А. Я. Дороговцев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

СБОРНИК ЗАДАЧ

КИЕВ
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1987

22.161я73
Д69

Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования СССР для использования в учебном процессе студентами математических специальностей вузов

УДК 517 (031)

Математический анализ : Сборник задач / А. Я. Дороговцев — К. : Вища шк. Головное изд-во, 1987.— 408 с.

Представлены задачи по всем основным разделам курса математического анализа. Особое внимание уделено простым содержательным задачам, разъясняющим наиболее важные понятия и факты, а также нестандартным, требующим нешаблонного мышления, смекалки и имеющим интересные решения.

Некоторые задачи объединены в циклы и носят характер посильных исследований для студентов. Все задачи расположены в порядке возрастания трудности. К ним даны ответы, а к большинству — указания к их решению. Имеются задачи олимпиадного типа.

Для студентов математических специальностей вузов. Сборником могут пользоваться руководители студенческих математических кружков и организаторы студенческих математических олимпиад.

Рецензенты: доктор физико-математических наук В. А. Ильин, кандидат физико-математических наук В. В. Тихомиров (Московский государственный университет), кандидат физико-математических наук В. И. Чехлов (Московский физико-технический институт)

Редакция учебной и научной литературы
по математике и физике
Зав. редакцией *Ю. Е. Кострица*

Д $\frac{1702050000-057}{М211\ (04)-87}$ 129—87

ОГЛАВЛЕНИЕ

• ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс математического анализа является основным в математическом образовании студентов ряда факультетов университетов и технических вузов. Глубокое понимание курса и овладение его методами может быть достигнуто путем систематического самостоятельного решения задач. Именно процесс активного продумывания материала при решении задач помогает выработать правильные интуитивные представления о глубоких и абстрактных понятиях математического анализа. При этом наибольшую пользу начинающим приносит решение нестандартных задач, требующих известной независимости мышления, изобретательности и т. п.

В книге приведены задачи по всем основным разделам курса. При отборе задач учтены изменения последних лет в программе курса, а также современные тенденции преподавания математики. В частности, представлены задачи по ряду новых разделов. Меньше, чем обычно, отведено места задачам технического характера, а также задачам с прикладным содержанием. Такие задачи хорошо представлены, например, в следующих известных учебных пособиях:

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.— 9-е изд.— М. : Наука, 1977.— 528 с.

Сборник задач по математическому анализу / **Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.**— М. : Наука, 1984.— 592 с.

Основное внимание уделено простым содержательным задачам, разъясняющим наиболее важные понятия и факты, задачам нестандартного характера с интересными решениями. Часть задач объединены в отдельные циклы, которые носят характер посильных исследований для студентов. Имеются также задачи олимпиадного типа.

Все задачи расположены в соответствии с возрастанием трудности и предназначены для самостоятельного решения. Наиболее сложные задачи помечены звездочкой. Для контроля даны ответы, к большинству задач — указания к их решению. Но не следует спешить заглядывать в ответы. Обращаться к указаниям желательно только после существенных усилий по решению задачи. К ответам и указаниям нужно обращаться и тогда, когда задача решена самостоятельно. Предложенные указания и решения должны быть детально разобраны и восстановлены полностью по двум причинам. Во-первых, только полно и тщательно изложенное математическое рассуждение гарантирует то, что задача решена. Во-вторых, в указаниях и решениях во

многих случаях приведены типичные идеи и методы рассуждений. В указаниях к олимпиадным задачам даны также ссылки на дополнительную литературу.

Теоретический материал, необходимый для решения задач, содержится в университетском курсе математического анализа. Для решения большей части задач достаточно и втузовского курса. В частности, можно пользоваться следующими книгами (в скобках указаны главы задачника, для решения задач из которых данная книга содержит необходимый материал):

Зорич В. А. Математический анализ: В 2 ч.— М. : Наука, 1981—1984.— Ч. 1.— 544 с.; Ч. 2.— 640 с. (гл. I—XVI);

Никольский С. М. Курс математического анализа: В 2 т.— М. : Наука, 1973—1975.— Т. 1.— 432 с.; Т. 2.— 408 с. (гл. I—VIII, XI—XVI);

Кудрявцев Л. Д. Математический анализ: В 2 т.— М. : Высшая школа, 1970.— Т. 1—592 с.; Т. 2.— 422 с. (гл. I—VIII, XI—XIV, XVI);

Дороговцев А. Я. Математический анализ. Справочное пособие.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1985.— 528 с. (гл. I—XVI).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\forall$ — для всех, для каждого
$\exists$ — существует
$\exists!$ — существует точно один
$:=$ — равно по определению
$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел
$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел
$\mathbf{Q}$ — множество всех рациональных чисел
$\mathbf{R}$ — множество всех действительных чисел
$\mathbf{C}$ — множество всех комплексных чисел
$\mathbf{R}^m$ — m-мерное векторное пространство
f: $A \to B$ или $A \ni x \mapsto f(x) \in B$ — функция (отображение, преобразование), определенная на множестве A и принимающая значения во множестве B

$f(A) := \{f(x) | x \in A\}$

$f^{-1}(B) := \{x | f(x) \in B\}$

$\max\limits_A f$ $(\min\limits_A f)$ — наибольшее (наименьшее) значение функции f на A

$\sup A$ $(\inf A)$ — точная верхняя (нижняя) грань множества A действительных чисел

$$\operatorname{sign} a := \begin{cases} 1, & a > 0; \\ 0, & a = 0; \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

$[a]$ — целая часть числа $a \in \mathbf{R}$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$f(a-) = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$ — предел слева функции f в точке a

$f(a+) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ — предел справа функции f в точке a

O — отношение подчиненности

o — отношение пренебрежимости

$f \sim g,\ x \to x_0$ — отношение эквивалентности функций f и g при $x \to x_0$

$\mathbf{C}(A)$ — множество всех функций $f\colon A \to \mathbf{R}$, непрерывных на множестве A

$\mathbf{C}_b(A)$ — множество всех функций $f\colon A \to \mathbf{R}$, непрерывных на множестве A и ограниченных на множестве A.

$\mathbf{C}(A, B)$ — множество всех функций $f\colon A \to B$, непрерывных на множестве A

$f'_-(a)$ $(f'_+(a))$ — производная слева (справа) действительной функции f в точке a

$\mathbf{C}^n(A)$ — множество всех функций $f\colon A \to \mathbf{R}$ $(f\colon A \to \mathbf{R}^m)$, имеющих непрерывные на A производные порядка n (компоненты которых имеют непрерывные на A производные порядка n) $\mathbf{C}^\infty(A) := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{C}^n(A)$

$\mathbf{Lip}_\alpha([a, b])$ — класс всех функций $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих на отрезке $[a, b]$ условию Липшица с показателем α

$\mathbf{R}([a, b])$ — множество всех действительных функций, интегрируемых по Риману по отрезку $[a, b]$

$\mathbf{RS}([a, b], \alpha)$ — множество всех действительных функций, интегрируемых по отрезку $[a, b]$ относительно функции α

$\mathbf{BV}([a, b])$ — множество всех функций ограниченной вариации на $[a, b]$

$\mathrm{V}(f, [a, b])$ — вариация функции f на отрезке $[a, b]$

$\{a_n(x),\ x \in A : n \geqslant 1\}$ или $\{A \ni x \mapsto a_n(x) : n \geqslant 1\}$ — последовательность действительных функций, заданных на множестве A

(X, ρ) — метрическое пространство с метрикой (расстоянием) ρ

$B(x_0, r) := \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$

$\overline{B}(x_0, r) := \{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leqslant r\}$

$S(x_0, r) := \{x \in X \mid \rho(x, x_0) = r\}$

$x_n \to x,\ n \to \infty$ в (X, ρ) — последовательность элементов $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset X$ сходится к элементу $x \in X$ при $n \to \infty$ в метрике ρ

$f'_{\vec{a}}(\vec{x})$ — производная по направлению $\vec{a}$ действительной функции нескольких переменных в точке $\vec{x}$

$$f'_i(\vec{x}) := \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$$

$$f''_{ij}(\vec{x}) := \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}$$

$\nabla f(\vec{x}) := \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \left(\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_m}\right)$ — градиент действительной функции от m переменных в точке $\vec{x}$

$\int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x}$ — интеграл Римана от действительной функции m переменных по множеству A

Глава I ● ВВЕДЕНИЕ

§ 1. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗНАКИ. ДЕЙСТВИЯ НАД МНОЖЕСТВАМИ

I.1.1. Определить множество A, если

1) $\forall x \in A \quad \exists n \in \mathbf{N} \ : \ 2n = x;$

2) $\forall x \in A \quad \exists m \in \mathbf{Z} \quad \exists n \in \mathbf{N} \ : \ \dfrac{m}{n} = x;$

3) $\forall x \in A \quad \exists y \in \mathbf{R}, \quad y \geqslant 1 \ : \ 2^x = y;$

4) $\forall a \in A \quad \exists x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 + 2ax + a = 0;$

5) $\forall a \in A \quad \exists x \in \mathbf{R} \ : \ 3a + 2ax - x^2 > 0;$

6) $\forall a \in A \quad \exists b \in \mathbf{R} \quad \exists x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 + 2ax + b^2 + 1 < 0.$

I.1.2. Верны ли следующие высказывания:

1) $\exists n \in \mathbf{N} \ : \ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \in \mathbf{N};$

2) $\exists n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant 10 \quad \forall m \in \mathbf{N} \ : \ \sqrt{nm^2} \in \mathbf{N};$

3) $\exists n \in \mathbf{N} \quad \forall m \in \mathbf{N} \ : \ \sqrt{mn} \in \mathbf{N};$

4) $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists r_1 \in \mathbf{Q} \quad \exists r_2 \in \mathbf{Q} \ : \ r_1 r_2 + r_1 = n;$

5) $\forall a \in \mathbf{R} \quad \exists x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 + ax = 0;$

6) $\forall a \in \mathbf{R} \quad \exists x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 + 2ax + a = 0;$

7) $\exists a \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 - 2ax + a > 0$?

I.1.3. Определить и изобразить на рисунках множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если

1) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 6x + 8 < 0\}, \quad B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 3x < 0\};$

2) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < |x - 3| \leqslant 2\}, \quad B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2|x| < 3\};$

3) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geqslant 0\};$

4) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 > y^3\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 > y^2\};$

5) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}.$

1.1.4. Пусть для $m \in \mathbf{Z}$ и $n \in \mathbf{N}$ множество $A_{mn} = \{x \in \mathbf{R} \mid m < x < m + n\}$. Определить следующие множества:

1) $B_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$;

2) $C_m = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$;

3) $\bigcap\limits_{m=-\infty}^{0} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$;

4) $\bigcap\limits_{m \in \mathbf{Z}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$;

5) $\bigcup\limits_{m \in \mathbf{N}} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$;

6) $\bigcup\limits_{m \in \mathbf{Z}} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}$.

1.1.5. Определить множества $\bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$, $\bigcap\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$, где

1) $A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = \alpha y\}$, $T = (0, +\infty)$ и $T = [-1, 1]$;

2) $A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \alpha x^2\}$, $T = (0, +\infty)$.

1.1.6. Для множеств A и B симметрическая разность $A \triangle B$ есть множество

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Доказать, что

1) $A \triangle A = \varnothing$;

2) $A \triangle \varnothing = A$;

3) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

4) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$ для любого C.

1.1.7. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные множества. Доказать равенство

$$\bigcap_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (A_i \cup A_j) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_j.$$

1.1.8. Пусть $\{A_n : n \geqslant 1\}$ и $\{B_n : n \geqslant 1\}$ — две последовательности множеств. Доказать включение

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \triangle B_n).$$

1.1.9. Пусть $\{A_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность множеств. Записать с помощью операций объединения и пересечения множеств: 1) нижний предел $\varliminf\limits_{n \to \infty} A_n$ последовательности множеств $\{A_n : n \geqslant 1\}$,

равный множеству всех тех элементов, которые входят во все множества последовательности, исключая конечное число множеств;

2) верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ последовательности множеств $\{A_n : n \geqslant 1\}$ равный множеству всех тех элементов, которые входят в бесконечное число множеств последовательности.

1.1.10. Пусть $\{A_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность множеств. Доказать, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Привести пример последовательности множеств, для которой все включения являются строгими.

1.1.11. Пусть последовательность множеств $\{A_n : n \geqslant 1\}$ монотонна, то есть либо

1) $\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad A_n \subset A_{n+1}$,

либо

2) $\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad A_n \supset A_{n+1}$.

Проверить, что в случае 1)

$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

а в случае 2)

$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

1.1.12. Доказать следующие равенства:

1) $\overline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \overline{A}_n$,

2) $\overline{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \overline{A}_n$.

1.1.13. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ множество A_n есть множество всех простых делителей числа n. Определить

$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n, \quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n.$$

§ 2. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ (ОТОБРАЖЕНИЯ)

1.2.1. Функция $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ задана соотношением

$$\mathbf{Z} \ni n \quad \mapsto \quad f(n) = 1 + n^2 \in \mathbf{N}.$$

Определить

1) $f(\{0\})$;

2) $f(\{1\})$;

3) $f^{-1}(\{1\})$;

4) $f^{-1}(\{2\})$. Доказать, что $f(\mathbf{Z}) = f(\mathbf{N}) \cup \{1\}$.

1.2.2. Функция $f:\ \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$ задана соотношением

$$\mathbf{Z}^2 \ni (m, n) \mapsto (m, 0) \in \mathbf{Z}^2.$$

Определить

1) $f(A)$, $A = \{(0, n) \mid n \in \mathbf{Z}\}$;

2) $f(B)$, $B = \{(n, n) \mid n \in \mathbf{Z}\}$;

3) $f^{-1}(C)$, $C = \{(m, 0) \mid m \in \mathbf{N}\}$;

4) $f^{-1}(D)$, $D = \{(m, 0) \mid m \in \mathbf{Z}\}$.

1.2.3. Функция $f:\ \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ задана соотношением

$$\mathbf{Z} \ni n \mapsto f(n) = n(n+1) \in \mathbf{Z}.$$

Определить

1) $f^{-1}(\{1\})$;

2) $f^{-1}(\{2\})$;

3) $f^{-1}(\mathbf{N})$;

4) $f^{-1}(A)$, $A = \{1 - n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

1.2.4. Являются ли следующие отображения инъекцией, сюръекцией, биекцией:

1) $\mathbf{Z} \ni n \mapsto n + (-1)^n \in \mathbf{Z}$;

2) $\mathbf{Z} \in n \mapsto 2 - n \in \mathbf{Z}$;

3) $\mathbf{Z} \ni n \mapsto (-1)^n n \in \mathbf{Z}$;

4) $\mathbf{Z} \ni n \mapsto n^2 \in \mathbf{Z}$;

5) $\mathbf{Z}^2 \ni (m, n) \mapsto (n, m) \in \mathbf{Z}^2$;

6) $\mathbf{Z}^2 \ni (m, n) \mapsto (m + 1, n - 2) \in \mathbf{Z}^2$;

7) $\mathbf{Z}^2 \ni (m, n) \mapsto (m + n, m - n) \in \mathbf{Z}^2$;

8)* $\mathbf{N}^2 \ni (m, n) \mapsto \left(m + \frac{1}{2}(m + n - 2)(m + n - 1)\right) \in \mathbf{N}$;

9)* $A \ni (m, n) \mapsto (1 + m + |m| + n + (|m| + n)^2) \in \mathbf{N}$,
где $A = \{(m, n) \mid m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$?

1.2.5. Привести пример биекции $f:\ A^2 \to A$ такой, что

$$\forall \{m, n\} \subset A\ :\ f(m + 1, n) > f(m, n) \text{ и } f(m, n + 1) > f(m, n),$$

если

1) $A = \mathbf{N}$;

2) $A = \mathbf{Z}$.

1.2.6. Пусть X и Y — конечные множества, причем $|X| = m$, $|Y| = n$. Сколько всего существует

1) функций $f : X \to Y$;
2) инъекций $f : X \to Y$;
3) биекций $f : X \to Y$?

1.2.7. Пусть для множеств X и Y отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ таковы, что

$$\forall x \in X \ : \ g(f(x)) = x;$$
$$\forall y \in Y \ : \ f(g(y)) = y.$$

Доказать, что f и g — биекции и $g = f^{-1}$.

1.2.8. Привести пример множества X и отображения $f : X \to X$, чтобы f являлось сюръекцией, а не инъекцией. Существует ли такое отображение для конечного множества X?

1.2.9. Функция $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ задана соотношением

$$\mathbf{N}^2 \ni (m, n) \ \mapsto \ \max(m, n) \in \mathbf{N}.$$

Является ли f сюръекцией? инъекцией?

§ 3. ПОНЯТИЕ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА. СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1.3.1. Доказать, что множества $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{Z}^2$ равномощны (и счетны).

1.3.2. Доказать, что множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счетно.

1.3.3. Доказать, что множество $\mathbf{N}$ можно представить в виде

$$\mathbf{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где при каждом $n \geqslant 1$ множество $A_n \subset \mathbf{N}$, счетно и

$$A_n \cap A_m = \varnothing, \quad n \neq m.$$

1.3.4. Доказать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

1.3.5. Доказать, что множество всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты, счетно.

1.3.6. Пусть A — множество точек на прямой, причем расстояние между любыми двумя точками этого множества больше 1. Доказать, что множество A конечно или счетно.

1.3.7. Пусть A — бесконечное множество и a — некоторый элемент, $a \notin A$. Доказать, что множества A и $A \cup \{a\}$ равномощны.

1.3.8. Пусть A — бесконечное множество и $A \cap \mathbf{N} = \varnothing$. Доказать, что множества A и $A \cup \mathbf{N}$ равномощны.

1.3.9*. Множество A всех бесконечных последовательностей, составленных из 0 и 1, несчетно и имеет по определению мощность континуум. Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум.

1.3.10. Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей рациональных чисел имеет мощность континуум.

I.3.11. Пусть $f\colon X \to Y$ — сюръекция. Доказать, что Y равномощно некоторому подмножеству множества X. В частности, если X счетно, то Y не более чем счетно.

I.3.12*. Пусть X — произвольное множество, а 2^X — множество всех подмножеств множества X, включая $\varnothing$ и X. Доказать, что множества X и 2^X не равномощны.

I.3.13*. Принципом математической индукции называется следующее утверждение. Пусть M — такое множество, что

1) $1 \in M$;

2) $\forall n \in \mathbf{N}$ из того, что $n \in M$ следует, что $(n+1) \in M$. Тогда $\mathbf{N} \subset M$. В частности, если $M \subset \mathbf{N}$, то $M = \mathbf{N}$. Это утверждение является **аксиомой натуральных чисел.**

Доказать, что принцип математической индукции равносилен утверждению: любое подмножество множества $\mathbf{N}$ имеет наименьший элемент.

I.3.14. Доказать **неравенство Я. Бернулли**

$$\forall \alpha > -1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \ : \ (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha.$$

I.3.15. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbf{N} \ : \ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

I.3.16. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbf{N} \ : \ \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

I.3.17. Доказать, что для любых $x \in (0, 2\pi)$ и $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

I.3.18. Доказать, что для $n > 8$ $n^3 < 2^{n+1}$.

I.3.19. Доказать, что для $n > 2$

$$n^{\frac{n}{2}} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

I.3.20. Доказать, что для $n \geqslant 2$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right).$$

I.3.21. Доказать, что для $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

I.3.22. Доказать, что для $n \geqslant 1$

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1.$$

1.4.1. Доказать, что не существует числа $x \in \mathbf{Q}$ такого, что 1) $x^2 = 2$; 2) $x^2 = 6$; 3) $x^6 + x - 1 = 0$.

1.4.2. Доказать, что не существует числа $x \in \mathbf{Q}$ такого, что 1) $10^x = 2$; 2) $10^x = 3$; 3) $10^x = 15$.

