١٢	١١	٨
المجموع		٤٠

بناءً على هذا الجدول يتم رسم مضع التكرار على النحو التالي [شكل (٩-٤)] المستطيلات عبارة عن مدرّج التكرار .
والخط المنقط هو مضع التكرار .



شكل (٩ - ٤)

ملاحظة :

الحدان الحقيقيان للفئة (١ - ٣) هما (٣,٥ - ٠,٥) ومركز هذه الفئة هو العدد ٢ وكذلك الحدان الحقيقيان للفئة (٤ - ٦) هما (٦,٥ - ٣,٥) وهكذا .

مثال (١) سُجلت درجة الحرارة في مدينة صنعاء لعشرين يوماً متتالية فكانت كما يلي :

٢١	٢٥	١٦	١٨	١٨
٢٦	٢١	١٧	١٩	٢١
٢٢	٢٤	٢٦	٢١	٢٢
١٧	١٦	١٧	٢٠	٢٥

إنشئ جدولاً لهذه البيانات باستخدام الفئات .

الحل :

إبحث عن أصغر درجة وأكبر درجة للحرارة تجد ان اصغر درجة هي ١٦ وأكبر درجة هي ٢٦ فإن عدد الدرجات التي تقع ضمن هذه الفئة تساوى ١١ درجة وهو امر يحتاج إلى ١١ صفاً إذا أخذت كل درجة على حدة ، لذا يمكن تكوين فئات من درجتين أو ثلاث ، وليكن هذا الجدول مكوناً من فئات ذات درجتين يبدأ بالفئة (١٦ - ١٧) وينتهي بالفئة (٢٦ - ٢٧) .

الفئة	مركز الفئة	الفرز	التكرار
١٧ - ١٦	١٦,٥		٥
١٩ - ١٨	١٨,٥		٣
٢١ - ٢٠	٢٠,٥		٥
٢٣ - ٢٢	٢٢,٥		٢
٢٥ - ٢٤	٢٤,٥		٣
٢٧ - ٢٦	٢٦,٥		٢

مثال (٢)

جدول التكرار التالي يبين أوزان (١٠٠) شخص مقربة إلى أقرب كجم .

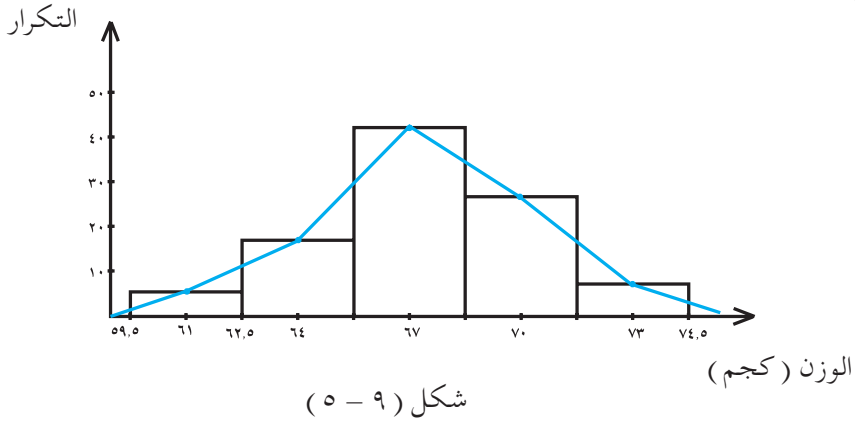
الفئة	مركز الفئة	التكرار	التكرار \times مركز الفئة
٦٢ - ٦٠	٦١	٥	٣٠٥
٦٥ - ٦٣	٦٤	١٨	١١٥٢
٦٨ - ٦٦	٦٧	٤٢	٢٨١٤
٧١ - ٦٩	٧٠	٢٧	١٨٩٠
٧٤ - ٧٢	٧٣	٨	٥٨٤
المجموع		١٠٠	٦٧٤٥

١ (ارسم المضلع التكراري للبيانات الموضحة في الجدول أعلاه .

ب (أوجد المتوسط الحسابي للأوزان السابقة .

الحل:

١ (المضلع التكراري للبيانات السابقة يوضح في الشكل (٩ - ٥) .



ب) المتوسط الحسابي =
$$\frac{\text{مجموع (حاصل ضرب التكرار} \times \text{مركز الفئة)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= \frac{584 + 1890 + 2814 + 1102 + 305}{100}$$

$$= \frac{6745}{100} = 67,45 \approx 67 \text{ كجم تقريباً}$$

من المقاييس التي تفيد في تنظيم بيانات في فئات مقياس يسمى المدى ويعرف المدى بالعلاقة :

$$\text{المدى} = \text{أكبر قيمة} - \text{أصغر قيمة}$$

مثال (٣) احسب المدى للبيانات الآتية :

١١ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٢ ، ٣٥ ، ٤٠

الحل : لنرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً كما يلي :

٢ ، ١١ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠ (تصاعدياً)

المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة = $40 - 2 = 38$.

