

Série de TD n°4 : Commande par retour d'état et synthèse d'observateur

Exercice 1 :

- 1- Rappeler le rôle de l'observateur dans la commande des systèmes
- 2- Rappeler les équations de l'observateur identité
- 3- Donner la représentation schématique de l'ensemble [Système +retour d'état +observateur Identité]

Exercice 2 :

Soit un système représenté par son équation d'état :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \ 0)x \end{cases} \quad \text{avec} \quad x = \begin{pmatrix} \theta \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}$$

- 1 - Calculer le vecteur gain $K=(k_1, k_2)$ à introduire dans une boucle de retour d'état pour que le système, en boucle fermée soit caractérisé par un coefficient d'amortissement égal à 1 et une pulsation propre $\omega_n=2\omega_0$.
- 2 – Calculer le gain K de l'observateur permettant d'assurer une dynamique de l'observateur 5 fois plus grande que celle du système.
Soit la matrice K de retour d'état.

Exercice 3:

En posant

$$x = \begin{pmatrix} \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} \end{pmatrix}$$

La représentation d'état d'un système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -0.0895 & -0.286 & 0 \\ -0.0439 & -0.272 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.0145 \\ -0.0122 \\ 0 \end{pmatrix} \delta \\ y = (0 \quad 0 \quad 1)x \end{cases}$$

1 – Calculer la fonction de transfert du système

2 - Déterminer le gain $K = (k_1, k_2, k_3)$ du contrôleur par retour d'état pour que les pôles du système en boucle fermée soient égales à $(-0.2 ; -0.2+0.2j ; -0.2+0.2j)$.

2 – Calculer le gain J de l'observateur permettant d'assurer une dynamique de l'observateur 2 fois plus grande que celle du système.

Série 4 :

Exo 2 :

1) calculer $K = [k_1 \ k_2]$

$$D_o(p) = p^2 + \underbrace{2\xi\omega_n}_{\omega_0} p + \omega_n^2$$

$$= p^2 + 4\omega_0 p + 4\omega_0^2$$

$$= \det(pI - A + BK)$$

$$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \underbrace{-\omega_0^2 - k_1}_{-a_0} & \underbrace{-k_2}_{-a_1} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \omega_0^2 + k_1 = 4\omega_0^2 \Rightarrow k_1 = 3\omega_0^2 \\ k_2 = 4\omega_0 \Rightarrow k_2 = 4\omega_0 \end{cases}$$

2) calculer le gain L de l'observation

$$\xi = 1$$

$$\omega_n = 10\omega_0$$

$$F = A - LC \text{ stable}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(pI - A + LC) = p^2 + 20\omega_0 p + 100\omega_0^2$$

ne change pas la représentation

$$A_0 = A_c = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$C_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A - LC = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_0^2 - l_1 \\ 1 & -l_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \omega_0^2 + l_1 = 100 \omega_0^2 \\ l_2 = 20 \omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 99 \omega_0^2 \\ l_2 = 20 \omega_0^2 \end{cases}$$

$$\det(pI - A + LC) = p^2 + 20\omega_0 p + 100\omega_0^2 = (p + 10\omega_0^2)^2$$

$$\det \begin{vmatrix} p + l_1 & -1 \\ \omega_0^2 + l_2 & p \end{vmatrix}$$

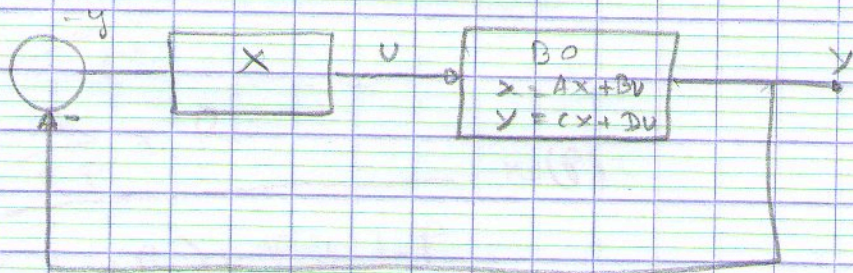
$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2\omega_0$$

$$\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_2 = -10\omega_0$$

$$L = \begin{pmatrix} 80\omega_0 \\ 99\omega_0^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ u = -K\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \end{cases}$$