1.4.3*. Пусть $\alpha = r\pi$, $r \in \mathbf{Q}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что

1) $\sin\alpha \notin \mathbf{Q}$, $r \neq \frac{1}{6}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha \notin \mathbf{Q}$, $r \neq \frac{1}{4}$.

Неотрицательное действительное (вещественное) число есть бесконечная последовательность цифр с одной запятой между ними, то есть бесконечная десятичная дробь вида

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots, \tag{*}$$

где

$$\alpha_0 \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \ :\ \alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Далее рассматриваются дроби вида (*) без цифры 9 в периоде.

Неотрицательное число a вида (*) называется **положительным**, если

$$\exists\, n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \qquad \alpha_n > 0.$$

Отрицательное действительное число определяется как положительное со знаком «—», при этом правила действий со знаком «—» те же, что и во множестве $\mathbf{Q}$.

Два неотрицательных числа вида (*) равны, если равны все их соответствующие знаки.

Число $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ меньше числа $b = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$, если либо $\alpha_0 < \beta_0$, либо

$$\exists\, n \in \mathbf{N} \quad \forall\, k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \ :\ \alpha_k = \beta_k \text{ и } \alpha_n < \beta_n.$$

Периодические дроби вида (*) (в том числе те, которые имеют цифру 0 в периоде) образуют **множество рациональных** чисел $\mathbf{Q}$. Остальные дроби называются **иррациональными числами**. Множество всех действительных чисел обозначается $\mathbf{R}$.

1.4.4. Доказать, что для любых чисел a и b из $\mathbf{R}$ выполняется одно и только одно из соотношений:
1) $a < b$, 2) $a = b$, 3) $a > b$.

1.4.5. Доказать, что

$$\forall\, a \in \mathbf{R} \quad \exists\, m \in \mathbf{N} \ :\ m > a$$

(аксиома Архимеда).

1.4.6. Пусть для чисел a и b из $\mathbf{R}$ таких, что $a < b$, множество

$$(a, b) := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\},$$

(a, b) называется **интервалом** с концами a и b. Доказать, что множество $(a, b) \cap \mathbf{Q}$ счетно.

1.4.7. Доказать, что любое семейство попарно непересекающихся интервалов на прямой $\mathbf{R}$ не более чем счетно.

1.4.8. Доказать, что любое семейство интервалов с концами из $\mathbf{Q}$ на прямой $\mathbf{R}$ не более чем счетно.

1.4.9.* Пусть $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$, $a < b$, и

$$[a, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Доказать, что множества $[a, b]$ и (a, b) равномощны.

1.4.10. Доказать, что множество $[0, 1]$ и множество $[0, 1] \setminus \mathbf{Q}$ равномощны.

1.4.11. Доказать, что множества $(0, 1)$ и $\mathbf{R}$ равномощны.

1.4.12. Доказать, что множество $\mathbf{Z}$ не является ограниченным сверху и снизу.

1.4.13. Доказать, что множество чисел

$$\left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbf{N}\right\}$$

ограничено и не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов.

1.4.14. Имеет ли наибольший и наименьший элементы множество

$$\{a_n = n^2 2^{-n} \mid n \in \mathbf{N}\}?$$

1.4.15. Найти наибольший и наименьший элементы множества

$$\left\{a_n = \frac{3^n}{n!} \;\middle|\; n \in \mathbf{N}\right\}.$$

1.4.16*. Доказать, что множество

$$\{\sin n \mid n \in \mathbf{Z}\}$$

ограничено и не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов.

Указание. Использовать без доказательства то, что $\pi \overline{\in} \mathbf{Q}$.

1.4.17. Найти точные грани множества

$$\left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbf{N}\right\}.$$

1.4.18. Найти точные грани множества

$$\left\{\frac{n}{n+3}(2 + (-1)^n) \;\middle|\; n \in \mathbf{N}\right\}.$$

1.4.19. Пусть $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \varnothing$, A — ограничено. Положим

$$I := \bigcap \{[a, b] \mid [a, b] \supset A\}.$$

Доказать, что

$$I = [\inf A, \sup A].$$

1.4.20. Найти точную нижнюю грань множества

$$A = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \;\middle|\; m \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{N}\right\}.$$

1.4.21. Найти точные грани множества

$$A = \left\{\frac{mn}{4m^2 + n^2} \;\middle|\; m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\right\}.$$

1.4.22. Найти точные грани множества

$$A = \left\{\frac{m}{m+n} \;\middle|\; m \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{N}\right\}.$$

1.4.23. Найти точные грани множества

$$A = \left\{ \frac{m}{|m|+n} \;\middle|\; m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

1.4.24. Пусть $A \subset [0, +\infty)$ и

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists x_n \in A \ : \ x_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Доказать, что $\inf A = 0$.

1.4.25. Пусть $A \subset B \subset \mathbf{R}$, причем $A \neq \varnothing$ и B — ограничено сверху. Доказать, что $\sup A \leqslant \sup B$

1.4.26. Пусть A и B — ограниченные подмножества $\mathbf{R}$, причем $A \neq \varnothing$,

$$\forall x \in A \quad \exists y \in B \ : \ x \leqslant y.$$

Доказать, что $\sup A \leqslant \sup B$.

1.4.27. Для ограниченных непустых подмножеств A и B множества $\mathbf{R}$ доказать следующие неравенства:

$$\sup (A \cup B) = \max (\sup A, \sup B),$$

$$\inf (A \cup B) = \min (\inf A, \inf B).$$

1.4.28. Пусть множество $A \subset [1, +\infty)$ таково, что

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists r_n \in A \cap \mathbf{Q} \ : \ 2r_n - r_n^2 > 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Найти $\inf A$.

1.4.29. Пусть A и B — ограниченные непустые подмножества $\mathbf{R}$ и

$$C = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Доказать, что $\sup C = \sup A + \sup B$.

1.4.30. Найти

1) $\inf\limits_{n \in \mathbf{N}} \sup\limits_{m \in \mathbf{N}} \dfrac{m-n}{m+n}$; 2) $\sup\limits_{m \in \mathbf{N}} \inf\limits_{n \in \mathbf{N}} \dfrac{m-n}{m+n}$;

2) $\sup\limits_{m \in \mathbf{N}} \inf\limits_{n \in \mathbf{N}} \dfrac{m}{n+m}$; 4) $\inf\limits_{n \in \mathbf{N}} \sup\limits_{m \in \mathbf{N}} \dfrac{m}{n+m}$.

1.4.31. Как связаны точные грани ограниченных множеств A и B, если $A \neq \varnothing$

1) $A \subset \mathbf{R}$, $B = \{-x \mid x \in A\}$;

2) $A \subset \mathbf{R}$, $B = \{x^3 \mid x \in A\}$;

3) $A \subset \mathbf{R}$, $B = \{x^2 \mid x \in A\}$;

4) $A \subset \mathbf{R}$, $B = \{x + a \mid x \in A\}$, $a \in \mathbf{R}$;

5) $A \subset \mathbf{R}$, $B = \{ax \mid x \in A\}$, $a \in \mathbf{R}$?

1.4.32. Предположим, что для функций $f : A \to \mathbf{R}$, $g : A \to \mathbf{R}$ множества

$$\{f(x) \mid x \in A\}, \quad \{g(x) \mid x \in A\}$$

ограничены. Доказать следующие неравенства:

$$\inf_{x\in A}(f(x)+g(x))\geqslant\inf_{x\in A}f(x)+\inf_{x\in A}g(x),$$

$$\sup_{x\in A}(f(x)+g(x))\leqslant\sup_{x\in A}f(x)+\sup_{x\in A}g(x).$$

1.4.33. Доказать, что для любых $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$ справедливы следующие равенства:

$$\min(a, b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$

$$\max(a, b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|).$$

1.4.34*. Существует ли многочлен P с целыми коэффициентами и такой, что

1) отображение $P: \quad \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ не является инъекцией и
2) отображение $P: \quad \mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ является инъекцией?

1.4.35*. Пусть

$$A=\{\sqrt{m}-\sqrt{n} \quad | \quad m\in\mathbf{N},\quad n\in\mathbf{N}\}.$$

Доказать, что любой интервал (a, b) содержит бесконечное число элементов множества A.

1.4.36*. Пусть $[a]$ — целая часть числа a, $\{a\}:=a-[a]$. Доказать, что

1) $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{\sqrt{n}\}=1$; 2) $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{\lg n\}=1$;

3) $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{\sqrt[3]{n}\}=1$; 4) $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\sin n=1$.

Указание. В 4) использовать без доказательства то, что $\pi\notin\mathbf{Q}$.

1.4.37. Пусть $[a_n, b_n]$, $n\in\mathbf{N}$ — последовательность отрезков на $\mathbf{R}$ таких, что каждые два из них имеют, по крайней мере, одну общую точку. Доказать, что существует точка, принадлежащая каждому из отрезков.

1.4.38. Доказать, что на плоскости существуют точки A, B и C такие, что для любой точки P плоскости не все расстояния $|AP|$, $|BP|$, $|CP|$ рациональны.

1.4.39. Доказать, что для любых чисел a, b, c из $\mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\leqslant|b-c|.$$

1.4.40. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — два набора действительных чисел, где $n\in\mathbf{N}$. Доказать, что

$$|\max_{1\leqslant k\leqslant n}a_k-\max_{1\leqslant k\leqslant n}b_k|\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k-b_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|.$$

1.4.41. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$, где $n\in\mathbf{N}$,— два набора действительных чисел таких, что

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2=1,\quad \sum_{k=1}^{n}b_k^2=1.$$

Используя неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |b_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(a_k^2 + b_k^2) = 1,$$

доказать неравенство Коши

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2$$

для любых наборов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ действительных чисел. Показать, что знак равенства возможен тогда и только тогда, когда

$$\lambda \alpha_k = \mu \beta_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

где λ и μ — действительные числа, $|\lambda| + |\mu| \neq 0$.

1.4.42. Доказать, что для любого $n \geqslant 2$ и любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1 a_2\right).$$

1.4.43. Пусть для заданных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из $\mathbf{R}$ таких, что $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| > 0$,

$$A = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbf{R}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n; \quad \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 1\right\}.$$

Найти

$$b = \min\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \mid (x_1, \ldots, x_n) \in A\right\}.$$

1.4.44. Доказать, что для n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant 1,$$

выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant n^2.$$

1.4.45. Какие наборы действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют равенству

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2?$$

1.4.46. Неравенство Коши. Доказать, что для любого $n \in \mathbf{N}$, для любого набора из n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k},$$

причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Для доказательства установить последовательно утверждения.

1. Достаточно рассмотреть случай, когда $n \geqslant 2$,

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, \quad a_1 < a_n.$$

2. Пусть $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$. Проверить, что

$$a_1 < A_n < a_n.$$

3. Установить, что

$$A_n (a_1 + a_n - A_n) - a_1 a_n = (a_1 - A_n)(A_n - a_n) > 0.$$

4. Доказать требуемое неравенство при $n = 2$.

5. Предположить, что неравенство справедливо для набора из $n - 1$ положительных чисел, и применить его к числам

$$a_1 + a_n - A_n, \quad a_2, \ \ldots, \ a_{n-1}.$$

1.4.47. Доказать, что для любого $n \in \mathbf{N}$ и любого набора положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k},$$

причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1.4.48. Доказать, что для $n \in \mathbf{N}$ и $a > 0$ справедливы неравенства

$$1 + \frac{1 - a^{-1}}{n - 1 + a^{-1}} \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant 1 + \frac{a - 1}{n}.$$

1.4.49. Доказать, что при $n \geqslant 3$

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Глава II • ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА

II.1.1. Можно ли расположить рациональные числа отрезка [0, 1] в монотонно возрастающую последовательность? сходящуюся последовательность? Точнее, существует ли биекция f: $\mathbf{N} \to [0, 1] \cap \mathbf{Q}$ такая, что последовательность $f(1), f(2), \ldots, f(n) \ldots$ монотонно возрастает? сходится?

II.1.2. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность, сходящаяся к числу a, $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ — некоторая биекция. Доказать, что последовательность $\{a_{\sigma(n)} : n \geqslant 1\}$ также сходится к числу a.

II.1.3. Доказать, что последовательность

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$$

не имеет предела, то есть проверить, что любое число $a \in \mathbf{R}$ не является пределом этой последовательности.

II.1.4. Пусть последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ не имеет предела. Доказать, что не существует биекции σ: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, для которой последовательность $\{a_{\sigma(n)} : n \geqslant 1\}$ имеет предел.

II.1.5. Пусть $a_n \to a$, $n \to \infty$. Найти предел, если он существует, последовательности

1) $\{a_{n+1} - a_n : n \geqslant 1\}$;

2) $\{a_n + 2a_{n+1} : n \geqslant 1\}$;

3) $\{|a_n| : n \geqslant 1\}$;

4) $\{a_n a_{n+1} : n \geqslant 1\}$;

5) $\{(a_{n+1} - a_n)^n : n \geqslant 1\}$;

6) $\{\max(a_n, a_{n+1}) : n \geqslant 1\}$;

7) $\{[a_n] : n \geqslant 1\}$;

8) $\{\operatorname{sign} a_n : n \geqslant 1\}$, где

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

II.1.6. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ такова, что

$$n^2 (a_{n+1} - a_n) \to a, \quad n \to \infty; \quad a \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что для любых $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ фиксированных

$$n^2(a_{n+k} - a_{n+m}) \to (k-m)\,a, \quad n \to \infty.$$

II.1.7. Последовательность $\{a_n \ : \ n \geqslant 1\}$ положительных чисел такова, что

$$n^2 a_n a_{n+1} \to a, \quad n \to \infty,$$

причем $a > 0$. Какие из следующих последовательностей сходятся:

1) $\{na_n \ : \ n \geqslant 1\}$;

2) $\{n^2 a_n a_{n+2} \ : \ n \geqslant 1\}$;

3) $\{n^2 a_n a_{n+3} \ : \ n \geqslant 1\}$?

II.1.8. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ положительных чисел такова, что

$$a_n + a_n^{-1} \to 2, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что $a_n \to 1$, $n \to \infty$.

II.1.9. Последовательность $\{a_n \ : \ n \geqslant 1\}$ положительных чисел такова, что

$$a_n^2 - a_n \to 2, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что $a_n \to 2$, $n \to \infty$.

II.1.10. Пусть для последовательности $\{a_n \ : \ n \geqslant 1\}$

$$\frac{1}{n} a_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{n} \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

II.1.11. Для числа $a \in \mathbf{R}$ последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ определяется следующими соотношениями:

$$a_1 = a; \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n + \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1.$$

Определить значения a, при которых последовательность сходится.

II.1.12*. Найти предел последовательности $\{a_n \ : \ n \geqslant 1\}$, определяемой соотношениями:

1) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2}$;

$$na_n - a_{n-1} - (n-1)\,a_{n-2} = \frac{2n-3}{(n-1)(n-2)}, \quad n \geqslant 3;$$

2) $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3}$; $(n+1)!\,(a_n - a_{n-2}) + n^2 + n - 1 = 0$, $n \geqslant 3$;

3) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2}$; $a_n = a_{n-2} + \frac{3}{2^{n-1}}$, $n \geqslant 3$;

4) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; $2^{n-1}(a_n - a_{n-2}) = 3n - 2$, $n \geqslant 3$;

5) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} a_n + \frac{n-1}{n} a_{n-1}$, $n \geqslant 2$;

6) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1} a_n$, $n \geqslant 1$;

7) $a_1 \in \mathbf{R}$; $a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 a_n + \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

11.1.13. Пусть $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$ и для некоторого $m \in \mathbf{N}$

$$a_n^m \to a, \quad n \to \infty; \quad a \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что

$$a_n \to \sqrt[m]{a}, \quad n \to \infty.$$

11.1.14. Вычислить предел последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ в следующих случаях:

1) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) \sqrt{k(k+1)}}$, $n \geqslant 1$;

2) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, $n \geqslant 1$;

3) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k2^{-k}$, $n \geqslant 1$;

4) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$, $n \geqslant 1$;

5) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)^2 (2k+1)^2}$, $n \geqslant 1$;

6) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+m)}$, $n \geqslant 1$, $m \in \mathbf{N}$;

7) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+m)}$, $n \geqslant 1$,

$m \in \mathbf{N}$ — фиксировано;

8) $a_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!}$, $n \geqslant 2$;

9) $a_n = \frac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$, $n \geqslant 1$;

10) $a_n = \frac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n+1} k(2n+3-2k)$, $n \geqslant 1$;

11) $a_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}, \quad n \geqslant 2;$

12) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(a+1)(ax+1)\ \ldots\ (ax^{k-1}+1)}, \quad n \geqslant 1,$

где числа $a > 0$ и $x \geqslant 1$ — фиксированы.

II.1.15*. Привести пример ограниченной, не имеющей предела последовательности $\{a_n \ : \ n \geqslant 1\}$, для которой

$$(a_{n+1} - a_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

II.1.16*. Привести пример ограниченной, не имеющей предела последовательности $\{a_n \ : \ n \geqslant 1\}$ положительных чисел, для которой

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1, \quad n \to \infty$$

II.1.17. С помощью неравенства Коши доказать, что

1) $\sqrt[n]{a} \to 1, \quad n \to \infty$, для любого $a > 0$;

2) $\sqrt[n]{n} \to 1, \quad n \to \infty.$

II.1.18. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{an + \sqrt{n} + 2}, \quad a \in \mathbf{R};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+a) - \sqrt{n^4 + bn^3 + 1}}{n+5}, \quad \{a, b\} \subset \mathbf{R};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n + a\sqrt{n} + 1} - \sqrt{n}\right), \quad a \in \mathbf{R};$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{\frac{n+a}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+b}{n-1}}\right), \quad \{a, b\} \subset \mathbf{R};$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{[(n+a)^2]} - n), \quad a \in \mathbf{R};$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + k}};$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}};$

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n};$

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n+1} k 2^{n-k+1} \cdot 3^{k-1}};$

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — фиксированные положительные числа;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{1}}}}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{2^n+5^n}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n}$, $a>1$, $b\in\mathbf{R}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty} n^b a^n$, $|a|<1$, $b\in\mathbf{R}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a\in\mathbf{R}$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+n^b}$, $a>0$, $b\in\mathbf{R}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+\cdots+a_m^{n+1}}{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — фиксированный набор положительных чисел;

22) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n+3b^n}{5a^n+7b^n}$, $a>0$, $b>0$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{1!+2!+\cdots+n!}$;

24) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^\alpha(\sqrt[n]{a}-1))$, $a>0$, $\alpha\in(0, 1)$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1))$;

26) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^\alpha(\sqrt[n]{n}-1))$, $\alpha\in(0, 1)$;

27) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}$;

28) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[\sqrt{n}]{n}$.

II.1.19. Пусть последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ определяется соотношениями

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать существование предела

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n a_n\right)$$

и вычислить его.

II.1.20*. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ определяется следующими соотношениями:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1;$$

$$a_{n+1} = \frac{2n-1}{n} a_n - \frac{n-1}{n} a_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

II.1.21. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — произвольная последовательность положительных чисел. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}}.$$

II.1.22. Последовательность неотрицательных чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$ такова, что

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{n^2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \to 0, \quad n \to \infty.$$

II.1.23. Для последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

II.1.24. Для последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{n}(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

II.1.25*. Последовательность неотрицательных чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$ удовлетворяет соотношениям

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geqslant 3.$$

Найти

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

II.1.26. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность чисел Фибоначчи, то есть

$$a_1 = a_2 = 1; \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geqslant 3.$$

Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

II.1.27. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1; \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \geqslant 0, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что $a_n \to +\infty$, $n \to \infty$.

II.1.28. Вычислить с помощью теоремы Штольца следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(k+1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+3)(2k+1)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{na^n} \sum\limits_{k=1}^{n} ka^k, \quad a > 1$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a^{k-1}}{k}, \quad a > 1$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{m+1}} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(m+k)!}{k!}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k k}{k+1}$.

