



Série de TD N° : 3

Diagonalisation et trigonalisation des matrices

Durée du TD : 2 séances de 1h30.

Exercice 1.

Déterminer si les deux matrices suivantes sont diagonalisables sur \mathbb{R} . Lorsque c'est le cas, les diagonaliser puis calculer leur puissance 100-ième

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{bmatrix}.$$

- (i) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que 2 soit valeur propre de la matrice A .
- (ii) Déterminer ses éléments propres et montrer que la matrice A est diagonalisable.

Exercice 3.

Déterminer s'il existe une valeur de a pour laquelle la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 10 - 5a & -16 + 10a \\ 5 - 3a & -8 + 6a \end{bmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 4.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{bmatrix}$$

soit diagonalisable.

Exercice 5.

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A est-elle diagonalisable? Montrer que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 6.

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Démontrer que A est trigonalisable sur \mathbb{R} et trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 7.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 qui dans la base canonique est représenté par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (i) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A .
- (ii) Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
- (iii) Donner en le justifiant, mais sans calcul, le polynôme minimal de A .
- (iv) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.