تعريف

يسمى (الفرق بين القيمتين الدنيا والعليا للفئة) + ١ بطول الفئة أو مدى الفئة .

وعادة نحسب طول الفئة بطرح الحد الأدنى للفئة من الحد الأعلى لها وإضافة (١) إلى الناتج .

فعلى سبيل المثال : إذا كانت الفئة هي : (١٦ - ١٧) فإن :

$$\text{طول الفئة} = (١٦ - ١٧) + ١ = ١ + ١ = ٢$$

ملاحظة : طول الفئة المناسب يعتمد على عدد الفئات المطلوبة وكلما كان صغيراً فإن دقة المعلومات عن البيانات الأصلية تزداد .

ملاحظة : يفضل أن يكون عدد الفئات ما بين (٥) إلى (١٥) .

تعريف

عدد البيانات الواقعة ضمن كل فئة يسمى تكرار الفئة

مثال (٤)

الجدول التكراري هو جدول تكرار لدرجات (٣٠) طالباً .

الفئة	١٠ - ١٩	٢٠ - ٢٩	٣٠ - ٣٩	٤٠ - ٤٩	المجموع
التكرار	٥	٨	١٠	٧	٣٠ طالباً



- ١) ما تكرار الفئة الأولى ؟ (ب) ما مركز الفئة (٣٠ - ٣٩) ؟
 (جـ) ما طول الفئة (٢٠ - ٢٩) ؟

الحل:

١) الفئة الأولى هي (١٠ - ١٩) حدها الأدنى (١٠) وحدها الأعلى (١٩) وتكرر هذه الفئة يتضح من الجدول = ٥ أي أنه توجد خمس ملاحظات (بيانات) ضمن هذه الفئة .

$$\text{ب) مركز الفئة (٣٠ - ٣٩)} = \frac{٣٩ + ٣٠}{٢} = \frac{٦٩}{٢} = ٣٤,٥ .$$

$$\text{جـ) طول الفئة (٢٠ - ٢٩)} = (٢٩ - ٢٠) + ١ =$$

$$١٠ = ١ + ٩ =$$

تمارين ومسائل

[١] الجدول التكراري التالي لأعمار (٢٤) طالباً بالسنوات :

الفئة	٦ - ٤	٩ - ٧	١٢ - ١٠	١٥ - ١٣	١٨ - ١٦	المجموع
التكرار	٢	٣	١٠	٥	٤	٢٤
مركز الفئة	٥				١٧	

- ١) أكمل الجدول . (ب) مثل البيانات السابقة بمدرج التكرار .
 (جـ) ارسم المصّلع التكراري . (د) ما تكرار الفئة (١٣ - ١٥) ؟
 (هـ) ما طول الفئة (٧ - ٩) ؟

[٢] لديك البيانات التالية :

٢١ ، ٣٥ ، ٦٨ ، ٢٤ ، ٥٥ ، ١١ ، ٦٦

١) احسب المدى .

ب) احسب المتوسط الحسابي .

جـ) ما الفرق بين المدى والمتوسط ؟

[٣] البيانات التالية هي أوزان (٢٥) قطعة معدنية لأقرب جرام .

١٤	١٨	٥	١٦	١١
٤	٩	٧	١٣	٧
١١	١٠	١٧	١٠	٦
١٤	١٢	١١	٨	١٢
١١	١٠	١٤	١٥	١٣

١) كون جدولاً تكرارياً يحتوي على خمس فئات الفئة الأولى (٤ - ٦)

والفئة الأخيرة (١٦ - ١٨) .

ب) ما تكرار الفئة الثالثة ؟

جـ) ما طول الفئة التي حدها الأدنى ٧ وحدها الأعلى ٩ (الفئة الثانية) .

[٤] ما طول كل فئة في الجدول التالي :

الفئة	٢٣ - ١٥	٣٢ - ٢٤	٤١ - ٣٣	٥٠ - ٤٢	٥٩ - ٥١
التكرار	٣	٦	٧	٥	٤
مركز الفئة	١٩	٢٨	٣٧	٤٦	٥٥

٩ : ٤ تمارين عامة

[١] يمثل الجدول التكراري التالي اوزان (٢٢) طالباً لأقرب كيلوجرام :

الوزن (كجم)	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	المجموع
التكرار	١	٢	٦	٨	٣	٢	٢٢ طالباً
التكرار \times الوزن	٤٨	٩٨	٣٠٠	٤٠٨	١٥٦	١٠٦	١١١٦ كجم

١) ما أصغر وزن وما أكبر وزن وما تكرار كلٍّ منهما ؟

ب) ما تكرار الوزن ٥١ كجم ؟ جـ) ما مجموع التكرارات (الطلاب) ؟

د) ما المجموع الكلي للأوزان ؟ هـ) ما المتوسط الحسابي لأوزان الطلاب .