II.1.29. Пусть $a_n \to a$, $n \to \infty$, $a \in \mathbf{R}$ и

$$A_n := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что $A_n \to a$, $n \to \infty$.

II.1.30. Пусть $a_n \to a$, $n \to \infty$, $a \in \mathbf{R}$ и

$$b_n := \frac{1}{n^2}(1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \cdots + n \cdot a_n), \quad n \geqslant 1.$$

Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} b_n.$$

II.1.31. Пусть $a_n \to a$, $n \to \infty$, $a \in \mathbf{R}$ и

$$b_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{a_1}{\sqrt{1}} + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right).$$

Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} b_n.$$

II.1.32. Пусть $a_n \to a$, $n \to \infty$, $a \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ — фиксированное число с $|\alpha| < 1$ и

$$b_n := a_n + \alpha a_{n-1} + \alpha^2 a_{n-2} + \cdots + \alpha^{n-1} a_1, \quad n \geqslant 1.$$

Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} b_n.$$

II.1.33. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ такова, что

$$(a_{n+1} - a_n) \to a, \quad n \to \infty, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что

$$\frac{a_n}{n} \to a, \quad n \to \infty.$$

II.1.34*. Для последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \to a, \quad n \to \infty;$$

$$n(a_{n+1} - a_n) \to b, \quad n \to \infty, \quad \text{для некоторых } \{a, b\} \subset \mathbf{R}.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится, и найти ее предел.

II.1.35. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ положительных чисел сходится к числу a. Доказать, что

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to a, \quad n \to \infty.$$

II.1.36. Пусть для последовательности $\{a_n : n \geqslant\}$ положительных чисел

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a, \quad n \to \infty, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что

$$\sqrt[n]{a_n} \to a, \quad n \to \infty.$$

Привести пример, показывающий, что обратное утверждение не верно.

II.1.37. Пусть для положительных чисел a и b

$$a_1 = a + b; \quad a_{n+1} = a + b - \frac{ab}{a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Найти выражение для a_n при $n \geqslant 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

II.1.38. Пусть для положительных чисел a и b

$$a_1 = \frac{ab}{a+b}; \quad a_{n+1} = \frac{ab}{a+b-a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Найти выражение для a_n при $n \geqslant 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

II.1.39. Пусть $a_n \to a$, $b_n \to b$, $n \to \infty$. Доказать, что

1) $\min(a_n, b_n) \to \min(a, b), \quad n \to \infty$;

2) $\max(a_n, b_n) \to \max(a, b), \quad n \to \infty$.

II.1.40. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ и $\{b_n : n \geqslant 1\}$ — две последовательности такие, что

$$\forall\, x \in [1, 2] \ : \ a_n + b_n x \to c(x), \quad n \to \infty, \quad c(x) \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ и $\{b_n : n \geqslant 1\}$ сходятся, и определить функцию c.

II.1.41. Пусть $\{a_n, b_n, c_n, d_n \mid n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ и

$$\forall\, x \in [1, 2] \ : \ a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n \to P(x), \quad n \to \infty,$$

где $P(x) \in \mathbf{R}$. Доказать, что каждая из последовальностей

$$\{a_n : n \geqslant 1\}, \quad \{b_n : n \geqslant 1\}, \quad \{c_n : n \geqslant 1\}, \quad \{d_n : n \geqslant 1\}$$

сходится к некоторым числам a, b, c, d соответственно и что $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x \in [1, 2]$.

II.1.42*. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ пусть a_n и b_n — целые числа из равенства

$$(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}.$$

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

II.1.43*. Доказать, что

$$\frac{C_{2n}^0 2^0 + C_{2n}^2 2^1 + C_{2n}^4 2^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} 2^n}{C_{2n}^1 2^0 + C_{2n}^3 2^1 + C_{2n}^5 2^2 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} 2^{n-1}} \to \sqrt{2}, \quad n \to \infty.$$

II.1.44*. Пусть $a_n \to a$, $b_n \to b$, $n \to \infty$, $\{a, b\} \in \mathbf{R}$ и

$$A_n = \frac{1}{n}(a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n), \quad n \geqslant 1.$$

Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} A_n.$$

11.1.45*. Для последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ пусть

$$x_n = a_n + a_{n-1}, \quad y_n = 2a_n + a_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Доказать, что

1) из сходимости последовательности $\{x_n : n \geqslant 1\}$ не следует сходимость $\{a_n : n \geqslant 1\}$;

2) если $y_n \to y$, $n \to \infty$, $y \in \mathbf{R}$, то последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится; найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

11.1.46*. Пусть $a_n \to a$, $b_n \to b$, $n \to \infty$, $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$ и последовательности $\{x_n : n \geqslant 1\}$ и $\{y_n : n \geqslant 1\}$ определяются следующими соотношениями:

$$x_0 = 1; \quad a_n = 2x_n + y_n, \quad b_n = x_{n-1} + 2y_n, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать сходимость и найти пределы последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$.

11.1.47. Последовательности чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$ и $\{b_n : n \geqslant 1\}$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\forall n \geqslant 1 : a_n \neq 0$;

2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \to +\infty, \quad n \to \infty$;

3) $\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall n \geqslant 1 : \dfrac{|a_1| + \cdots + |a_n|}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} < c$;

4) $\dfrac{b_n}{a_n} \to d, \quad n \to \infty, \quad d \in \mathbf{R}$.

Доказать, что

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \to d, \quad n \to \infty.$$

11.1.48*. Пусть a, b, c — фиксированные числа и

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c;$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n),$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$, $\{b_n : n \geqslant 1\}$, $\{c_n : n \geqslant 1\}$ сходятся, и найти их пределы.

11.1.49*. Пусть a, b, c — положительные числа и

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c;$$

$$a_{n+1} = \sqrt{b_n c_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n c_n}, \quad c_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt[3]{abc}.$$

II.1.50. Построить графики следующих функций:

1) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + x^n + x^{2n}}{1 + 3x^n + x^{2n}}, \quad x \geqslant 0;$

2) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + (2\sin x)^{2n}}, \quad x \in \mathbf{R};$

3) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 3(\sqrt{x})^n + x^n}, \quad x \geqslant 0;$

4) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}, \quad x \geqslant 0;$

5) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (2x-2)^{2n}}, \quad x \geqslant 0;$

6) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sin x)^{2n+2} + (\cos x)^{2n+2}}{(\sin x)^{2n} + (\cos x)^{2n}}, \quad x \in \mathbf{R};$

7)* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1 + k^n x^n}, \quad x \in (0, 1]$.

II.1.51. Предположим, что $a_n \to 0$, $n \to \infty$; $b_n \to 0$, $n \to \infty$, причем $b_{n+1} < b_n$, $n \geqslant 1$, и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c.$$

§ 2. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧИСЛО e

II.2.1. Определить $n_0 \in \mathbf{N}$ так, чтобы были монотонными следующие последовательности:

1) $\{n^2 - 49n - 50 \ : \ n \geqslant n_0\}$;

2) $\left\{n + \dfrac{100}{n} \ : \ n \geqslant n_0\right\}$;

3) $\left\{\dfrac{3^n}{n^5} \ : \ n \geqslant n_0\right\}$;

4) $\left\{\dfrac{n^2}{2^n} \ : \ n \geqslant n_0\right\}$;

5) $\left\{\dfrac{n!}{n^n} \ : \ n \geqslant n_0\right\}$;

6) $\{5^n + (-4)^n \ : \ n \geqslant n_0\}$.

II.2.2. Определить множества A_1 и A_2 значений $x \in \mathbf{R}$, при которых последовательность $\{a_n(x) \ : \ n \geqslant 1\}$ соответственно ограничена и монотонна:

1) $a_n(x) = (2x)^n, \quad n \geqslant 1;$

2) $a_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{n^2}, \quad n \geqslant 1;$

3) $a_n(x) = 2^{nx}, \quad n \geqslant 1;$

4) $a_n(x) = 2^{n(x^2-x)}, \quad n \geqslant 1.$

II.2.3. Для последовательности $\{a_n \ : \ n \geqslant 1\}$ пусть

$$A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad n \geqslant 1$$

Доказать, что

1) из ограниченности $\{a_n \ : \ n \geqslant 1\}$ следует ограниченность $\{A_n \ : \ n \geqslant 1\}$;

2) обратное к 1) утверждение не верно;

3) если $\{a_n : n \geqslant 1\}$ монотонно возрастает, то $\{A_n : n \geqslant 1\}$ монотонно возрастает;

4) обратное к 3) утверждение не верно.

II.2.4*. Для какой последовательности $\{a_n \ : \ n \geqslant 1\}$ существует биекция $\sigma \ : \ \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такая, что последовательность $\{a_{\sigma(k)} \ : \ k \geqslant 1\}$ монотонно возрастает в строгом смысле?

II.2.5. Пусть $f: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ монотонно не убывает на $\mathbf{R}$, то есть

$$x_1 \leqslant x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leqslant f(x_2),$$

и $a_1 \in \mathbf{R}$ — фиксированное число. Положим

$$a_2 = f(a_1), \quad a_3 = f(a_2), \ \ldots, \ a_{n+1} = f(a_n), \ \ldots$$

Доказать, что $\{a_n \ : \ n \geqslant 1\}$ — монотонная последовательность. Дать геометрическую интерпретацию.

II.2.6. Пусть $f: \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условию $f(x) \geqslant x, \ x \in \mathbf{R}$: a_1 — фиксированное число. Положим

$$a_2 = f(a_1), \quad a_3 = f(a_2), \ \ldots, \ a_{n+1} = f(a_n), \ \ldots$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ монотонно не убывает. Дать геометрическую интерпретацию.

II.2.7. Пусть A, B, a_1 — фиксированные числа из $\mathbf{R}$ и

$$a_2 = Aa_1 + B, \quad a_3 = Aa_2 + B, \ \ldots, \ a_{n+1} = Aa_n + B, \ \ldots$$

Найти выражение для $a_n, n \geqslant 1$. При каких A, B и a_1 последовательность $\{a_n: \ n \geqslant 1\}$ ограничена? сходится?

II.2.8. Пусть $f(x) = \sqrt{2 + x}, \ x \geqslant -2$ и $a_1 \geqslant -2$ — фиксированное число. Положим

$$a_2 = \sqrt{2 + a_1}, \quad a_3 = \sqrt{2 + a_2}, \ \ldots, \ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \ \ldots$$

Заметим, что при $a_1 = \sqrt{2}$

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}, \quad n \geqslant 1.$$

При каких значениях a_1 последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ монотонна? ограничена? сходится? В последнем случае найти предел последовательности.

II.2.9*. Пусть для $a_1 = a \geqslant 1$

$$a_2 = a^a, \quad a_3 = a^{a^a}, \ \ldots, \ a_{n+1} = a^{a_n}, \ \ldots$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится для $a \in [1, e^{1/e}]$, строго возрастает и не ограничена при $a > e^{1/e}$.

II.2.10. Доказать, что последовательность

$$a_1 = 9; \quad a_{n+1} = (a_n - 3)^2, \quad n \geqslant 1,$$

строго возрастает и не ограничена сверху.

II.2.11. Доказать, что последовательность

$$\left\{a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) : n \geqslant 2\right\}$$

строго убывает и что $a_n \to \frac{1}{2}$, $n \to \infty$.

II.2.12. Пусть

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{5}{4},$$

$$na_n - a_{n-1} - (n-1)\,a_{n-2} = \frac{2n-1}{n(n-1)}, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится.

II.2.13. Доказать монотонность и ограниченность последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$, а также найти ее предел, если

1) $a_1 = \frac{3}{2}$; $a_{n+1}^2 = 3a_n - 2$, $n \geqslant 1$;

2) $a_1 = a \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$; $a_{n+1} = a + a_n^2$, $n \geqslant 1$;

3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$, $n \geqslant 1$;

4) $a_1 = 0$; $a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)}$, $n \geqslant 1$;

5) $0 < a_n < 1$, $a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$, $n \geqslant 1$;

6) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n + a_{n-1}^3)$, $n \geqslant 2$.

II.2.14. Последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ и $\{b_n : n \geqslant 1\}$ определяются следующими соотношениями:

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что эти последовательности сходящиеся, и найти их пределы.

II.2.15. Пусть для $n \geqslant 1$

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1},$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Доказать, что обе последовательности монотонны, ограничены и сходятся к одному отрицательному числу.

II.2.16. Доказать, что последовательность

$$\left\{1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \ : \ n \geqslant 1\right\}$$

сходится.

II.2.17. Пусть $n \geqslant 2$. Доказать следующие неравенства:

1) $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

2) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$.

У к а з а н и е. Применить дважды неравенство Коши:

(i) к n числам $a_1 = 1$ и $a_2 = \cdots = a_n = \frac{n}{n-1}$;

(ii) к $(n+1)$ числу $a_1 = 1$, $a_2 = \cdots = a_n = \frac{n-1}{n}$.

II.2.18. Доказать неравенство

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}, \quad n \geqslant 1,$$

где $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

II.2.19. Доказать следующие неравенства:

1) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1$;

2) $\log_n(n+1) < 1 + \frac{1}{n \ln n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2$.

II.2.20. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1) - \ln n)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

II.2.21*. Доказать, что последовательность

$$\left\{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \;:\; n \geqslant 1\right\}$$

строго возрастает и сходится к числу e, а последовательность

$$\left\{\frac{n}{(\sqrt[n]{n!})^2} \;:\; n \geqslant 2\right\}$$

строго убывает и сходится к 0.

II.2.22. Доказать, что последовательность

$$\left\{a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \;:\; n \geqslant 1\right\}$$

строго убывает и сходится к 1, а последовательность

$$\left\{b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \;:\; n \geqslant 1\right\}$$

строго возрастает и не ограничена.

II.2.23*. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^2}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{\frac{1}{n}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$.

II.2.24. Пусть $a_n \to a$, $n \to \infty$. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}.$$

II.2.25. Пусть для $n \geqslant 1$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1),$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Доказать, что

1) $\forall n \geqslant 1 \;:\; a_n < b_n$;

2) $\forall n \geqslant 1 \;:\; a_{n+1} > a_n$;

3) $\forall n \geqslant 1 \;:\; b_{n+1} < b_n$;

4) последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$, $\{b_n : n \geqslant 1\}$ сходятся к одному числу γ — числу Эйлера ($\gamma \approx 0{,}5772156649\ldots$);

5) $\forall n \geqslant 2 \;:\; 0 < a_n < 1$.

II.2.26. С помощью результата предыдущей задачи вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{kn+1}+\frac{1}{kn+2}+\dots+\frac{1}{mn}\right)$,

$k\in\mathbf{N},\quad m\in\mathbf{N},\quad k<m$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\dots+\frac{1}{4n-1}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n^k+1}+\frac{1}{n^k+2}+\dots+\frac{1}{n^m}\right)$;

$k\in\mathbf{N},\quad m\in\mathbf{N},\quad k<m$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+2k}+\frac{1}{n+3k}+\dots+\frac{1}{n(1+k)}\right),\quad k\in\mathbf{N}$.

II.2.27. Доказать сходимость следующих последовательностей:

1) $\left\{\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\dots+\sqrt{n}}}}\ :\ n\geqslant 1\right\}$;

2) $\left\{\sqrt{1+\sqrt{2^1+\sqrt{2^2+\dots+\sqrt{2^n}}}}\ :\ n\geqslant 1\right\}$;

3) $\left\{\sqrt{1!+\sqrt{2!+\sqrt{3!+\dots+\sqrt{n!}}}}\ :\ n\geqslant 1\right\}$.

II.2.28*. Пусть $\{a_n : n\geqslant 1\}$ — последовательность неотрицательных чисел. Доказать, что последовательность

$$\left\{\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\dots+\sqrt{a_n}}}}\ :\ n\geqslant 1\right\}$$

сходится тогда и только тогда, когда последовательность

$$\left\{\sqrt[2^n]{a_n}\ :\ n\geqslant 1\right\}$$

ограничена.

II.2.29*. Пусть $\{a_n : n\geqslant 1\}$ — последовательность неотрицательных чисел. Доказать, что последовательность

$$\left\{\sqrt{a_n+\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_{n-2}+\dots+\sqrt{a_1}}}}\ :\ n\geqslant 1\right\}$$

сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n : n\geqslant 1\}$ сходится.

II.2.30. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n! + \sqrt[n]{n! + \cdots + \sqrt[n]{n!}}} = \frac{1}{e}.$$

II.2.31. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится, а последовательность $\{b_n : n \geqslant 1\}$ ограничена и такова, что

$$\forall n \geqslant 1 \quad : \quad b_{n+1} - b_n \geqslant a_{n+1} - a_n.$$

Доказать, что последовательность $\{b_n : n \geqslant 1\}$ сходится.

II.2.32. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ ограничена и такова, что для некоторого $c > 0$ справедливы неравенства

$$a_{n+1} \geqslant a_n - \frac{c}{2^n}, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится.

II.1.33*. Привести пример ограниченной и не имеющей предела последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ такой, что

$$a_{n+1} \geqslant a_n - \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1.$$

II.2.34*. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ ограничена и такова, что

$$a_{n+2} \leqslant \frac{1}{3} a_{n+1} + \frac{2}{3} a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится.

II.2.35. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ ограничена и такова, что

$$a_{n+2} \geqslant \frac{1}{3} a_{n+1} + \frac{2}{3} a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится.

II.2.36. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ ограничена и такова, что

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_n}{\sqrt[2^n]{2}}, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится.

II.2.37. $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность неотрицательных чисел такова, что

$$a_{n+1} \sqrt{a_n} \to b, \quad n \to \infty,$$

причем $b > 0$. Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится. Привести пример не имеющей предела последовательности, для которой $a_{n+1} \sqrt{a_n} \to 0$, $n \to \infty$.

II.2.38. Ограниченная последовательность неотрицательных чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$ такова, что

$$a_{n+2} \leqslant \sqrt{a_{n+1} a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится.

II.2.39. Пусть $x_n = -1$ или $x_n = +1$ при каждом $n \in \mathbf{N}$. Доказать существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{2^n}\right)$$

II.2.40. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ такова, что для некоторого фиксированного числа $m \in \mathbf{N}$

$$|a_n - a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad n \geqslant m.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится.

II.2.41. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ ограничена, последовательность $\{b_n : n \geqslant 1\}$ сходится, причем

$$a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \geqslant b_{n+2} - \frac{3}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится.

§ 3. ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ. ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И КРИТЕРИЙ КОШИ

II.3.1. Определить множество A всех частичных пределов следующих последовательностей:

1) $\left\{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\right\}$;

2) $\{(-1)^n : n \geqslant 1\}$;

3) $\left\{\frac{1}{n+1}(2(-1)^n n + 3) : n \geqslant 1\right\}$;

4) $\left\{\frac{1}{n} + \sin\frac{\pi n}{3} : n \geqslant 1\right\}$;

5) $\left\{\left(2^{n(-1)^n} + 3^{n(-1)^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} : n \geqslant 1\right\}$;

6) $\left\{\frac{2+(-1)^{[\lg n]}}{2+(-1)^n} : n \geqslant 1\right\}$;

7) $\left\{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n : n \geqslant 1\right\}$;

8) $\{\sin(\pi n r) : n \geqslant 1\}, \quad r \in \mathbf{Q}$;

9)* $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] : n \geqslant 1\}$;

10) всех рациональных чисел, занумерованных в каком-либо определенном порядке;

11) $\{nr - [nr] : n \geqslant 1\}, \quad r \in \mathbf{Q}, \ r > 0$;

12)* $\{n\alpha - [n\alpha] : n \geqslant 1\}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$;

13)* $\{\sin n : n \geqslant 1\}$.