Ziegler PID

Exercice 3:

$$\begin{aligned} FT &= C(PI - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{0,0122p + 0,00045}{p(p^2 + 0,315p + 0,0179)} \end{aligned}$$

Les pôles d'observation
il est 2 fois plus
rapid 3x

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$$

$$\det (PI - A + BK) =$$

$$3) \det (PI - A + LC) = (p + 0,4)(p + 0,4 + 0,4j)(p + 0,4 - 0,4j)$$

Samedi: 14.12.2013

Serie 04

exercice 01

Rappel Theoreme de l'observateur dans la commande

Com

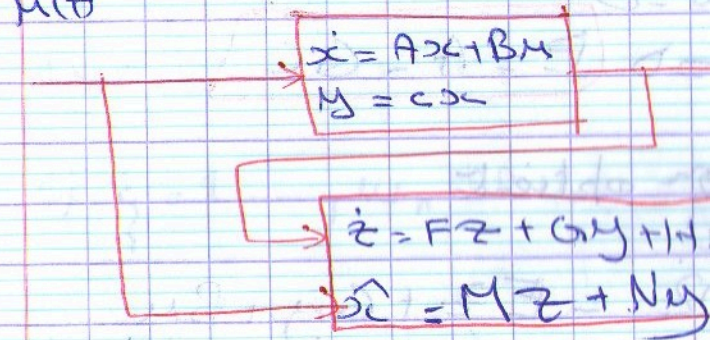
1) Le rôle de l'observateur dans la commande des système
l'objectif est de reconstruire l'état interne d'un système à l'aide d'un Algorithme dynamique, la disposition appelé observateur

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

l'observateur est un système dynamique qui s'écrit

$$\begin{cases} \dot{z} = Ez + Gy + Hu \\ \hat{x} = Mz + Ny \end{cases}$$

MC



u entrée du système y sortie système

$$z = \hat{P}x + e$$

2) equation de l'observateur

$$\begin{cases} M\hat{P} + N_C = I \\ F\hat{P} + G_C - \hat{P}A = 0 \\ H = \hat{P}B \end{cases}$$

Samedi: 14.12.2013

Théorème de l'observateur

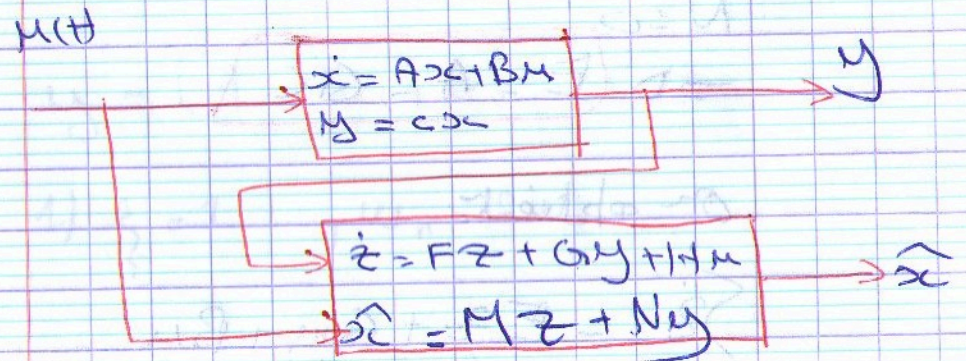
Le but de l'observateur dans la commande des systèmes est de reconstruire l'état interne d'un système à l'aide d'un algorithme dynamique. Cette fonction est appelée observateur.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