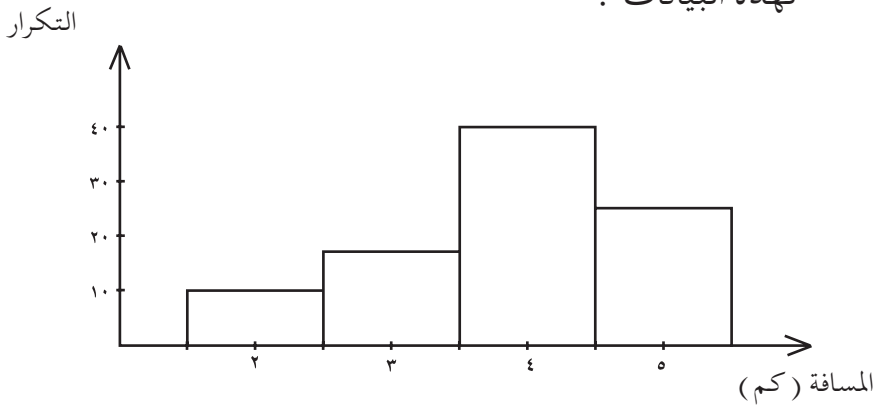
[٢] المدرج التكراري التالي يمثل أطوال رحلات سيارة أجرة في إحدى المدن :

١) ما أطول رحلة للسيارة وما التكرارات المناظرة ؟

ب) ما تكرار أقصر رحلة قامت بها السيارة ؟

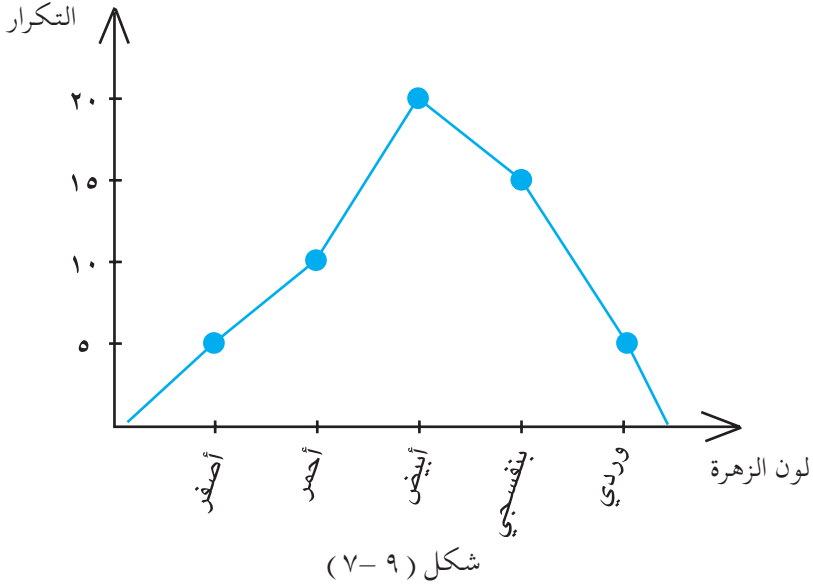
جـ) استخدم المدرج التكراري شكل (٩ - ٦) لبناء جدول تكراري

لهذه البيانات .



شكل (٩ - ٦)

[٣] مضلع التكرار التالي يمثل بيانات أخذت من حديقة للزهور :



- ١ (ما مجموع التكرارات (عدد الزهور التي تم مشاهدتها) ؟
 ب (ما اللون الذي تكررت ملاحظته أكثر من غيره ؟
 ج (استخرج البيانات التي يمثلها مضلع التكرار لإنشاء جدول تكراري .
 [٤] البيانات الآتية تمثل عدد الضربات الركنية التي نفذها فريق كرة قدم في
 (٣٠) مباراة :

٧	٦	٥	٢	١	٣	٦	٧	٥	٢
٤	٣	٧	٢	٢	١	١	٣	٥	٦
١	٣	٤	١	٢	١	٤	٤	٧	٧

نظم هذه البيانات في جدول تكراري يحتوي : عدد الضربات الركنية،
 تكراراتها المناظرة ، التكرار النسبي لكل منها .