II.3.2. Доказать, что
1) монотонная последовательность, содержащая ограниченную подпоследовательность, ограничена;
2) монотонная последовательность, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

II.3.3. Описать множество A всех частичных пределов монотонной последовательности.

II.3.4. Проверить, что последовательность сходится к числу $a \in \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда $A = \{a\}$.

II.3.5. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ такова, что ее подпоследовательности

$$\{a_{2n} : n \geqslant 1\} \text{ и } \{a_{2n+1} : n \geqslant 1\}$$

сходятся. Сходится ли последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$?

II.3.6. Для последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ являются сходящимися следующие подпоследовательности:

$$\{a_{2n} : n \geqslant 1\}, \{a_{2n+1} : n \geqslant 1\}, \{a_{3n} : n \geqslant 1\}.$$

Доказать, что исходная последовательность сходится.

II.3.7. Привести пример не имеющей предела последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$, для которой сходится каждая из последовательностей

$$\{a_{mk} : k \geqslant 1\}, \quad m \geqslant 2.$$

II.3.8*. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — произвольная последовательность действительных чисел и

$$b(n) := \frac{1}{n}(\sin a_1 + \sin a_2 + \cdots + \sin a_n), \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что

$$b(n) \to b,\ n \to \infty,\ b \in \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad b(m^2) \to b,\ m \to \infty, \quad b \in \mathbf{R}.$$

II.3.9. Построить пример последовательности, для которой множество всех частичных пределов есть

$$\left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \geqslant 1\right\} \cup \{0\}.$$

II.3.10. Доказать, что каждое из следующих множеств не может быть множеством всех частичных пределов последовательности

1) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \geqslant 1\right\}$; 2) $(0, 1)$; 3) $\mathbf{Q}$; 4) $\mathbf{R}$.

II.3.11*. Множество $A \subset \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется **замкнутым**, если для любой последовательности $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset A$ такой, что $x_n \to x$, $n \to \infty$, $x \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, предел $x \in A$. Доказать, что любое непустое замкнутое множество $A \subset \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ есть множество всех частичных пределов некоторой последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$.

II.3.12. Пусть A — множество всех частичных пределов последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$. Верхний предел последовательности

$a_n : n \geqslant 1\}$ есть

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \begin{cases} +\infty, \text{ если } +\infty \in A \text{ (или } A \text{ не ограничено сверху);} \\ \sup A, \text{ если } A \text{ ограничено сверху и } A \neq \{-\infty\}; \\ -\infty, \text{ если } A = \{-\infty\}. \end{cases}$$

Нижний предел последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ есть

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n := -\overline{\lim_{n\to\infty}} (-a_n).$$

Для последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$, заданной в задаче II.3.1, определитель $\inf_{n\geqslant 1} a_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, $\sup_{n\geqslant 1} a_n$.

II.3.13. Доказать, что

1) $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geqslant n} a_k) = \sup_{n\geqslant 1} (\inf_{k\geqslant n} a_k)$;

2) $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geqslant n} a_k) = \inf_{n\geqslant 1} (\sup_{k\geqslant n} a_k)$;

3) $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$

II.3.14. Предположим, что $a_n \in [\alpha, C]$, $n \geqslant 1$, $\alpha > 0$, $C \in \mathbf{R}$. Доказать следующие соотношения:

1) $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n}$; 2) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n}$.

II.3.15. Пусть $\{a_{m(k)} : k \geqslant 1\}$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$. Доказать, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} a_{m(k)} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} a_{m(k)} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n.$$

Привести пример последовательности и ее подпоследовательности, для которой все неравенства строгие.

II.3.16. Предположим, что по крайней мере одна из последовательностей $\{a_n : n \geqslant 1\}$, $\{b_n : n \geqslant 1\}$ ограничена снизу. Доказать следующие соотношения:

1) $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$;

2) $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$.

II.3.17. Пусть для последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$

$$b_n := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n.$$

II.3.18. Пусть $a_n > 0$, $n \geqslant 1$. Доказать неравенства

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

II.3.19. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — заданная последовательность действительных чисел и $A_n = (-\infty, a_n)$, $B_n = (a_n, +\infty)$, $n \geqslant 1$. Определить

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n, \ \varlimsup_{n\to\infty} A_n, \ \varliminf_{n\to\infty} B_n, \ \varlimsup_{n\to\infty} B_n.$$

II.3.20. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ и $\{b_n : n \geqslant 1\}$ последовательности, причем $b_n < b_{n+1}$, $n \geqslant 1$; $b_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Доказать, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

II.3.21*. Пусть $a > 0$ и последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ определяется первым членом $a_1 > 0$ и соотношениями

$$a_{n+1} = \frac{a}{1 + a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится, и найти ее предел.

II.3.22. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ и $\{b_n : n \geqslant 1\}$ — фундаментальные последовательности. Доказать фундаментальность следующих последовательностей:

1) $\{|a_n| : n \geqslant 1\}$; 2) $\{a_n + b_n : n \geqslant 1\}$;

3) $\{a_n^2 : n \geqslant 1\}$; 4) $\{a_n b_n : n \geqslant 1\}$;

5) $\{a_n a_{n+2} : n \geqslant 1\}$; 6) $\{\max(a_n, b_n) : n \geqslant 1\}$;

7) $\{\sqrt{|a_n|} : n \geqslant 1\}$.

II.3.23. Предположим, что для последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ справедливы неравенства

$$|a_{n+1} - a_n| < 2^{-n}, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится. Рассмотреть пример

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}, \quad n \geqslant 1.$$

II.3.24. Предположим, что для последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ существует $\alpha \in (0, 1)$ такое, что

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \alpha |a_n - a_{n-1}|, \quad n \geqslant 2.$$

Доказать, что последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится.

II.3.25. Последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ удовлетворяет условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N : \quad |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

Является ли последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходящейся? Рассмотреть пример $a_n = \ln n,\ \ n \geqslant 1$.

II.3.26. Для последовательности действительных чисел $\{u_n : n \geqslant 1\}$ положим при $n \geqslant 1$

$$a_n = u_1 + u_2 + \cdots u_n,$$
$$b_n = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|.$$

Доказать, что из фундаментальности последовательности $\{b_n : n \geqslant 1\}$ следует фундаментальность последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$.

II.3.27. Последовательность неотрицательных чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$ для фиксированных $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q < 1$ удовлетворяет соотношениям

$$a_{n+2} \leqslant pa_{n+1} + qa_n, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что $\{a_n : n \geqslant 1\}$ сходится, и найти ее предел.

II.3.28. Предположим, что

$$\forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n \in [0, +\infty)$$

$$\forall m \in \mathbf{N} \ \ \forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_{m+n} \leqslant a_m a_n.$$

Доказать существование предела последовательности $\{\sqrt[n]{a_n} : n \geqslant 1\}$

Глава III ● ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОШИ И ГЕЙНЕ. СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ [1]

III.1.1. Определить множество всех предельных точек множества A, если

1) $A=\{0, 1\}$;

2) $A=(0, 1)\cup\{2\}$;

3) $A=\left\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbf{N}\right\}$;

4) $A=[0, 1]\cap\mathbf{Q}$;

5) $A=\left\{\frac{k}{2^n} \mid k=0, 1, 2, \dots, 2^n;\ n\in\mathbf{N}\right\}$;

6) $A=\{\sqrt{n}-[\sqrt{n}] \mid n\in\mathbf{N}\}$;

7) $A=\{\sin n \mid n\in\mathbf{N}\}$.

III.1.2. Доказать утверждение

$$f(x)\to p,\ x\to 0 \iff f(x^3)\to p,\ x\to 0.$$

III.1.3. Доказать, что

$$f(x)\to p,\ x\to 0 \Rightarrow f(x^2)\to p,\ x\to 0.$$

Привести пример, показывающий, что обратное утверждение не верно.

III.1.4. Доказать утверждение

$$f(x)\to p,\ x\to a \iff f^3(x)\to p^3,\ x\to a.$$

III.1.5. Доказать, что

$$f(x)\to p,\ x\to a \Rightarrow f^2(x)\to p^2,\ x\to a,$$

и привести пример, показывающий, что обратное утверждение не верно.

III.1.6. Пусть $x_0\in\mathbf{R}$ — предельная точка множества $A\subset\mathbf{R}$ и $f_A: A\to\mathbf{R}$ — сужение на A функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Существует ли предел

$$\lim_{x\to x_0} f_A(x)$$

[1] Функции, для которых рассматривается предел в точке, предполагаются определенными в некоторой окрестности или полуокрестности этой точки, исключая, возможно, саму точку.

в следующих случаях:

$$\text{I.}\ f(x) = \operatorname{sign} x, \quad x \in \mathbf{R},$$

1) $A = \mathbf{R}, \quad x_0 = 0;$

2) $A = (0, +\infty), \ x_0 = 0;$

3) $A = \mathbf{Q}, \quad x_0 = 0;$

4) $A = \left\{ \frac{1}{n}(-1)^n \ \mid \ n \geqslant 1 \right\}, \quad x_0 = 0;$

$$\text{II.}\ f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

1) $A = (0, +\infty), \quad x_0 = 0;$

2) $A = \left\{ \frac{1}{\pi n} \ \mid \ n \geqslant 1 \right\}, \quad x_0 = 0?$

III.1.7. Функцию $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, определяемую соотношением

$$\mathbf{Q} \ni r \ \mapsto \ f(r) = r,$$

продолжить на $\mathbf{R}$ так, чтобы

1) существовал $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;

2) существовал только один из пределов $f(0-)$, $f(0+)$.

III.1.8. Пусть $[a]$ — целая часть числа a. Существует ли предел

1) $\lim\limits_{x \to 0} x \left[\frac{1}{x}\right]$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right], \quad a > 0, \ b > 0;$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{[x]}{x}$?

III.1.9*. Пусть $\{a\} = a - [a]$. Предположим, что

$$\lim_{x \to 0} f\left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right) = 0.$$

Доказать, что $f(x) \to 0, \ x \to 0$.

III.1.10. Предположим, что

$$\lim_{x \to 0} f\left(\left[\frac{1}{x}\right]^{-1}\right) = 0.$$

Существует ли предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

III.1.11*. Пусть функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такова, что

$$\forall a \in \mathbf{R} \ : \ \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{a}{n}\right) = 0.$$

Существует ли предел функции f в точке 0?

III.1.12. Предположим, что $f(x) \to 0, \ x \to 0$. Доказать следующие утверждения:

1) $(f(x) + f(2x)) \to 0, \quad x \to 0;$

2) $(f(x) + f(x^2)) \to 0, \quad x \to 0.$

Привести примеры функций, показывающие, что обратные утверждения не верны.

III.1.13. Доказать, что для функции f, удовлетворяющей условию $f(x) \geqslant -\sqrt{|x|}$, $x \neq 0$, каждое из соотношений 1), 2) предыдущей задачи влечет за собой утверждение $f(x) \to 0$, $x \to 0$.

III.1.14. Предположим, что $f(x) \to 0$, $x \to 0$. Доказать, что $f(x) \times f(2x) \to 0$, $x \to 0$, и построить пример, показывающий, что обратное утверждение не верно.

III.1.15. Доказать, что для функции f, удовлетворяющей условиям $f(x) \geqslant |x|^{3/4}$, $x \neq 0$, и $f(x)f(2x) \leqslant 4|x|$, $x \neq 0$, справедливо утверждение $f(x) \to 0$, $x \to 0$.

III.1.16. Предположим, что для функции f

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\right) = 0.$$

Найти

$$\lim_{x\to a} f(x).$$

III.1.17. **Функция f принимает положительные значения и**

$$\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) \to 2, \quad x \to a.$$

Найти предел

$$\lim_{x\to a} f(x).$$

III.1.18*. Предположим, что

$$f(x) \to 0, \quad x \to 0; \quad \frac{f(2x) - f(x)}{x} \to 0, \quad x \to 0.$$

Доказать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

III.1.19. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\left(1 + 2 + 3 + \cdots + \left[\frac{1}{x^2}\right]\right)\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\left(\left[\frac{1}{x^2}\right] + \left[\frac{2}{x^2}\right] + \cdots + \left[\frac{k}{x^2}\right]\right)\right)$, $k \in \mathbf{N}$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{[P(x)]}{P([x])}$, $P(x) = x^{13} + x^7 + x + 1$.

III.1.20. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x \sin 2x)}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^3 3x}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+2n})$;

6)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\ \cdots\ +\sin\frac{n}{n^2}\right)$.

III.1.21. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\subset \mathbf{R}$ — фиксированные числа и для некоторого $\delta>0$

$$\forall x\in(-\delta, \delta)\ :\ |a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ \cdots\ +a_n\sin nx|\leqslant|\sin x|.$$

Доказать неравенство

$$|a_1+2a_2+\ \cdots\ +na_n|\leqslant 1.$$

III.1.22. Пусть f — монотонно неубывающая на $[a, b]$ функция. Доказать, что для $c\in(a, b)$

1) $\lim\limits_{x\to c+} f(x-)=f(c+)$; 2) $\lim\limits_{x\to c-} f(x+)=f(c-)$.

III.1.23. Пусть $f(x)=x\cos x$, $x\in\mathbf{R}$. Привести примеры последовательностей $\{x_n : n\geqslant 1\}$, $\{y_n : n\geqslant 1\}$, $\{z_n : n\geqslant 1\}$ таких, что

1) $x_n\to+\infty$, $f(x_n)\to 0$, $n\to\infty$;

2) $y_n\to+\infty$, $f(y_n)\to+\infty$, $n\to\infty$;

3) $z_n\to+\infty$, $f(z_n)\to-\infty$, $n\to\infty$.

III.1.24. Пусть $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ — функция, периодическая с периодом $T>0$ и отличная от постоянной. Доказать, что f не может иметь предела при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

III.1.25. Пусть функция $f:[0, +\infty)\to\mathbf{R}$ такова, что

1) $\forall a\geqslant 0\ :\ f(a+n)\to 0$, $n\to\infty$;

2) $\forall a>0\ :\ f(an)\to 0$, $n\to\infty$.

Существует ли $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

III.1.26. Пусть функция $f:[0, +\infty)\to\mathbf{R}$ такова, что

$$\forall a\geqslant 0\quad \forall b>0\ :\ f(a+bn)\to 0,\quad n\to\infty.$$

Существует ли

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)?$$

III.1.27. Доказать, что

1) $2x+\ln x+\sin x=O(x)$, $x\to+\infty$;

2) $x^m+a_1x^{m-1}+\ \cdots\ +a_m=O(x^m)$, $x\to+\infty$,

где $m\in\mathbf{N}$, $\{a_1, \ldots, a_m\}\subset\mathbf{R}$;

3) $x+2^{x+1}=O(2^x)$, $x\to+\infty$;

4) $x2^{x+1}+x^{10}+7=O(3^x)$, $x\to+\infty$;

5) $x\sin x+\sqrt{x}=O(x), \quad x\to+\infty;$

6) $x^2\ln^{10}x+x=O(x^{2+\varepsilon}), \quad x\to+\infty; \quad \varepsilon>0;$

7) $\sqrt{x^4+3x^3+1}-x^2=O(x), \quad x\to+\infty;$

8) $2^x\ln^3 x+1=O(x2^x), \quad x\to+\infty;$

9) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}=O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to+\infty;$

10) $x^5 2^{-x}+\frac{1}{x}=O\left(\frac{1}{x}\right) \quad x\to+\infty;$

11) $\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x}+x2^{-x}=O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \quad x\to+\infty;$

12) $\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^5}}}=O(x), \quad x\to+\infty.$

III.1.28. Доказать следующие соотношения:

1) $x^2+\sin^2 x=o(x), \quad x\to 0;$

2) $(1+x)^n=1+nx+o(x), \quad x\to 0, \ n\in\mathbf{N};$

3) $\ln x=o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right), \quad x\to 0+; \quad \varepsilon>0;$

4) $2^{-\frac{1}{x}}=o(x^n), \quad x\to 0+, \ n\in\mathbf{N};$

5) $1+x+x^2=o(x^3), \quad x\to+\infty;$

6) $x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=o(x^{m+1}), \quad x\to+\infty,$
где $m\in\mathbf{N}$, $\{a_1, \ldots, a_m\}\subset\mathbf{R};$

7) $x^m=o(2^x), \quad x\to+\infty; \quad m\in\mathbf{N};$

8) $\ln x=o(x^\varepsilon), \quad x\to+\infty; \quad \varepsilon>0;$

9) $x^{13}2^x=o(3^x), \quad x\to+\infty;$

10) $x^{13}2^{-x}=o\left(\frac{1}{x^m}\right), \quad x\to+\infty; \quad m\in\mathbf{N};$

11) $\ln(\ln x)=o(\ln x), \quad x\to+\infty;$

12) $x\ln x=o(x^{3/2}), \quad x\to+\infty;$

13) $x^{\ln x}=o(e^x), \quad x\to+\infty.$

III.1.29. Предположим, что

$$f(x)=o(g(x)),\ g(x)\to+\infty,\ x\to+\infty.$$

Доказать, что

$$e^{f(x)}=o(e^{g(x)}), \quad x\to+\infty.$$

III.1.30. Доказать, что

1) $x^m + a_1x^{m+1} + \cdots + a_nx^{m+n} \sim x^m, \quad x \to 0,$

$\{m, n\} \subset \mathbf{N}, \ \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R};$

2) $x^m + a_1x^{m+1} + \cdots + a_nx^{m+n} \sim a_nx^{m+n}, \quad x \to +\infty, \ a_n \neq 0;$

3) $\sin x \sim x, \quad x \to 0;$

4) $\operatorname{tg} x \sim x, \quad x \to 0;$

5) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \to 0;$

6) $(1 + x)^n - 1 \sim nx, \quad x \to 0, \ n \in \mathbf{N};$

7) $3^x + x2^x + \ln x + 1 \sim 3^x, \quad x \to +\infty;$

8) $\sqrt{x^2 + x + 1} - x \sim \frac{1}{2}, \quad x \to +\infty;$

9) $n^2 + 2n \ln n + 1 \sim n^2, \quad n \to \infty;$

10) $n^{n+\frac{1}{n}} + n! + 2^n \sim n^n, \quad n \to \infty.$

III.1.31. Определить главную часть функции относительно шкалы $\{x \mapsto x^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ при $x \to 0$:

1) $x \mapsto \sin 2x + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}$; 2) $x \mapsto \operatorname{tg} x - \sin x$;

3) $x \mapsto \sin x - 2 \sin \frac{x}{2}$.

III.1.32. Определить главную часть функции относительно шкалы $\{x \mapsto x^\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ при $x \to +\infty$:

1) $f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m, \quad m \in \mathbf{N}, \ \{a_0, \ldots, a_m\} \subset \mathbf{R};$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{x^m}, \quad m \in \mathbf{N}, \ m > 1;$

3) $f(x) = 13x^3 + x^2 \ln x + 1;$

4) $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}.$

III.1.33. Определить три члена асимптотического разложения следующих функций относительно шкалы $\{x \mapsto x^\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$, $x \to +\infty$:

1) $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m, \quad m \in \mathbf{N}, \ m \geqslant 2,$

$\{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\} \subset \mathbf{R};$

2) $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_m}{x^m}, \quad m \in \mathbf{N}, \ m \geqslant 2, \ \{a_0, a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbf{R};$

3) $f(x) = \sqrt{x + a}, \quad a \in \mathbf{R};$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 + x};$

5) $f(x) = \sqrt{x + a\sqrt{x}}, \quad a \in \mathbf{R};$

6) $f(x)=\sqrt{x^4+2x^3}$;

7) $f(x)=\sqrt{5x^4+7x^3-8x^2-4x}$;

8) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+ax^2+1}, \quad a\in \mathbf{R}$;

9) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

10) $f(x)=\sqrt{2^{-x}+\sqrt{x+1}}$;

11) $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$;

12) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$;

13) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+2\sqrt{x}}-\sqrt{x^2+1}$.