L'observateur est un système dynamique décrit par

$$\begin{cases} \dot{z} = Ez + Gy + Hu \\ \hat{x} = Mz + Ny \end{cases}$$



u: entrée du système y: sortie du système

$$z = \hat{x} + e$$

2) équation de l'observateur identique

$$\begin{cases} MT + NC = I \\ FT + GC - TA = 0 \\ H = TB \end{cases}$$

est un observateur régulier

$$E = Ee \text{ et } T = I, M = I$$

$$N = 0$$

$$\Rightarrow E = A - GC$$

on obtient

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = E\hat{z} + G(y - \hat{y}) + Bu \\ \hat{z} = z \\ z = x + e \end{cases}$$

pour obtenir l'observateur identifiant
on impose le polynôme caractéristique de E
et on calcule G de gain
de l'observateur

une deuxième forme de l'observateur identifiant

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + G(y - \hat{y}) + Bu \\ y = C\hat{x} \end{cases}$$

exercice 02

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$1) \zeta = 1, \omega_n = 2\omega_0$$

$$\det(PI - A + BK)$$

$$PI - A = \begin{pmatrix} P & -1 \\ \omega_0^2 & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} K$$

$$\begin{pmatrix} P & -1 \\ \omega_0^2 & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ k_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P & -1 \\ \omega_0^2 + k_2 & P + k_1 \end{pmatrix}$$

$$\det(PI - A + BK) = P^2 + Pk_1 + \omega_0^2 + k_2$$

un observateur régie

$$E = E \text{ et } T = I, M = I$$

ED

$$E = A - GC$$

obtient

$$\dot{z} = E z + G y + B u$$

$$\dot{z} = z$$

$$z = x + e$$

pour obtenir l'observateur identifie
impose le polynome caractere de F

on calcule G de gain

l'observateur

deuxieme forme de l'observateur

avec

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + G(y - \hat{y}) + B u$$

$$y = C \hat{x}$$

exercice 02

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$1) \zeta = 1, \omega_n = 2\omega_0$$

$$\det(PI - A + BK)$$

$$PI - A = \begin{pmatrix} P & -1 \\ \omega_0^2 P & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \ k_2)$$

$$\begin{pmatrix} P & -1 \\ \omega_0^2 P & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -1 \\ \omega_0^2 P + k_1 & P + k_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(PI - A + BK) = P^2 + P k_2 + \omega_0^2 (P + k_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= p + 2 \{ \omega p + \omega^2 \} \\
 &= p^2 + 4\omega_0 p + 4\omega_0^2 \\
 &= (p + 2\omega_0)^2
 \end{aligned}$$

par identification :

$$K_2 = 4\omega_0$$

$$K_1 + \omega_0^2 = 4\omega_0^2 \Rightarrow K_1 = 3\omega_0^2$$

$$K = \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 & 4\omega_0 \end{bmatrix}$$

2) Le gain G de l'observateur
 \Rightarrow la dynamique du système
 s'agit plus grande

$$\begin{aligned}
 20 &= 5 \lambda_r = 5 \times 2\omega_0 \\
 &= 10\omega_0
 \end{aligned}$$

$$G \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$$F = A - GC$$

$$\begin{aligned}
 \det(pI - A + GC) \\
 &= (p + 10\omega_0)^2
 \end{aligned}$$

$$= p^2 + 20\omega_0 p + 100\omega_0^2$$

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega_0^2 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p + g_1 & -1 \\ \omega_0^2 + g_2 & p \end{pmatrix}$$

$$\det(A^*)$$

$$p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2$$

$$(p + \omega_0)^2$$

Identification:

$$= 4\omega_0$$

$$+ \omega_0^2 = 4\omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = 2\omega_0$$

$$3\omega_0^2 \quad 4\omega_0^2$$

Le gain de l'observateur
la dynamique du système
la plus grande

$$= 5\lambda_r = -5 \times 2\omega_0$$

$$= -10\omega_0$$

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$$F = A - GC$$

$$\det(pI - A + GC)$$

$$= (p + 10\omega_0)^2$$

$$= p^2 + 20\omega_0 p + 100\omega_0^2$$

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega_0^2 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p + g_1 & -1 \\ \omega_0^2 + g_2 & p \end{pmatrix} \sim A^*$$

$$\det(A^*)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$P(Pg) + g_2 + w_0^2$$

$$= P^2 + g_1 P + g_2 + w_0^2$$

$$\begin{cases} g_1 = 20w_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_2 + w_0^2 = 100w_0^2 \end{cases}$$

$$= g_2 = 99w_0^2$$

$$g = \begin{pmatrix} 20w_0 \\ 99w_0^2 \end{pmatrix}$$

exercice 03

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -0.0895 & -0.286 & 0 \\ -0.0434 & -0.272 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