[٥] فيما يلي درجات طالب في الامتحان النهائي :

٧٧ ، ٨٧ ، ٨٣ ، ٦٨ ، ٩٢ ، ٨٥ ، ٧٠ ، ٧٨

١) ما هو المدى ؟ ب) احسب المتوسط الحسابي ؟

[٦] لديك الجدول التكراري لبيانات عددية موزعة في فئات كما يلي :

الفئة	مركز الفئة	التكرار	مركز الفئة \times التكرار
١٢ - ٤	٨	٦	٤٨
٢١ - ١٣	١٧	١٠	١٧٠
٣٠ - ٢٢	٢٦	٤	١٠٤
المجموع		٢٠	٣٢٢

١) ما طول الفئة ؟ ب) ما تكرار الفئة (٢١ - ١٣) ؟

ج) ما الحد الأعلى والحد الأدنى للفئة (١٢ - ٤) .

د) احسب المتوسط الحسابي لهذه البيانات .

[٧] لديك الجدول التكراري التالي :

الفئة	مركز الفئة	التكرار
٦١ - ٥٩	٦٠	٥
٦٤ - ٦٢	٦٣	١٠
٦٧ - ٦٥	٦٦	٣٠
٧٠ - ٦٨	٦٩	١٥
٧٣ - ٧١	٧٢	٥

١) ارسم المدرج التكراري . ب) ارسم مضلع التكرار .

ج) احسب المتوسط الحسابي .

٩ : ٥ اختبار الوحدة

[١] درجات أحد الطلبة في الاختبارات الشهرية هي :

٥ ، ٨ ، ٢٠ ، ١٠ ، ١٥

١ (أوجد المدى لهذه الدرجات .

ب) احسب المتوسط الحسابي لهذه الدرجات .

[٢] فيما يلي أعداد المتفرجين (بالآلاف) مباريات الدوري في ملاعب بعض

محافظات الجمهورية خلال (١٨) مباراة :

١٧ ، ٢٣ ، ٢١ ، ٢٣ ، ٢٧ ، ١٥ ، ٥ ، ١٩ ، ١٧

١٢ ، ١٦ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٩

لخص هذه البيانات عن طريق :

١ (إنشاء جدولاً تكرارياً (بدون فئات) .

ب (رسم مدرج تكراري . جـ) رسم مضلع تكراري .

[٣] البيانات التالية هي أوزان (٢٠) قطعة معدنية لأقرب جم :

٥٥ ٥٢ ٤٠ ٥٩ ٣٥ ٥١ ٥٨ ٦٠ ٣٠ ٥٥

٤٧ ٥٧ ٧٠ ٧٢ ٤٥ ٤٦ ٥٤ ٧٣ ٦٣ ٤٣

١ (كوّن جدولاً تكرارياً به أربع فئات بطول الفئة = ١١

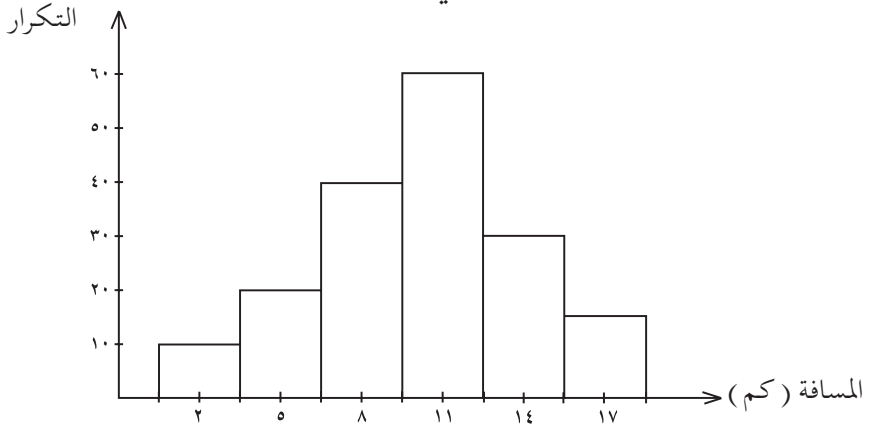
(الفئة الأولى (٣٠-٤٠) وهكذا)

ب) ما الفئة الأكثر تكراراً ؟

جـ) ما مجموع التكرارات ؟



[٤] جدول التكرار التالي يبين المسافة وعدد مرات تكرارها في اليوم التي تحركها باص لنقل الركاب في العاصمة صنعاء .



شكل (٩ - ٨)

- ١ (ما مجموع التكرارات (الرحلات) ؟
- ب (كوّن جدولاً تكرارياً بناءً على مدرج التكرار .
- جـ (ارسم المضلع التكراري .

بِحَمْدِ اللَّهِ