III.1.34. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3})$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-\sqrt{x+3})$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+x}-x-\frac{1}{2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-x^2+1}-2x)$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}-2\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+1\right)$.

III.1.35. Подобрать числа a, b и c так, чтобы выполнялось равенство

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-ax-b)=0$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^4+2x^3}-ax^2-bx-c)=0$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{5x^4+7x^3-8x^2-4x}-ax^2-bx-c)=0$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+ax^2+1}-\sqrt[3]{x^3+bx^2+1})=\frac{1}{3}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt[3]{x^3+ax^2+1}+\sqrt[3]{x^3+bx^2+1}-2x)=-2$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-ax-b\right)=0;$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b\right)=0;$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2+3x+4}-ax^2-bx-c\right)=0.$

III.1.36. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}}\right);$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{x^n},\quad n\in\mathbf{N};$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}}\right);$

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right);$

5) $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}(\sin(\operatorname{tg}x))\cdot\operatorname{ctg}(\operatorname{tg}(\sin x));$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^3+1}-x^2\right)\sin\frac{1}{x};$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+3x+2}-\sqrt{x^2+4x+5}\right),\quad a>0;$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x+x)^{n+1}-e^{(n+1)x}}{xe^{nx}};$

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x\sin(2x\sin 3x))}{x^3}.$

III.1.37. Доказать, что функция $f(x)=2^x$, $x\in\mathbf{R}$, не является рациональной на любой полуоси вида $(a, +\infty)$, то есть доказать, что равенство

$$2^x=\frac{P(x)}{Q(x)},\quad x>a,$$

где P и Q — многочлены, невозможно.

§ 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

III.2.1. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\mathbf{Q};\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Доказать, что функция f непрерывна в точках вида $x=n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$, и разрывна в остальных точках.

III.2.2. Пусть $f\in\mathbf{C}[a, b]$). Доказать, что $|f|\in\mathbf{C}([a, b])$. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение не верно.

III.2.3. При каких значениях a и b из $\mathbf{R}$ непрерывна на $\mathbf{R}$ функция, определяемая формулой

1) $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1; \\ x^2 + x + 1, & x \geqslant 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < -1, \\ x^2 + 1, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -ax + 2b, & x > 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x + a\sin x, & x \in [2\pi n, \pi(2n+1)], \ n \in \mathbf{Z}, \\ bx, & x \in (\pi(2n-1), 2\pi n), \ n \in \mathbf{Z}? \end{cases}$

Дать геометрическую интерпретацию.

III.2.4. При каких значениях $\{a_n, \ b_n \mid n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{R}$ непрерывна на $\mathbf{R}$ функция, определяемая формулой

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin \pi x, & x \in [2n, 2n+1], \ n \in \mathbf{Z}, \\ b_n + \cos \pi x, & x \in (2n-1, 2n), \ n \in \mathbf{Z}? \end{cases}$$

III.2.5. Пусть $f(x) = [x] \sin \pi x$, $x \in \mathbf{R}$. Доказать, что f непрерывна на $\mathbf{R}$, построить график f.

III.2.6. Доказать, что функция

$$f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}, \quad x \geqslant \frac{1}{2},$$

непрерывна и строго возрастает на $[1, +\infty)$.

III.2.7. Построить график и исследовать непрерывность функции

1) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}, \quad x \in \mathbf{R};$

2) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}, \quad x \in \mathbf{R};$

3) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (x-1)^{2n}}, \quad x \geqslant 0;$

4) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}, \quad x > 0;$

5) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2^n + x^n)}{n}, \quad x \geqslant 0;$

6) $f(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} (x^u + x^{2u})^{\frac{1}{u}}, \quad x \geqslant 0;$

7) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}, \quad x \in \mathbf{R}.$

III.2.8. Пусть $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ функция, ограниченная на $\mathbf{R}$. Положим для точки $x \in \mathbf{R}$ и числа $\delta > 0$

$$\omega_f(x, \delta) := \omega(x, \delta) := \sup_{x' \in (x-\delta, x+\delta)} f(x') - \inf_{x'' \in (x-\delta, x+\delta)} f(x'').$$

Доказать следующие утверждения:

1) $\omega(x, \delta) = \sup\limits_{\substack{x' \in (x-\delta, x+\delta) \\ x'' \in (x-\delta, x+\delta)}} (f(x') - f(x''))$;

2) $\omega(x, \delta_1) \leqslant \omega(x, \delta_2)$, $\delta_1 \leqslant \delta_2$;

3) существует $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(x, \delta) =: \omega(x)$;

4) функция f непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда $\omega(x) = 0$;

5) для монотонно неубывающей на $\mathbf{R}$ функции f

$$\omega(x) = f(x+) - f(x-), \quad x \in \mathbf{R}.$$

III.2.9. Определить функцию ω из предыдущей задачи для функции f, если

1) $f(x) = [x], \quad x \in \mathbf{R}$;

2) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

III.2.10. Пусть $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$. Предположим, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, если $x_1 \leqslant x_2$. Доказать следующие утверждения:

1) $\varliminf\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n)$;

2) $\varlimsup\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n)$.

Предположим, что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, $x_1 \leqslant x_2$. Доказать следующие утверждения:

1) $\varliminf\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n)$;

2) $\varlimsup\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n)$.

В обоих случаях $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ — произвольная ограниченная последовательность. Привести также примеры функций f, для которых выполнено соотношение 1) и не выполнено соотношение 2).

III.2.11. Пусть $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$ и

$$h(x) := \min(f(x), g(x)), \quad H(x) := \max(f(x), g(x))$$

для $x \in [a, b]$. Доказать, что $\{h, H\} \subset \mathbf{C}([a, b])$.

III.2.12. Определить функцию $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, непрерывную в точке $x = 0$ и удовлетворяющую соотношению

1) $\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad f(x) + f\left(\dfrac{2}{3} x\right) = x$;

2) $\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad 2f(2x) = f(x) + x$.

III.2.13. Определить все функции $f \in \mathbf{C}((a, b))$, удовлетворяющие условию

$$\forall \{x, y\} \subset (a, b) \quad : \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

III.2.14. Определить все функции $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, **удовлетворяющие** соотношению

1) $\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R} \quad : \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

(функциональное уравнение Коши);

2) $\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R} \quad : \quad f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x$.

III.2.15*. Функции $\{f, g\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{R})$ периодичны на $\mathbf{R}$. **Доказать,** что

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

III.2.16. Пусть $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ — монотонная на (a, b) функция. Доказать, что множество точек разрыва f не более чем счетно. Проверить, что утверждение верно и в том случае, когда $a = -\infty$ и (или) $b = +\infty$.

III.2.17. Привести пример функции $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$, которая ни на одном отрезке $[a, b]$, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, не принимает значения верхней грани на этом отрезке.

III.2.18. Существует ли функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$, $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$, со следующим множеством значений $A = f([a, b])$:

1) $A = (0, 1]$; 2) $A = (0, 1)$; 3) $A = (0, +\infty)$;

4) $A = [0, 1] \cup [2, 3]$?

III.2.19. Пусть $f \in \mathbf{C}([a, b])$, $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$. Доказать, что

$$f([a, b]) = [c, d]$$

с некоторыми c и d из $\mathbf{R}$ (возможно, что $c = d$).

III.2.20. Пусть $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$. Описать множество $f(\mathbf{R})$.

III.2.21. Пусть $f: [0, 1] \to [0, 1]$ и $f \in \mathbf{C}([0, 1])$. Доказать, что

$$\exists x \in [0, 1] \quad : \quad f(x) = x.$$

III.2.22. Пусть $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$, причем $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$. Доказать, что

$$\exists x \in (a, b) \quad : \quad f(x) = g(x).$$

Дать геометрическую интерпретацию.

III.2.23. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 2])$ и $f(0) = f(2)$. Доказать, что существуют $\{x, y\} \subset [0, 2]$ такие, что

$$y - x = 1, \; f(x) = f(y) \text{ (**теорема о хорде**)}.$$

Дать геометрическую интерпретацию.

III.2.24. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 2])$. Доказать, что существуют $\{x, y\} \subset [0, 2]$ такие, что

$$y - x = 1, \; f(y) - f(x) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)).$$

Дать геометрическую интерпретацию.

III.2.25. Привести пример функции $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, которая принимает каждое свое значение три раза. Существует ли функция $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, принимающая каждое свое значение два раза?

III.2.26. Доказать, что уравнение

$$f(x) = 0$$

имеет, по крайней мере, одно решение в следующих случаях:

1) $f(x) = a_0 x^{2m+1} + a_1 x^{2m} + \dots + a_{2m}$,

где $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\{a_0, a_1, \dots, a_{2m}\} \subset \mathbf{R}$, $a_0 \neq 0$;

2) $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$; $f(x) \to -\infty$, $x \to -\infty$; $f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$.

III.2.27. Доказать, что уравнение

$$(1 - x)\cos x = \sin x$$

имеет корень, лежащий между 0 и 1.

III.2.28. Пусть

$$\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_n < \beta_n$$

— фиксированные числа. Доказать, что все корни многочлена

$$P(x) = \prod_{k=0}^{n} (x + \alpha_k) + 2 \prod_{k=0}^{n} (x + \beta_k)$$

действительны.

III.2.29. Пусть P — многочлен четной степени со старшим коэффициентом 1. Доказать, что

$$\exists x_* \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad P(x_*) \leqslant P(x).$$

III.2.30. Пусть функция $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ положительна на $\mathbf{R}$ и $f(x) \to 0$, $x \to -\infty$; $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Доказать, что

$$\exists x^* \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad f(x) \leqslant f(x^*).$$

III.2.31. Пусть P — многочлен. Доказать, что функция $|P|$ достигает наименьшего на $\mathbf{R}$ значения.

III.2.32. Пусть P — отличный от 0 многочлен. Доказать, что

$$\exists x \in \mathbf{R} \quad : \quad |P(x)| = e^x.$$

III.2.33. Пусть $f \in \mathbf{C}([a, b])$ и

$$g(x) := \max_{a \leqslant u \leqslant x} f(u), \quad x \in [a, b].$$

Доказать, что

1) g монотонно не убывает на $[a, b]$;

2) $g \in \mathbf{C}([a, b])$.

III.2.34. Пусть $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ и для $\delta > 0$ положим

$$h(x) := h_\delta(x) := \min_{x-\delta \leqslant u \leqslant x+\delta} f(u),$$

$$H(x) := H_\delta(x) := \max_{x-\delta \leqslant u \leqslant x+\delta} f(u)$$

для $x \in \mathbf{R}$. Проверить, что

1) $\forall x \in \mathbf{R} \; : \; h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$; $h_\delta(x) \to f(x)$, $H_\delta(x) \to f(x)$, $\delta \to 0$;

2) $\{h, H\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{R})$.

III.2.35. Пусть функция $f \in \mathbf{C}([0, +\infty))$ и $f(x) \to +\infty$, $f(x) = o(x)$, $x \to +\infty$. Положим

$$g(x) := \max_{0 \leqslant u \leqslant x} f(u), \quad x \geqslant 0.$$

Доказать, что

$$g(x) = o(x), \quad x \to +\infty.$$

III.2.36. Пусть функция $f : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ монотонно убывает на $[0, +\infty)$. Доказать, что существует положительная и убывающая на $[0, +\infty)$ функция $g \in \mathbf{C}([0, +\infty))$ такая, что

$$\forall x \geqslant 0 \quad g(x) \leqslant f(x);$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} \to 0, \quad x \to +\infty.$$

III.2.37*. Пусть P — многочлен. Доказать, что функция $\sin P$ периодична на оси тогда и только тогда, когда степень многочлена P не больше 1.

III.2.38. Проверить, что функция

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

имеет обратную f^{-1}, и найти f^{-1}.

III.2.39. Пусть $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbf{R}$, и для множества $A \subset \mathbf{R}$ пусть $f_A(x) = f(x)$, $x \in A$. Доказать, что

1) для $A = \mathbf{R}$ функция f_A не имеет обратной;

2) для каждого из множеств $A = (-\infty, 1]$, $A = [1, +\infty)$ функция f_A имеет непрерывную обратную f_A^{-1}, определить f_A^{-1} в этом случае.

III.2.40. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leqslant 0, \\ ax^2 - 2x, & x > 0. \end{cases}$$

Найти все те значения $a \in \mathbf{R}$, для которых функция f имеет непрерывную обратную f^{-1}, и найти f^{-1}.

III.2.41. Предположим, что функция $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$; $f(x) \to -\infty$, $x \to -\infty$; $f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$. Пусть

$$g(x) := \sup\{u \mid f(u) < x\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Привести пример функции f, для которой функция g разрывна. Доказать, что функция $g \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда f строго возрастает на $\mathbf{R}$.

III.2.42. Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — функция Серпиньского

$$f(x) = \begin{cases} b + a\sqrt{2}, & x = a + b\sqrt{2}, \ \{a, b\} \subset \mathbf{Q}; \\ x, & x \neq a + b\sqrt{2}, \ \{a, b\} \subset \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Доказать, что

1) f разрывна при каждом $x \in \mathbf{R}$;

2) f имеет обратную f^{-1}, причем $f = f^{-1}$;

3) любой круг в плоскости (x, y) содержит точки вида $(x, f(x))$.

III.2.43. Какие из следующих непрерывных на $(0, 1)$ функций равномерно непрерывны на $(0, 1)$:

1) $f(x) = e^x$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}$; 3) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$;

4) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$; 5) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$?

III.2.44. Какие из следующих непрерывных на $[0, +\infty)$ функций равномерно непрерывны на $[0, +\infty)$:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$;

3) $f(x) = x\sin x$; 4) $f(x) = \sin^2 x$;

5) $f(x) = \sin(x^2)$; 6) $f(x) = e^x$;

7) $f(x) = e^{-x}$; 8) $f(x) = e^{\sin(x^2)}$;

9) $f(x) = \sin(\sin x)$; 10) $f(x) = \sin(x\sin x)$;

11) $f(x) = \sin\sqrt{x}$?

III.2.45. Доказать, что непрерывная и периодическая на оси функция принимает наибольшее и наименьшее на оси значения и равномерно непрерывна на оси.

III.2.46. Функция f и g равномерно непрерывны на

(i) отрезке $[a, b]$,

(ii) полуоси $[a, +\infty)$.

Являются ли функции

1) cf, $c \in \mathbf{R}$; 2) $f+g$;

3) fg; 4) $x \mapsto f(x)\sin x$

равномерно непрерывными на (i) $[a, b]$? (ii) $[a, +\infty)$?

III.2.47. Пусть функция f — равномерно непрерывна на множестве A и $\{x_n \in A : n \geqslant 1\}$ — фундаментальная последовательность Доказать, что последовательность $\{f(x_n) : n \geqslant 1\}$ фундаментальна

III.2.48. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на множестве A тогда и только тогда, когда для любых последовательностей $\{x_n \in A : n \geqslant 1\}$ и $\{y_n \in A : n \geqslant 1\}$ таких, что $x_n - y_n \to 0$, $n \to \infty$, выполняется соотношение $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, $n \to \infty$.

III.2.49. Пусть функция $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ — равномерно непрерывна на $[1, +\infty)$. Доказать, что

$$\exists C \in \mathbf{R} \quad \forall x \geqslant 1 \ : \ \frac{|f(x)|}{x} \leqslant C.$$

III.2.50. Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ — равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$. Доказать, что существует число $c > 0$ такое, для которого

$$\forall x \geqslant 0 \ : \ \sup_{u \in \mathbf{R}} |f(x+u) - f(u)| \leqslant c(x+1).$$

III.2.51. Пусть

$$x_0 \in \mathbf{R},\ x_1 = \sin x_0,\ x_2 = \sin x_1,\ \ldots,\ x_n = \sin x_{n-1},\ \ldots;$$

$$y_0 \in \mathbf{R},\ y_1 = \operatorname{arctg} y_0,\ \ldots,\ y_n = \operatorname{arctg} y_{n-1},\ \ldots$$

Доказать, что последовательности $\{x_n : n \geqslant 1\}$, $\{y_n : n \geqslant 1\}$ сходятся, и найти их пределы. Дать геометрическую интерпретацию.

III.2.52. Определить главную часть относительно шкалы $\{x \mapsto x^\alpha, > 0;\ \alpha \in \mathbf{R}\}$ следующих функций при $x \to 0$:

1) $x \mapsto \sin 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^{\sqrt{x}} - 1)^2$;

2) $x \mapsto \arcsin 3x + \ln(1 + x + x^2)$;

3) $x \mapsto \ln \dfrac{1-x}{1+x}$;

4) $x \mapsto \arcsin \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+2}}$.

III.2.53. Для функции $f : [0,\ 1] \to \mathbf{R}$ и числа $n \in \mathbf{N}$ пусть

$$B_n(f;\ x) := \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,\ 1],$$

— ее многочлен Бернштейна. Доказать на $[0,\ 1]$ тождество

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(\dfrac{k}{n} - x\right) x^k (1-x)^{n-k} = 0$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \dfrac{x(1-x)}{n}$.

III.2.54. Пусть f — непрерывна в точке x и ограничена на $[0,\ 1]$. Доказать, что $B_n(f;\ x) \to f(x)$, $n \to \infty$. Для функции $f \in \mathbf{C}([0,\ 1])$ доказать, что

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - B_n(f;\ x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

III.2.55. Предположим, что функция $f : [0,\ 1] \to \mathbf{R}$ такова, что для некоторого числа $L \in \mathbf{R}$

$$\forall \{x',\ x''\} \subset [0,\ 1] \ : \ |f(x') - f(x'')| \leqslant L|x' - x''|.$$

Доказать, что для любого $n \in \mathbf{N}$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - B_n(f;\ x)| \leqslant \frac{L}{2\sqrt{n}}.$$

III.2.56. Пусть $f \in \mathbf{C}([0,\ 1])$. Доказать, что

$$\forall x \in [0,\ 1] \ : \ \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = 0.$$

III.2.57. Предположим, что функции $f : (a,\ b) \to (-1,\ +\infty)$ и $g : (a,\ b) \to \mathbf{R}$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) $\forall\ x \in (a,\ b) : f(x) \neq 0$;
(ii) существует предел

$$\lim_{x \to b-} (f(x)\, g(x)) = L, \quad L \in \mathbf{R},\ L \neq 0;$$

(iii) существует предел

$$\lim_{x \to b-} (1 + f(x))^{g(x)} = e^{\Delta}.$$

Доказать, что $f(x) \to 0$ при $x \to b-$.

III.2.58. Пусть $f \in \mathbf{C}([a,\ b])$. Доказать, что функция f монотонна в строгом смысле на отрезке $[a,\ b]$ тогда и только тогда, когда f принимает значения верхней и нижней граней на каждом отрезке $[\alpha,\ \beta]$, $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, на концах этого отрезка.

III.2.59*. Функция $f \in \mathbf{C}([0,\ +\infty)$ и такова, что

$$\forall\, a > 0 \quad : \quad f(na) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что $f(x) \to 0, \quad x \to +\infty$.

Глава IV ● ПРОИЗВОДНАЯ И ПРИМЕРЫ ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ. Дополнительные задачи к главам I—IV

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ

IV.1.1[1]. Функция f имеет производную при $x = a$. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f(a)-f\left(a-\frac{1}{2n}\right)\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f\left(a-\frac{1}{n}\right)\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}$ для любой последовательности $\{x_n : n\geqslant 1\}$ такой, что $x_n\neq a$, $n\geqslant 1$; $x_n\to a$, $n\to\infty$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)e^x-f(0)}{f(x)\cos x-f(0)}$, $a=0$, $f'(0)\neq 0$;

6) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^n f(x)-x^n f(a)}{x-a}$, $n\in\mathbf{N}$.

IV.1.2. Пусть $\alpha > 0$ для

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}|x|^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказать, что при $\alpha > 1$ существует $f'(0)$ и $f'(0) = 0$ и что при $\alpha \leqslant 1$ производная функции f в точке 0 не существует. Дать геометрическую интерпретацию.