1) calcul de FT

$$x = \begin{pmatrix} P \\ R \\ Y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} B \\ R \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x}$$

$x = D$

$$\begin{cases} PB = -0.0895B - 0.286 \\ PR = -0.0434B - 0.272R - 0 \\ PY = R \\ Y = Y \end{cases}$$

$$Y = \frac{Y}{B} = \frac{0.0122P + 0.10}{P/P^2 + 0.3615P}$$

$$1) + g_1 + w_0^2$$

$$+ g_1 p + g_2 w_0^2$$

$$g_1 = 20 w_0$$

$$g_2 + w_0^2 = 100 w_0^2$$

$$= g_2 = 99 w_0^2$$

$$\begin{pmatrix} 20 w_0 \\ 99 w_0^2 \end{pmatrix}$$

exercice 03

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -0.0895 & -0.286 & 0 \\ -0.0439 & -0.272 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.0145 \\ -0.0122 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

1) calcul de FT

$$x = \begin{pmatrix} P \\ R \\ \psi \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} B \\ R \\ \psi \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} PB \\ PR \\ P\psi \end{pmatrix}$$

$$x = D$$

$$\begin{cases} PB = -0.0895B - 0.286R + 0.0145 \\ PR = -0.0439B - 0.272R - 0.0122 \\ P\psi = R \\ \gamma = \psi \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{\psi}{\delta} = \frac{0.0122P + 0.00055}{P/P^2 + 0.3615P + 0.179}$$

2 pole

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = -0.0362$$

$$P_3 = -0.3253$$

$$K = (K_1 \quad K_2 \quad K_3)$$

$$\det |PI - A + BK|$$

$$= (P + 0.2)(P^2 + 0.4P + 0.08)$$

$$\text{Poles: } -0.2, -0.2 + 0.2j, -0.2 - 0.2j$$

$$\begin{array}{r|l} P + 0.895 + 0.015K_1 & 0.286 + 0.0145K_2 \\ 0.0439 - 0.0122K_1 & \\ 0 & \end{array}$$

$$P^3 + 0.6P^2 + 0.16P + 0.06$$

$$K = (41.3559 \quad 29.6025 \quad -3.158)$$

3) $G \rightarrow 2$ fois plus

$$\det |PI - A + 6C|$$

$$(2 + 0.4)(P^2 + 0.8P + 0.08)$$

$$\begin{array}{r|l} P + 0.089 & 0.2 \\ 0.0439 & P + 0.8 \\ 0 & -1 \end{array}$$

$$= P^3 + 1.2P^2 + 0.24P + 0.06$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4.1448 \\ 3.6393 \\ 0.8385 \end{pmatrix}$$

pole

$$-0.0362$$

$$-0.3253$$

$$(K_1 \quad K_2 \quad K_3)$$

$$T | PI - A + BK$$

$$(P + 0.2)(P^2 + 0.4P + 0.08)$$

$$(-0.2, -0.2 + 0.2j, -0.2 - 0.2j)$$

$$5 + 0.015K_1 \quad 0.286 + 0.0145K_2$$

$$-0.0122K_3$$

$$P^2 + 0.16P + 0.06$$

$$(41.3559 \quad 29.6025 \quad -3.458)$$

$$3) G \rightarrow 2 \text{ fois plus grand}$$

$$\det |PI - A + 6C|$$

$$(2 + 0.4)(P^2 + 0.8P + 0.32)$$

$$\begin{vmatrix} P + 0.089 & 0.28 & y_1 \\ 0.0439 & P + 0.17 & y_2 \\ 0 & -1 & P + 0.32 \end{vmatrix}$$

$$= P^3 + 1.2P^2 + 0.44P + 0.128$$

$$\begin{pmatrix} 4.7148 \\ 3.6393 \\ 0.8385 \end{pmatrix}$$