IV.1.3*. Предположим, что функция f имеет производную в точке a, а последовательности $\{x_n : n \geqslant 1\}$ и $\{z_n : n \geqslant 1\}$ таковы, что при каждом $n \geqslant 1$

$$x_n\neq a,\ z_n\neq a,\ x_n\neq z_n;\quad x_n\to a,\ z_n\to a,\ n\to\infty.$$

---

[1] В задачах, в которых явно не указано множество определения функции f, предполагается, что все рассматриваемые значения аргумента принадлежат множеству определения.

Доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$ не обязательно существует;

2) если дополнительно при каждом $n \geqslant 1$ $x_n < a < z_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a).$$

IV.1.4. Функция f имеет производную в точке a и число $k \in \mathbf{N}$ фиксировано. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a + \frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{k}{n}\right) - kf(a)\right).$$

IV.1.5. Функция f имеет производную в точке a. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(f\left(a + \frac{1}{n^2}\right) + f\left(a + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{n}{n^2}\right) - nf(a)\right).$$

IV.1.6. Числа $a > 0$, $m \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ — фиксированы. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^m + (n+2)^m + \cdots + (n+k)^m}{n^{m-1}} - kn\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(a + \frac{1}{n}\right)^n \left(a + \frac{2}{n}\right)^n \cdots \left(a + \frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2a}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{na}{n^2}\right)\right)$.

IV.1.7. Предположим, что $f(0) = 0$ и существует $f'(0)$. Для фиксированного $k \in \mathbf{N}$ вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right)\right).$$

IV.1.8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — действительные числа такие, что

$$\forall x \in (-1, 1) \quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(b_k x)\right| \leqslant |\sin x|.$$

Доказать неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 1.$$

IV.1.9. Функции f и g имеют производные в точке a. Вычислить предел

$$\lim_{x\to ?} \frac{f(x)\,g(a) - f(a)\,g(x)}{x - a}.$$

IV.1.10. Функция f имеет производную в точке a, причем $f(a) > 0$. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{n}}$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}$, $a>0$.

IV.1.11. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi(n+1)}{4n}\right)^n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\pi(n+1)}{2n}\right)^n$.

IV.1.12. Функция P есть многочлен. Доказать, что при каждом $x\in\mathbf{R}$ существует $P'(x)$, причем значение $P'(x)$ равно коэффициенту при h в разложении $P(x+h)$ по степеням h.

IV.1.13. Пусть $\Gamma=\{(x,\ y)\mid y=\sqrt{x},\ \ x\in[0,\ +\infty)\}$. Найти угол между касательной, проведенной к кривой Γ в точке с абсциссой $\frac{3}{4}$, и положительным направлением оси абсцисс. В какой точке касательная к кривой Γ пересекает ось абсцисс под углом $\frac{\pi}{4}$? Найти касательную к кривой Γ, проходящую через точку $(-1,\ 0)$.

IV.1.14. Функция f определена и имеет производную на $\mathbf{R}$. Доказать, что

1) производная нечетной (четной) функции есть функция четная (нечетная);

2) производная периодической с периодом T функция периодична с периодом T.

IV.1.15. Вычислить производную определенной на оси функции

1) $x\mapsto x|x|$; 2) $x\mapsto|x|^3$;

3) $x\mapsto|\sin x|\sin x$; 4) $x\mapsto[x]\sin^2(\pi x)$;

5) $x\mapsto(x-[x])\sin^2(\pi x)$;

6) $x\mapsto(\sin x+|\sin x|)^2$; 7) $x\mapsto|\sin x|^{\frac{3}{2}}$.

IV.1.16. Вычислить производную следующих функций:

1) $f(x)=\log_x 2$, $x>0$, $x\neq 1$;

2) $f(x)=\log_x(\cos x)$, $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\setminus\{1\}$.

IV.1.17. Функция f определена и имеет производную на $\mathbf{R}$. В каких точках функция $|f|$ имеет производную? При каком условии производная функции $|f|$ существует на $\mathbf{R}$?

IV.1.18. Функции f и g определены и имеют производную на $\mathbf{R}$. В каких точках имеет производную функция

$$h(x) := \max(f(x), g(x)), \quad x \in \mathbf{R}?$$

IV.1.19. Функция $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ имеет производную в точках $[a, b]$. Положим

$$g(x) := \max_{[a,x]} f, \quad x \in [a, b].$$

Имеет ли производную функция g в точках $[a, b]$? Существуют ли g'_- и g'_+ на $[a, b]$?

IV.1.20. Определить числа a, b и c так, чтобы функция f имела производную на $\mathbf{R}$,

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leqslant 2, \\ ax + b, & x > 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leqslant 0, \\ ax^2 + bx + c, & 0 < x < 1, \\ 3 - 2x, & x \geqslant 1. \end{cases}$

IV.1.21. Определить многочлен третьей степени, график которого проходит через точки $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ и касательная к графику которого в точке $(0, 0)$ образует с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{4}$.

IV.1.22. Для $x > 0$ положим

$$a_1(x) = \sqrt{x}, \quad a_2(x) = \sqrt{x + a_1(x)}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ a_{n+1}(x) = \sqrt{x + a_n(x)}, \ \ldots$$

Доказать, что для каждого $x > 0$ существует предел

$$\lim_{n \to \infty} a_n(x) =: \varphi(x).$$

Вычислить φ'.

IV.1.23. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Определить производную f' и исследовать ее на непрерывность.

IV.1.24. Пусть P — многочлен степени n с n различными действительными корнями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и коэффициентом a при x^n. Доказать, что

$$P'(x_k) = a \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

IV.1.25. Пусть P — многочлен предыдущей задачи, а Q — произвольный многочлен степени, не большей $n - 1$. Доказать

равенство

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1} \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x - x_k)}$$

для $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Вычислить при $n \geqslant 2$ сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)}.$$

IV.1.26. С помощью результата предыдущей задачи доказать следующие тождества:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k} C_n^k = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-n, \ldots, -1, 0\}$;

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+2k} C_n^k = \frac{n!\,2^n}{x(x+2)(x+4)\ldots(x+2n)}$,
$x \in \mathbf{R} \setminus \{-2n, \ldots, -4, -2, 0\}$.

IV.1.27. Каждая из функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ отлична от 0 и имеет производную в точке x. Доказать соотношение

$$\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\right)'}{\prod\limits_{k=1}^{n} f_k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{f_k(x)}.$$

IV.1.28. Функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$; $g_1, g_2, \ldots, g_n$ имеют производную в точке x и отличны от 0 в этой точке. Доказать равенство

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{g_k}\right)'(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{g_k(x)} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_k'(x)}{f_k(x)} - \frac{g_k'(x)}{g_k(x)}\right).$$

IV.1.29. Пусть $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$ и $x_0 \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$, фиксированы. Доказать, что существует единственный многочлен P степени n такой, что

$$P(x_0) = a_0,\quad P'(x_0) = a_1,\quad P''(x_0) = a_2,\ \ldots,\ P^{(n)}(x_0) = a_n.$$

IV.1.30. С помощью понятия производной доказать формулу бинома Ньютона

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \text{ для } x \in \mathbf{R} \text{ и } n \in \mathbf{N}.$$

IV.1.31. Функции f и g имеют производную в точке x и $f(x) > 0$. Доказать равенство

$$(f^g)'(x) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x) \ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

IV.1.32. С помощью равенства

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1},\quad x\neq 1,\quad n\in\mathbf{N},$$

и понятия производной вычислить сумму

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}.$$

IV.1.33. Вычислить следующие суммы:

1) $x+2^2x^2+\cdots+n^2x^n,\quad x\in\mathbf{R};$

2) $\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n};$

3) $x+3x^3+5x^5+\cdots+(2n+1)x^{2n+1},\quad x\in\mathbf{R};$

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k;$ 5) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2C_n^k;$

6) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k kC_n^k;$ 7) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cos(kx),\quad x\in\mathbf{R}.$

IV.1.34. Для функции f определить левостороннюю и правостороннюю производные f'_- и f'_+ на $\mathbf{R}$, если

1) $f(x)=\max(x^2, x+2),\quad x\in\mathbf{R};$

2) $f(x)=\max(\sin x, 0),\quad x\in\mathbf{R}.$

IV.1.35. Вычислить производную порядка n функции

1) $f(x)=\sin^2 x,\quad x\in\mathbf{R};$

2) $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)},\quad x\in\mathbf{R}\setminus\{1, 2\};$

3) $f(x)=x^2e^x,\quad x\in\mathbf{R};$

4) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4},\quad |x|\neq 2.$

IV.1.36. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<0,\\ x^3, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Вычислить f' на $\mathbf{R}$. В каких точках $x\in\mathbf{R}$ существует $f''(x)$?

IV.1.37. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Вычислить $f^{(n)}(0),\ n\geqslant 1.$

IV.1.38. Доказать, что производные функции $f(x)=\operatorname{arctg} x,\ x\in\mathbf{R}$, удовлетворяют соотношению

$$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x)=0$$

для $x \in \mathbf{R}$ и $n \geqslant 2$. Доказать, что для $m \geqslant 1$

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)!.$$

IV.1.39. С помощью метода математической индукции **доказать** следующие соотношения:

1) $(e^x \sin x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right), \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \geqslant 1;$

2) $(x^n \ln x)^{(n)} = n!\left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \quad x > 0, \quad n \geqslant 1;$

3) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\, x^{-n-1}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right), \; x > 0, \; n \geqslant 1;$

4) $\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}, \quad x \neq 0, \quad n \geqslant 1.$

IV.1.40. Доказать следующие равенства:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right), \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \geqslant 1;$

2) $\sum\limits_{k=1} (-1)^{k+1} C_n^k \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1.$

IV.1.41. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Доказать, что $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ и что $f^{(n)}(0) = 0, \; n \geqslant 1$.

IV.1.42. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x-a} - \frac{1}{b-x}\right), & x \in (a, b), \\ 0, & x \,\overline{\in}\, (a, b). \end{cases}$$

Доказать, что $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$.

IV.1.43. Пусть функция $g \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$, а функция $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ имеет производную на (a, b) и удовлетворяет соотношению

$$f'(x) = g(f(x)), \quad x \in (a, b).$$

Доказать, что $f \in \mathbf{C}^\infty((a, b))$.

IV.1.44. Пусть $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbf{R}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$,— фиксированы, а функция $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ имеет f'' на (a, b) и удовлетворяет соотношению

$$\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Доказать, что $f \in \mathbf{C}^\infty((a, b))$.

IV.1.45. Привести пример функции $f \in C^\infty((-a, a))$, $a > 0$, для которой

1) последовательность $\{f^{(n)}(0) \ : \ n \geqslant 1\}$ ограничена;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = A$ в случаях

$$\text{(i) } A = 1, \quad \text{(ii) } A = 0, \quad \text{(iii) } A = +\infty;$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n} = 1;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n^2} = 1;$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n2^n} = 1.$

IV.1.46. Функция $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ имеет производную на (a, b). Доказать, что

$$\forall \{x_1, x_2\} \subset (a, b), \quad x_1 < x_2 \quad \forall C \in (f'(x_1), f'(x_2))$$
$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \ : \ f'(x_0) = C,$$

где $(f'(x_1), f'(x_2))$ — интервал с концами $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

Предостережение: функция f' не обязательно непрерывна.

IV.1.47*. Функция $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ такова, что

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \exists n(x) \in \mathbf{N} \ : \ f^{(n(x))}(x) = 0.$$

Доказать, что f многочлен.

§ 2. СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

IV.2.1. Функция $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ принимает в точке $c \in (a, b)$ наибольшее значение, то есть

$$\max_{x\in(a,b)} f(x) = f(c),$$

и существуют $f'_-(c)$, $f'_+(c)$. Доказать, что

$$f'_-(c) \geqslant 0, \quad f'_+(c) \leqslant 0$$

(отсюда следует равенство $f'(c) = 0$, если существует $f'(c)$). Дать геометрическую интерпретацию.

IV.2.2. Функция $f \in C([a, b])$ имеет производную в точках (a, b) и $f(a) = f(b) = 0$. Доказать, что при любом $\alpha \in \mathbf{R}$ уравнение

$$\alpha f(x) + f'(x) = 0$$

имеет, по крайней мере, один корень на (a, b).

IV.2.3. Пусть $a > 0$, функция $f \in C([a, b])$ имеет производную f' на (a, b) и

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}.$$

Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \ : \ \theta f'(\theta) = f(\theta).$$

IV.2.4. Предположим, что функции $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$ отличны от 0 на $[a, b]$ и имеют производные на (a, b), причем $f(a)g(b) = f(b)g(a)$. Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \ : \ \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{g'(\theta)}{g(\theta)}.$$

IV.2.5. Функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$ имеет производную на (a, b) и такова, что

$$f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2.$$

Доказать, что уравнение

$$f'(x) f(x) = x$$

имеет, по крайней мере, один корень на (a, b).

IV.2.6. Функция $f \in \mathbf{C}^1([a, b])$ имеет f'' на (a, b) и такова, что $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b) = 0$. Доказать, что существуют две различные точки c_1 и c_2 на (a, b) такие, что

$$f''(c_1) = f''(c_2).$$

IV.2.7. Функции $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$ имеют производную в точках (a, b), причем $f(a) = f(b) = 0$. Доказать, что уравнение

$$f(x) g'(x) + f'(x) = 0$$

имеет, по крайней мере, один корень на (a, b).

IV.2.8. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют условию

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0.$$

Доказать, что многочлен $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет, по крайней мере, один нуль в интервале $(0, 1)$.

IV.2.9. Пусть числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{a_0}{1} + \frac{2a_1}{2} + \frac{2^2 a_2}{3} + \cdots + \frac{2^n a_n}{n+1} = 0.$$

Доказать, что функция

$$[1, e^2] \ni x \mapsto a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \cdots + a_n \ln^n x$$

имеет, по крайней мере, один нуль в интервале $(1, e^2)$.

IV.2.10. Пусть P — многочлен степени n. Если все корни многочлена P действительны, то все корни многочлена P' также действительны. Доказать это утверждение.

IV.2.11. Функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$ имеет производную f' на (a, b), причем $f'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$. Доказать, что $f(a) \neq f(b)$.

IV.2.12. Доказать, что уравнение

$$x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$$

имеет точно один положительный корень.

IV.2.13. Функции f и g имеют производную на (a, b), причем $f'(x)\,g(x) \neq f(x)\,g'(x)$, $x \in (a, b)$. Доказать, что функции f и g не имеют общих нулей и что между любыми двумя нулями одной функции лежит нуль другой функции.

IV.2.14. Функции f и g имеют производную на (a, b), причем $f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$. Доказать, что каждая из функций f и g имеет не более одного нуля на (a, b). Могут ли обе функции иметь нули в (a, b)?

IV.2.15. Доказать, что уравнение

$$3^x + 4^x = 5^x$$

имеет на $\mathbf{R}$ единственное решение $x = 2$.

IV.2.16. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — отличные от 0 действительные числа; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — попарно различные действительные числа. Доказать, что функция

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \cdots + a_n x^{\alpha_n}$$

может иметь не более $(n - 1)$-го нуля на $(0, +\infty)$.

IV.2.17. При условиях предыдущей задачи функция

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + a_n e^{\alpha_n x}$$

может иметь не более чем $n - 1$ нуль на $\mathbf{R}$.

IV.2.18. Для функции $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$ существует f'' на (a, b), причем $f''(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$. Доказать, что функция f может иметь не более двух нулей на (a, b).

IV.2.19. Для функции $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ $f' \in \mathbf{C}([a, b])$ существует f'' на (a, b), причем $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Доказать, что

$$\exists c \in (a, b) \quad\cdot\quad f''(c) = 0.$$

IV.2.20. Доказать, что многочлен $x^{13} + x^7 - x - 1$ имеет только один положительный нуль.

IV.2.21. Функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$ имеет f' в точках (a, b) и не является монотонной. Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad f'(\theta) = 0.$$

IV.2.22. Функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$ имеет левостороннюю производную f'_- на (a, b) и $f(a) = f(b)$. Доказать, что

$$\inf_{(a,b)} f'_- \leqslant 0 \leqslant \sup_{(a,b)} f'_-$$

IV.2.23. Записать формулу Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a)$ и найти значение θ

1) $f(x) = \alpha x + \beta$, $\quad x \in [a, b]$;

2) $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\quad x \in [a, b]$;

3) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $\quad x \in [0, 1]$;

4) $f(x) = \ln x$, $\quad x \in [1, b]$, $\quad b > 1$.

IV.2.24. Предположим, что функция $f \in C([0, 2])$ имеет f'' на $(0, 2)$ и $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$. Доказать, что

$$\exists \theta \in (0, 2) \quad : \quad f''(\theta) = 0.$$

IV.2.25. Пусть функция $f \in C([a, b])$ имеет производную f' на (a, b), причем функция f не является линейной. Доказать, что

$$\exists \{\theta_1, \theta_2\} \subset (a, b) \quad : \quad f'(\theta_1) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(\theta_2).$$

IV.2.26. Функция $f \in C([0, 1])$ имеет производную f' на $(0, 1)$ и

$$f(0) = f(1) = 0, \quad \exists x_0 \in (0, 1) \quad : \quad f(x_0) = 1.$$

Доказать, что

$$\exists \theta \in (0, 1) \quad : \quad |f'(\theta)| > 2.$$

IV.2.27. Функция $f\colon \ (a, b) \to \mathbf{R}$ имеет производную на интервале (a, b) и

$$\forall \{x', x''\} \subset (a, b) \quad : \quad f(x'') - f(x') = f'(x')(x'' - x').$$

Доказать, что f есть линейная функция на (a, b).

IV.2.28. Пусть $\{f, g, h\} \subset C([a, b])$, существуют f', g', h' на (a, b) и

$$F(x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}, \quad x \in [a, b].$$

Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad F'(\theta) = 0.$$

Вывести из этого утверждения теоремы Лагранжа и Коши.

IV.2.29. Пусть $a > 0$, функция $f \in C([a, b])$ имеет производную f' на (a, b). Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(\theta) - \theta f'(\theta).$$

IV.2.30. Пусть $f \in C([a, b])$, существует f'_- на интервале (a, b). Доказать, что

$$\inf_{(a,b)} f'_- \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \sup_{(a,b)} f'_-.$$

IV.2.31. Существует ли функция $f\colon (1, 2) \to \mathbf{R}$, для которой $f'_-(x) = x$, $f'_+(x) = 2x$, $x \in (1, 2)$?

IV.2.32. Для функции $f\colon \ (a, b) \to \mathbf{R}$ существует f'_- на (a, b), причем $f'_- \in C((a, b))$. Доказать, что для всех $x \in (a, b)$ существует $f'(x) = f'_-(x)$.

IV.2.33. Пусть $f \in C([a, b])$, существуют f' на (a, b) и предел

$$\lim_{x \to b-} f'(x) = A.$$

Доказать, что существует $f'(b) = f'_-(b) = A$.

IV.2.34. Функция f имеет производную f' на $(0, +\infty)$ и $f'(x) = O(x)$, $x \to +\infty$. Доказать, что

$$f(x) = O(x^2), \quad x \to +\infty.$$

IV.2.35. Пусть $\{f_1, f_2, \ldots, f_n; g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset \mathbf{C}([a, b])$, существуют $f_1', f_2', \ldots, f_n'; g_1', g_2', \ldots, g_n'$ на (a, b), причем $g_k(a) \neq g_k(b)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что существует число $\theta \in (a, b)$, для которого справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} f_k'(\theta) = \sum_{k=1}^{n} g_k'(\theta) \frac{f_k(b) - f_k(a)}{g_k(b) - g_k(a)}.$$

IV.2.36. Функция $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ имеет производную на $[a, b]$, причем

(i) $f(a) = f(b) = 0$,

(ii) $f'(a) = f_+'(a) > 0$, $f'(b) = f_-'(b) > 0$.

Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad f(\theta) = 0, \quad f'(\theta) \leqslant 0.$$

Дать геометрическую интерпретацию.

IV.2.37. Доказать, что функции $x \mapsto \ln(1 + x)$,

$$x \mapsto \ln(1 + x^2), \quad x \mapsto \operatorname{arctg} x, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

равномерно непрерывны на $[0, +\infty)$.

IV.2.38. Функция $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ имеет f'' на (a, b), причем $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ и

$$\sup_{(a,b)} |f''| < +\infty.$$

Доказать, что функция f равномерно непрерывна на (a, b).

IV.2.39. Пусть $f \in \mathbf{C}^1([a, b])$. Доказать, что

$$\lim_{h \to 0+} \sup_{x \in [a, b-h]} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| = 0.$$

IV.2.40. Функция $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ имеет производную в точках $[a, b]$ и $b - a \geqslant 4$. Доказать, что

$$\exists x \in (a, b) \quad : \quad f'(x) < 1 + f^2(x).$$

IV.2.41. Функция $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ имеет производную в точках (a, b) и удовлетворяет следующим условиям:

(i) $f(x) \to +\infty$, $x \to a+$; $f(x) \to -\infty$, $x \to b-$;

(ii) $\forall x \in (a, b) \quad : \quad f'(x) + f^2(x) + 1 \geqslant 0$.

Доказать, что $b - a \geqslant \pi$.

IV.2.42. Функция $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ имеет производную на (a, b), причем

$$\forall x \in (a, b) \quad : \quad f'(x) = 0.$$

Доказать, что f постоянна на (a, b).

IV.2.43. Функции $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ и $g: (a, b) \to \mathbf{R}$ имеют производную на (a, b), причем

$$\forall x \in (a, b) \; : \; f'(x) = g'(x).$$

Доказать, что

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall x \in (a, b) \; : \; f(x) = g(x) + c.$$

IV.2.44. Определить все функции $f: (a, b) \to \mathbf{R}$, имеющие производную на (a, b) и удовлетворяющие условию

1) $\exists D \in \mathbf{R} \quad \forall x \in (a, b) \; : \; f'(x) = D$;

2) $\exists D \in \mathbf{R} \quad \exists E \in \mathbf{R} \quad \forall x \in (a, b) \; : \; f'(x) = Ex + D$;

3) $\forall x \in (a, b) \; : \; f'(x) = e^x$;

4) $\forall x \in (a, b) \; : \; f'(x) = f(x)$;

5) $\forall x \in (-1, b) \; : \; (1 + x) f'(x) - \alpha f(x) = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}$.

IV.2.45. Доказать равенство, вычислив производную левой части,

1) $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2} = \pi, \quad x \geqslant 1$;

2) $\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x}} + \dfrac{1}{2} \arcsin x = \dfrac{\pi}{4}, \quad -1 < x < 1$;

3) $\arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} - 2 \operatorname{arctg} x = 0, \quad x \geqslant 0$.

IV.2.46. Функции f и g имеют f'' и g'' на (a, b), причем

$$\forall x \in (a, b) \; : \; f''(x) = g''(x).$$

Доказать, что

$$f(x) = g(x) + Bx + A, \quad x \in (a, b)$$

для $\{A, B\} \subset \mathbf{R}$.

IV.2.47. Пусть f — дифференцируемая на $\mathbf{R}$, отличная от постоянной, периодическая функция. Доказать, что существует число $a > 0$ такое, что любой период $T \neq 0$ удовлетворяет неравенству $|T| \geqslant a$.

IV.2.48. Функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x и производная f' непрерывна в точке x. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(x + \frac{k}{n^2}\right) - f(x) \right) = \frac{1}{2} f'(x).$$

§ 3. ПРОИЗВОДНАЯ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

IV.3.1. Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x + 1)\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3x - 1}{(x + 15)\sqrt{x + 3} - 6x - 26} = 8$;

2) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln(3x)}{\operatorname{ctg} x} = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln x = 0;$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{e^x - 1} = -\dfrac{e}{2};$

5) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1;$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1;$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x} = 1;$

8) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{x^{\sin x}} = 0;$

9) $\lim\limits_{x\to n\pi} \dfrac{\arcsin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arctg}(\sin x)} = (-1)^n, \quad n\in \mathbf{Z};$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \sin x}{\ln(1+x) + x\operatorname{tg} x - x} = 2;$

11) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^3 - 5x + 3)}{\ln(x^5 - 6x^2 - 7)} = \dfrac{1}{8};$

12) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x} = -\dfrac{1}{2};$

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right) - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right) - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)} = \dfrac{32}{\pi^2+16};$

14) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{\log_a x - \log_x a} = \dfrac{1}{2} a^{a+1}\ln a(\ln a - 1),$
$a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad x \neq 1;$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}{\sin x - x\cos x} = 2;$

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = 2;$

17) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}} = \dfrac{2}{\pi};$

18) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1} = 1;$

19) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\pi^2}{4} - (\arccos x)(\arccos 2x)}{\arcsin x} = \dfrac{3\pi}{2};$

20) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x} = \dfrac{3}{4}$;

21) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) + e^x - \cos x}{(1 - \sin x)^2 - e^{x^2}} = -1$;

22) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^{x^2} - 1)^2}{\frac{1}{2} x^2 + \cos x - 1} = 24$;

23) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - x \operatorname{arctg} x + e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} = 1$;

24) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 (a^x - 1)}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{x^3}{3}\right)} = 2 \ln a$;

25) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \frac{2}{3} \sin x - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x}{x^5} = -\dfrac{1}{20}$;

26) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6} = -\dfrac{17}{180}$;

27) $\lim\limits_{x \to 0} \arccos \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{\pi}{3}$;

28) $\lim\limits_{x \to \pi-} \left((\pi - x) \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right) = 2$;

29) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \dfrac{3}{2}$;

30) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$;

31) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x - e\right) = -\dfrac{e}{2}$;

32) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} + a^{-\frac{1}{x}} - 2\right) = \ln^2 a$; $\quad a > 0$;

33) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 \left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^\alpha - 1\right) - \alpha x\right) = \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2}$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$;

34) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - \cos \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$;

35) $\lim\limits_{x \to 0+} (2^x - 1)^{\sin x} = 1$;

36) $\lim\limits_{x \to 5} (6 - x)^{\frac{1}{x-5}} = \dfrac{1}{e}$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{\frac{1}{\sin x}} = e;$

38) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1;$

39) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}};$

40) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = e^2;$

41) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(\sin x))^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}};$

42) $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x + x^2)^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} a, & a>1 \\ 1, & 0<a\leqslant 1; \end{cases}$

43) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\cos(2kx)\right)^{(\pi-x)^{-2}} = \exp\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\right);$

44) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1;$

45) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}};$

46) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}};$

47) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)^x = e^{\frac{3}{2}};$

48) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^x = e^{\frac{1}{2}};$

49) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} a, & a>1, \\ 1, & 0\leqslant a<1; \end{cases}$

50) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2+\cos 2x}{\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{e};$

51) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{\sin x}+b^{\operatorname{tg} x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln\sqrt{ab}, \quad a>0,\ b>0;$

52) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}+2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln 2;$

53) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} (\sin 6x + \cos 3x)^{\operatorname{ctg} 6x} = e;$

54) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (2 - \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x - \cos x}} = e^{\sqrt{2}};$

55) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\dfrac{\pi x}{6x+1} + \cos\dfrac{\pi x}{3x+1}\right)^{x} = \exp\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{24}\right);$

56) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin^2\dfrac{\pi x}{4x+1} + \cos^2\dfrac{\pi x^3}{4x^3+1}\right)^{x} = e^{-\frac{\pi}{16}};$

57) $\lim\limits_{x\to 0} \left(3^{x^2-1} + 3^{2x^2-1} + 3^{3x^2-1}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = 3^4;$

58) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4x+1} + \operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{4x+3}\right)^{x} = e^{\frac{\pi}{4}};$

59) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^x\right)^{\frac{1}{x}} = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{p_k},$

$p_k \geqslant 0,\ a_k > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1;$

60) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^x\right)^{\frac{1}{x}} = \max(a_1, a_2, \dots, a_n),\quad p_k > 0,\ a_k > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n;$

61) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^x\right)^{\frac{1}{x}} = \min(a_1, a_2, \dots, a_n),\quad p_k > 0,\ a_k > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n;$

62) $\lim\limits_{x\to e} \left(\dfrac{a^{\ln x} + b^{\ln x}}{a+b}\right)^{\frac{1}{\ln x - 1}} = a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}},\quad a > 0,\ b > 0;$

63) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \left(\left(1 + \dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1} - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x}\right) = \dfrac{e}{2};$

64) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln^{m+1} n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln^m k}{k} = \dfrac{1}{m+1}.$

IV.3.2. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Вычислить $f'(0)$, $f''(0)$.

IV.3.3. Функция $f\colon (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ имеет производную на $(0, +\infty)$, причем $f(x) + f'(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Доказать, что $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

IV.3.4. Пусть для функции $f\colon (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ существует производная f' на $(0, +\infty)$, причем

$$f(x) + 2f'(x)\sqrt{x} \to 0, \quad x \to +\infty$$

Доказать, что $f(x) \to 0, \quad x \to +\infty$.

IV.3.5. Записать формулу Тейлора относительно точки 0 с остаточным членом в форме Пеано для следующих функций:

1) $f(x) = \operatorname{sh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$;

2) $f(x) = \operatorname{ch} x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$;

3) $f(x) = x \ln(1 + x), \quad x > -1$;

4) $f(x) = \sin^2 x, \quad x \in \mathbf{R}$;

5) $f(x) = (a + x)e^x, \quad x \in \mathbf{R}$;

6) $f(x) = e^{x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$;

7) $f(x) = x \ln(1 + x^2), \quad x \in \mathbf{R}$;

8) $f(x) = \ln(1 + x^3), \quad x > -1$;

9) $f(x) = x \sin x - \cos x^2, \quad x \in \mathbf{R}$;

10) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}, \quad -1 < x < 1$;

11) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$.

IV.3.6. Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} = f''(x)$

при условии, что $f''(x)$ существует;

2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} = f''(x)$

при условии, что $f''(x)$ существует;

3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x^3} = f'''(x)$

при условии, что $f'''(x)$ существует.

IV.3.7. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin^{13} x) - \sin^{13} x}{\operatorname{tg}^{26} x}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^n) - \sin^n x}{x^{n+2}}, \quad n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant 2$; $\dfrac{n}{6}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x^n) - \ln^n(1 + x)}{x^{n+1}}, \quad n \in \mathbf{N}$. $\dfrac{n}{2}$

IV.3.8. Определить числа a и b так, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}-ax-b\right)=1.$$

IV.3.9. Определить главную часть относительно шкалы

$$\{x\mapsto x^n \mid n\in\mathbf{N}\}$$

при $x\to 0$ функции

1) $x\mapsto xe^x-\sin x$;

2) $x\mapsto \operatorname{tg} x-\sin x$;

3) $x\mapsto \operatorname{sh} x-\sin x$;

4) $x\mapsto \ln(1+\operatorname{tg} x)+\arcsin 2x$;

5) $x\mapsto 1-\cos(1-\cos x)$;

6) $x\mapsto x\sin(\sin x)-\sin^2 x$.

IV.3.10. Найти три члена асимптотического разложения относительно шкалы предыдущей задачи при $x\to 0$ функции

1) $x\mapsto e^{\cos x}-e^{x+1}$;

2) $x\mapsto \operatorname{tg}\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)-\sin\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)$;

3) $x\mapsto \ln(1+x^2)+e^{\sin x}-e^x+x^8-x\operatorname{arctg} x$.

IV.3.11. Записать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа относительно точки 1 для функции

1) $x\mapsto e^x$; 2) $x\mapsto \ln x$.

IV.3.12. Пусть $f\in\mathbf{C}^2((-1,1))$, $f''(0)\neq 0$ и для каждого $x\in(-1,1)$ значение $\theta(x)$ определяется как одно из чисел θ, для которых

$$f(x)=f(0)+f'(\theta)\,x,$$

и θ принадлежит интервалу с концами 0 и x. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\theta(x)}{x}.$$

IV.3.13. Пусть $f\in\mathbf{C}^3((-1,1))$, $f'''(0)\neq 0$ и для каждого $x\in(-1,1)$ значение $\theta(x)$ определяется как одно из чисел θ, для которых

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{1}{2}f''(\theta)\,x^2,$$

и θ принадлежит интервалу с концами 0 и x. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\theta(x)}{x}=\frac{1}{3}.$$

IV.3.14. Предположим, что $f\in\mathbf{C}^2((0,+\infty))$ и $xf(x)\to 0$, $xf''(x)\to 0$, $x\to+\infty$.
Доказать, что $xf'(x)\to 0$, $x\to+\infty$.

IV.3.15. Пусть $\{f, g\} \subset \mathbf{C}^2([0, 1])$, причем

$$f'(0)\, g''(0) \neq f''(0)\, g'(0); \quad \forall\, x \in (0, 1) \quad : \quad g'(x) \neq 0.$$

Для каждого $x \in (0, 1)$ определим $\theta(x)$ как какое-нибудь значение θ, для которого

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Доказать, что

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

IV.3.16. Пусть функция $f \in \mathbf{C}^2([0, 1])$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x) \to 0, \ x \to 1-$;

2) $\exists\, c \in \mathbf{R} \quad \forall\, x \in [0, 1) \quad : \quad (1-x)^2 |f''(x)| \leqslant c$.

Доказать, что

$$(1-x) f'(x) \to 0, \quad x \to 1-.$$

IV.3.17. Доказать следующие неравенства:

1) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad x > 0, \ n \in \mathbf{N}$;

2) $\sqrt[n]{1+x} > 1 + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2n^2} x^2, \quad x > 0, \ n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant 2$;

3) $0 < \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} < \frac{5x^3}{81}, \quad x > 0.$

IV.3.18. Предположим, что $f \in \mathbf{C}^2((-1, 1))$, $f(0) = 0$. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0+} \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} f(kx).$$

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ МОНОТОННОСТИ И ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИЙ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

IV.4.1. Пусть $f\colon (-1, 1) \to \mathbf{R}$ — функция, имеющая производную на $(-1, 1)$ и $f'(0) > 0$. Существует ли окрестность точки 0, в которой функция f возрастает? Существует ли такая окрестность, если функция f' непрерывна в точке 0?

IV.4.2. При каких значениях $a \in \mathbf{R}$ функция

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto ax - \sin x$$

возрастает на $\mathbf{R}$?

IV.4.3. Пусть функции $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ монотонно возрастают на $\mathbf{R}$. Какие из функций $f + g$, $f - g$, fg, $f(g)$ монотонно возрастают на $\mathbf{R}$?

IV.4.4. Определить интервалы монотонности следующих функций:

1) $\mathbf{R} \ni x \mapsto (1-x)e^x$;

2) $(0, +\infty) \ni x \mapsto x^x$;

3) $(\mathbf{R} \setminus [-1, 0]) \ni x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;

4) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ni x \mapsto \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;

5) $[0, 1] \ni x \mapsto a^x b^{1-x} + a^{1-x} b^x$;
$\{a, b\} \subset (0, +\infty) \setminus \{1\}$;

6) $[2, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x}$.

IV.4.5. Доказать, что функция

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - (1+x)e^{-x}$$

положительна и строго возрастает на $(0, +\infty)$.

IV.4.6. Доказать, что функция

$$f(x) = \frac{2}{2x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right), \quad x>0,$$

строго возрастает на $(0, +\infty)$ и что $f(x) < 0$, $x > 0$.

IV.4.7. Доказать, что функция

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}, \quad x>0,$$

строго возрастает на $(0, +\infty)$ и что $f(x) < 0$, $x > 0$.

IV.4.8. Доказать, что функция

$$f(x) = x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right), \quad x>0; \ a>0,$$

строго возрастает на $(0, +\infty)$. Доказать неравенство

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x < e^a, \quad x>0.$$

IV.4.9. Доказать, что функция

$$f(x) = \left(x+\frac{a}{2}\right)\ln\left(1+\frac{a}{x}\right), \quad x>0; \ a>0,$$

строго убывает на $(0, +\infty)$. Доказать неравенство

$$e^a < \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+\frac{a}{2}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

IV.4.10. Доказать, что функция

$$f(x) = \log_x(x+1), \quad x>1,$$

строго убывает на $(1, +\infty)$. Проверить, что

$$\log_2 3 > \log_4 5.$$

IV.4.11. Является ли инъекцией, сюръекцией или биекцией функция f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, если

1) $f(x) = 3x^5 + 7x^3 + 2x + 1, \quad x \in \mathbf{R}$;

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad x \in \mathbf{R}$?

IV.4.12. Пусть $0 < a < b$. Доказать, что функция

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$$

строго возврастает на $(0, +\infty)$.

IV.4.13. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. Доказать, что функция

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}$$

строго возрастает на $(0, +\infty)$.

IV.4.14. Доказать неравенство

$$x^a - ax + a - 1 > 0, \quad a > 1, \; x > 0, \; x \neq 1.$$

IV.4.15. Функция $f \in \mathbf{C}([0, +\infty))$ имеет производную f' на $(0, +\infty)$, причем $f(0) = 0$ и f' строго возрастает на $(0, +\infty)$. Доказать, что функция

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

строго возрастает на $(0, +\infty)$.

IV.4.16. Пусть P — многочлен с положительными коэффициентами. Доказать, что функция

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto \frac{xP'(x)}{P(x)}$$

строго возрастает на $(0, +\infty)$.

IV.4.17. Определить число корней уравнения

$$\frac{\cos x}{x} = 1.$$

IV.4.18. Пусть $B_n(f)$ — многочлен Бернштейна функции f (см. задачу III.2.53.). Если функция f возрастает (убывает) на $[0, 1]$, то $B_n(f)$ возрастает (убывает) на $[0, 1]$. Доказать это утверждение.

IV.4.19. При каждом $a \in \mathbf{R}$ определить число действительных решений уравнения

$$x + \sin x + a = 0.$$

IV.4.20. Доказать существование обратной функции g и вычислить g' для функции f, если

1) $\mathbf{R} \ni x \mapsto y = f(x) = x + \sin x \in \mathbf{R}$;

2) $\mathbf{R} \ni x \mapsto y = f(x) = x^3 + 3x \in \mathbf{R}$;

3) $[1, +\infty) \ni x \mapsto y = f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \in (0, 1]$;

4) $(0, +\infty) \ni x \mapsto y = f(x) = x + \ln x \in (-\infty, +\infty)$;

5) $(-1, +\infty) \ni x \mapsto y = f(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \in \mathbf{R}$.

IV.4.21. Доказать неравенство

$$a^{1+\frac{x}{a}} - a - x > 0, \quad x > 0, \ a \geqslant e.$$

Проверить, что при $x > 0$, $a \geqslant e$

$$(a + x)^a < a^{a+x}.$$

IV.4.22. Доказать неравенство

$$n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 9.$$

IV.4.23. Доказать, что

$$\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}, \quad 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

IV.4.24. Доказать, что при $x > 1$ выполняются следующие неравенства:

1) $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 > 0$;

2) $3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 19 > 0$;

3) $x^3 + 3x + 6x \ln x + 2 > 6x^2$;

4) $x^4 + 8x + 12x^2 \ln x > 8x^3 + 1$.

IV.4.25. Доказать следующие неравенства:

1) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \quad x > 1$;

2) $\sqrt[4]{x} - 2x \leqslant \frac{3}{8}, \quad x \geqslant 0$;

3) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}, \quad x \geqslant 0$;

4) $\ln n < m\sqrt[m]{n}, \quad \{m, n\} \subset \mathbf{N}$.

IV.4.26. Пусть $0 < a < b$. Доказать, что

$$bx^a - ax^b < b - a, \quad x > 1.$$

IV.4.27. Доказать, что

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \sin x > x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

IV.4.28. Доказать, что

$$x(2 + \cos x) > 3 \sin x, \quad x > 0.$$

IV.4.29. Доказать, что

$$\cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

IV.4.30. Доказать неравенство

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\operatorname{arcctg} x>1, \quad x>0.$$

IV.4.31. Доказать, что

$$2 \operatorname{tg} x-\operatorname{sh} x>0, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

IV.4.32. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n}+\ln n>\ln (n+1)>\frac{1}{ne}+\ln n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

IV.4.33. Доказать неравенство

$$\frac{x}{e}>\ln x, \quad x>0, \quad x \neq e,$$

дать геометрическую интерпретацию.

IV.4.34. Доказать, что для всех $x>0$, $x \neq 1$, справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{x \ln x}{x^{2}-1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

IV.4.35. Доказать неравенство

$$\ln \left(1+\sqrt{1+x^{2}}\right)<\frac{1}{x}+\ln x, \quad x>0.$$

IV.4.36. Доказать, что при $x>0$

$$\ln (1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

IV.4.37. Доказать неравенство

$$(x-1)^{2} \geqslant x \ln ^{2} x, \quad x>0.$$

IV.4.38. Доказать неравенство

$$x+\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{6}<(x+1) \ln (x+1)<x+\frac{x^{2}}{2}, \quad x>0$$

IV.4.39. Доказать, что для $x \in (0, \pi)$ справедливо неравенство

$$\ln (1+\cos x)<\ln 2-\frac{x^{2}}{4}$$

IV.4.40. Доказать неравенства

$$\ln \left(1+x^{2}\right)<x \operatorname{arctg} x<x^{2}, \quad x>0.$$

IV.4.41. Доказать, что

$$e^{x}<1+x e^{x}, \quad x>0.$$

IV.4.42. Доказать неравенство

$$e^{x}-1-x<x^{2} e^{x}, \quad x>0.$$

IV.4.43. Доказать, что при $x > 0$

$$xe^{\frac{x}{2}} < e^x - 1.$$

IV.4.44. Доказать неравенство

$$e^{\frac{x}{2}} < \frac{e^x - 1}{x} < e^x, \quad x > 0.$$

IV.4.45. Доказать, что при $x \in (0, e)$ справедливо неравенство

$$(e + x)^{e-x} > (e - x)^{e+x}.$$

IV.4.46. Доказать неравенство

$$e^{x-1} + \ln x - 2x + 1 > 0, \quad x > 1.$$

IV.4.47. Доказать, что

$$e^x < (1 + x)^{1+x}, \quad x > 0.$$

IV.4.48. Доказать, что при $x > 0$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} \leqslant x^x$$

IV.4.49. Доказать следующие неравенства:

1) $\sin x < x, \quad x > 0;$

2) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x > 0;$

3) $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \quad x > 0;$

4) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}, \quad x > 0;$

5) $\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad x > 0.$

IV.4.50*. Доказать неравенство

$$\pi x (1 - x) < \sin \pi x \leqslant 4x (1 - x), \quad 0 < x < 1.$$

Дать геометрическую интерпретацию.

IV.4.51*. Доказать, что для любого $x > 0$ и любого $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$0 < e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n}(e^x - 1).$$

IV.4.52. Пусть $n \in \mathbf{N}$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset [0, +\infty)$. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

IV.4.53*. Пусть $n \in \mathbf{N}$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (0, +\infty)$. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \cdot \exp\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} - \frac{n}{2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}\right).$$

IV.4.54. Пусть $a > 1$. Доказать неравенство

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^a < \frac{x^a+y^a}{2}, \quad x>0, \quad y>0, \quad x \neq y.$$

IV.4.55. Пусть $a > 1$. Доказать, что для любых $n \in \mathbf{N}$, $x_1 \geqslant 0, \ldots$ $\ldots, x_n \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^a \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^a.$$

IV.4.56. Доказать неравенство

$$x\ln x + y\ln y \geqslant (x+y)\ln\frac{x+y}{2}, \quad x>0, \quad y>0.$$

IV.4.57. Доказать, что для любых $n \in \mathbf{N}$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (0, \pi)$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\sin x_k} \leqslant \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

IV.4.58. Пусть $n \in \mathbf{N}$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (0, \pi)$. Доказать, что

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\sin x_k}.$$

IV.4.59*. Пусть $n \in \mathbf{N}$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (0, +\infty)$ и $x_1 + x_2 + \ldots$ $\ldots + x_n = 1$, $a > 0$. Доказать неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a \geqslant \frac{(n^2+1)^a}{n^{a-1}}.$$

IV.4.60. Функция $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ выпукла вверх на (a, b) и имеет производную f' на (a, b). Доказать, что

$$\forall x \in (a, b) \quad : \quad f(x) = \min_{u \in (a,b)} (f(u) + f'(u)(x-u)).$$

Дать геометрическую интерпретацию этому утверждению.

IV.4.61. Функция f: $(a, b) \to \mathbf{R}$ выпукла вниз на (a, b) и имеет производную f' на (a, b). Доказать, что

$$\forall x \in (a, b) \quad : \quad f(x) = \max_{u \in (a,b)} (f(u) + f'(u)(x-u)).$$

IV.4.62. Функция f: $(a, b) \to \mathbf{R}$ имеет производную f' на (a, b). Доказать, что функция f выпукла вниз на (a, b) тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in (a, b) \quad \forall u \in (a, b) \quad : \quad f(x) \geqslant f(u) + f'(u)(x-u).$$

IV.4.63*. Пусть f — выпуклая на отрезке $[a, b]$ функция. Доказать, что $f \in C((a, b))$.

IV.4.64. Функция $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ строго выпукла вниз на (a, b) тогда и только тогда, когда для любых $x_1 < x_2 < x_3$ из (a, b) справедливо неравенство

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} > 0$$

IV.4.65. Функция f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ выпукла и ограничена на $\mathbf{R}$. Доказать, что f постоянна на $\mathbf{R}$.

IV.4.66. Функция f: $[a, +\infty) \to \mathbf{R}$ имеет f'' на $[a, +\infty)$, причем для некоторого $\alpha > 0$ для каждого $x > a$ $f''(x) \geqslant \alpha$. Доказать, что

$$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} \geqslant \alpha.$$

IV.4.67. Функция f выпукла вниз на оси. Доказать, что возможен один из трех случаев:

(i) f возрастает на оси,

(ii) f убывает на оси,

(iii) существует точка a такая, что f убывает на $(-\infty, a)$ и возрастает на $(a, +\infty)$.

§ 5. ЭКСТРЕМУМЫ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

IV.5.1*. Доказать, что множество точек, в которых функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ имеет строгий локальный экстремум, не более чем счетно.

IV.5.2. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что точка 0 есть точка строгого локального минимума и что производная f' не сохраняет знак ни правее, ни левее точки 0.

IV.5.3. Найти точки локального экстремума следующих функций:

1) $(0, +\infty) \ni x \mapsto x^x$;

2) $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^n e^{-x}, \quad n \in \mathbf{N}$;

3) $\mathbf{R} \ni x \mapsto e^{-x^2}$;

4) $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}$;

5) $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^4(1 - x)^3$;

6) $(\mathbf{R} \setminus \{1\}) \ni x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{(x - 1)^2}$;

7) $\mathbf{R} \ni x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4(2x^2+1)}$;

8) $\mathbf{R} \ni x \mapsto \dfrac{x(x-3)}{x^2-2x+2}$;

9) $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^5 - 5x$;

10) $(0, +\infty) \ni x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$;

11) $\mathbf{R} \ni x \mapsto |x| e^{-x^2}$;

12) $\mathbf{R} \ni x \mapsto |x| e^{-|x-1|}$;

13) $\mathbf{R} \ni x \mapsto \sqrt[4]{1 + |x| e^{-x^2}}$;

14) $\mathbf{R} \ni x \mapsto \exp(x^3 - 3x)$;

15) $\mathbf{R} \ni x \mapsto \operatorname{arctg}(x^3 - x)$;

16) $(-\pi, \pi) \ni x \mapsto x + |\sin 2x|$.

IV.5.4. Доказать, что при $x \in (0, +\infty)$

$$e^x \geqslant x^e.$$

IV.5.5. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Найти наименьшее на $\mathbf{R}$ значение функции

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2.$$

IV.5.6. Определить наименьшее и наибольшее значения на отрезке $[-1, 1]$ функции

$$[-1, 1] \ni x \mapsto x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

IV.5.7. Для $\{m, n\} \subset \mathbf{N}$ найти

$$\max_{x \in \mathbf{R}} (\sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x).$$

IV.5.8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные действительные числа. Определить наименьшее на $\mathbf{R}$ значение функции

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|.$$

IV.5.9. Определить минимум на $\mathbf{R}$ функции

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

IV.5.10. Найти наибольшее на $\mathbf{R}$ значение функции

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - 1|}.$$

IV.5.11. Для $n \in \mathbf{N}$ пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset [0, +\infty)$. Доказать, что

1) $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{-a_k} \leqslant \dfrac{1}{e}$;

2) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 e^{-a_k} \leqslant \frac{4}{e^2}$;

3) $\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\frac{3}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.

IV.5.12. Построить графики функций из задачи IV.5.3.

IV.5.13. Построить графики следующих функций:

1) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;

2) $(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}) \ni x \mapsto \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}$;

3) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \ni x \mapsto \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$;

4) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \ni x \mapsto \frac{x^3 + 3x^2 + 5}{x}$;

5) $(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \ni x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1}$;

6) $(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \ni x \mapsto \frac{x^3}{2(x-1)^2}$;

7) $(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \ni x \mapsto \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;

8) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{x^4 + 2}{2x^2 + 1}$;

9) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \ni x \mapsto |x - 1| + \frac{1}{x}$;

10) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \ni x \mapsto \frac{(x-1)|x|}{x+1}$;

11) $(\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}) \ni x \mapsto \frac{x}{|x-2|} + \frac{x-2}{|x|}$;

12) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x + \sqrt{|1 - x^2|}$;

13) $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}\right) \ni x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$;

14) $(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \ni x \mapsto 2^{\frac{1}{1-x}}$;

15) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 e^{-x^2}$;

16) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^4 e^{-x}$;

17) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \ni x \mapsto x 2^{\frac{1}{x}}$;

18) $(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) \ni x \mapsto \exp\left(\frac{2 - x^2}{x^2 - 1}\right)$;

19) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \ni x \mapsto x \ln|x|$;

20) $\left(\mathbf{R} \setminus \left\{0, -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right\}\right) \ni x \mapsto \frac{1}{1+\ln|x|}$;

21) $(\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}) \ni x \mapsto \frac{x}{\ln|x|}$;

22) $(\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}) \ni x \mapsto x \log_{|x|} 2$;

23) $\mathbf{R} \ni x \mapsto \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$;

24) $[0, +\infty) \ni x \mapsto \frac{1}{1+4x^4 \sin^2 x}$.

IV.5.14. Для каждого действительного a определить число действительных корней следующих уравнений:

1) $ax = \ln x$;

2) $x^3 + 3x^2 - ax + 5 = 0$;

3) $x^3 \ln x - x + a = 0$;

4) $1 + x + \frac{x^2}{2} = ae^x$;

5) $2x^3 \ln x + x^2 - 4x + a = 0$.

§ 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВАМ I—IV

IV.6.1. Привести пример представления множества натуральных чисел $\mathbf{N}$ в виде

$$\mathbf{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

где $A_k \subset \mathbf{N}$ и A_k счетно при каждом $k \geqslant 1$, причем $A_k \cap A_m = \varnothing$ при $k \neq m$.

IV.6.2. Доказать, что множество $A \subset \mathbf{R}^2$, удовлетворяющее условию

$$\forall (x_1, x_2) \in A \quad \exists r > 0 \quad \forall (y_1, y_2) \in A \setminus \{(x_1, x_2)\}: \\ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \geqslant r^2,$$

не более чем счетно.

IV.6.3. Пусть числа $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$ таковы, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, и положим

$$A = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 1\right\}.$$

Определить

$$\min \left\{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \;\middle|\; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A\right\}.$$

IV.6.4. Пусть A — произвольное подмножество $\mathbf{R}$, $A \neq \varnothing$ и функция $f\colon\ A \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L \in \mathbf{R}$:

$$\forall \{x, y\} \subset A \quad : \quad |f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Доказать, что существует продолжение функции f на $\mathbf{R}$, удовлетворяющее на $\mathbf{R}$ условию Липшица с постоянной L.

Указание. Рассмотреть функцию

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \inf_{y \in A} (f(y) + L|x - y|).$$

IV.6.5. Пусть $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$;

$$a_n^n \to a, \quad b_n^n \to b, \quad n \to \infty; \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Доказать, что для чисел $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q = 1$ справедливо соотношение

$$\lim_{n \to \infty} (pa_n + qb_n)^n = a^p b^q.$$

IV.6.6. Предположим, что $a_n \in (0, 1)$, $n \in \mathbf{N}$, и что $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^3 + \cdots + a_1^n).$$

IV.6.7. Предположим, что $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, и справедливы неравенства

$$a_{n+1} \leqslant \frac{(s_n - 1)\, a_n + a_{n-1}}{s_{n+1}}, \quad n \geqslant 2,$$

где $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Найти предел

$$\lim_{n \to \infty} a_n.$$

IV.6.8. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} ((n+1) \sqrt[n+1]{n+1} - n \sqrt[n]{n})$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\ln \ln n} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{a_k}{k \ln k}$

для последовательности $a_n \to a$, $n \to \infty$;

4) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\ln^2 n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$;

5) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\ln^3 n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln^2 k}{k}$;

6) $\lim n^{-\frac{3}{2}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

IV.6.9*. Пусть $a_1 > 0$ и

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать, что

$$na_n \to 2, \quad n \to \infty.$$

IV.6.10*. Пусть $a_1 > 0$ и

$$a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать, что

$$a_n \sqrt{n} \to \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad n \to \infty.$$

IV.6.11*. Пусть $a_1 = 1$ и

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \operatorname{arctg} a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что $na_n \to 1$, $n \to \infty$.

IV.6.12. Последовательность $\{a_n \mid n \geqslant 1\}$ такова, что

$$a_{m+n} \leqslant a_m + a_n, \quad m \geqslant 1, \; n \geqslant 1.$$

Доказать, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n}.$$

IV.6.13. Пусть P — многочлен с рациональными коэффициентами, принимающий рациональные значения в рациональных точках и иррациональные — в иррациональных. Доказать, что P есть многочлен первой степени.

IV.6.14. Доказать, что не существует непрерывной биекции множества $\mathbf{R}$ на отрезок $[-1, 1]$.

IV.6.15. Доказать, что не существует непрерывной биекции множества $\mathbf{R}$ на окружность в плоскости.

IV.6.16. Пусть $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ есть биекции и строго возрастают на $\mathbf{R}$. Доказать, что функция

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto e^{f(x)} + g(x) \in \mathbf{R}$$

есть биекция.

IV.6.17. Построить график функции и определить множества точек, в которых она непрерывна и имеет производную,

1) $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2 + x^{2n} + (x-1)^{2n}}{1 + x^{2n}}, \quad x \geqslant 0;$

2) $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{(x-1)^{2n} + (x+1)^{2n}}, \quad x \in \mathbf{R}.$

IV.6.18. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{|x|}, & x \neq 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Определить множества точек, в которых f непрерывна и имеет производную.

IV.6.19. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln 2}-\dfrac{1}{2^x-1}, & x\neq 0;\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

Определить множество точек, в которых существует производная.

IV.6.20. Пусть $\{f, g\}\subset \mathbf{C}^2([0, 1])$, причем $g'(x)\neq 0$, $x\in(0, 1)$ и $f'(0)g''(0)\neq f''(0)g'(0)$. Для $x\in(0, 1]$ пусть $\theta(x)$ какое-либо из чисел теоремы Коши

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))}.$$

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\theta(x)}{x}.$$

IV.6.21. Функция $f\colon [a, b]\to\mathbf{R}$ имеет производную f' на $[a, b]$, причем $f'(a)=f'(b)$. Доказать, что

$$\exists\theta\in(a, b) : f'(\theta)=\frac{f(\theta)-f(a)}{\theta-a}.$$

Дать геометрическую интерпретацию.

IV.6.22. Функция $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ строго выпукла на $\mathbf{R}$ и удовлетворяет условию

$$\exists x_0\in\mathbf{R} : f(x_0)=\min_{\mathbf{R}} f.$$

Доказать, что $f(x)\to+\infty$, $|x|\to+\infty$.

IV.6.23. Функция $f\colon [a, b]\to\mathbf{R}$ выпукла на $[a, b]$, $\theta\in(a, b)$ — фиксированная точка, в которой существует производная $f'(\theta)$. Доказать, что

$$\exists\{x_1, x_2\}\subset[a, b],\ x_1\neq x_2 : \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\theta).$$

Дать геометрическую интерпретацию утверждению задачи.

IV.6.24. Для функции $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ существует f'' на $\mathbf{R}$ и конечны величины

$$M_0=\sup_{\mathbf{R}}|f|,\quad M_2=\sup_{\mathbf{R}}|f''|.$$

Пусть x — произвольное фиксированное число. Доказать, что для любого отрезка $[a, b]$ такого, что $(a, b)\ni x$, справедливо неравенство

$$|f'(x)|\leqslant\frac{2M_0}{b-a}+M_2(b-a).$$

На основании этого неравенства доказать, что

$$\sup_{\mathbf{R}} |f'| \leqslant 2\sqrt{2}\sqrt{M_0 M_2}.$$

IV.6.25. Для функции f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ существует f''' на $\mathbf{R}$ и конечны величины

$$M_0 = \sup_{\mathbf{R}} |f|, \quad M_3 = \sup_{\mathbf{R}} |f'''|.$$

Доказать, что

$$\sup_{\mathbf{R}} |f'| \leqslant 8 M_0^{\frac{2}{3}} M_3^{\frac{1}{3}}.$$

IV.6.26. Пусть для $m \in \mathbf{N}$

$$P(x) - \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^{k} (-1)^k (x-k)^m, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что $P(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$.

Глава V • НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ПРИМИТИВНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

V.1.1. Для функции $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$, $x \in \mathbf{R}$, найти примитивную на $\mathbf{R}$, которая проходит через точку $(1, \pi)$.

V.1.2. Проверить, что функция

$$F(x) = (-1)^k \cos x + 2(k-1), \quad x \in [(k-1)\pi, k\pi], \quad k \in \mathbf{Z},$$

есть примитивная для функции $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbf{R}$.

V.1.3. Функции $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$ и $g\colon (a, b) \to \mathbf{R}$ имеют производные f' и g' на (a, b). Доказать, что

(i) fg есть примитивная функции $f'g + fg'$ на (a, b);

(ii) $\frac{f}{g}$ есть примитивная на (a, b) функции $\frac{1}{g^2}(f'g - fg')$,

если дополнительно $g(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$.

V.1.4. Пусть F — примитивная на $\mathbf{R}$ функции $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Доказать следующие утверждения:

(i) если f нечетная функция, то F — четная функция;

(ii) если f четная функция, то функция $F - F(0)$ нечетная;

(iii) если f периодична с периодом T, $F(0) = F(T)$, то функция F периодична с периодом T на $\mathbf{R}$.

V.1.5. Пусть $F \in \mathbf{C}((a, b))$, $c \in (a, b)$, и функция $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке c. Предположим, что функция F есть примитивная функции f на каждом из интервалов (a, c) и (c, b). Доказать, что F есть примитивная функции f на (a, b).

V.1.6. Определить примитивную на оси следующих функций:

1) $\mathbf{R} \ni x \mapsto e^{|x|}$;
2) $\mathbf{R} \ni x \mapsto |x| e^x$;
3) $\mathbf{R} \ni x \mapsto |x^2 - 2x|$;
4) $\mathbf{R} \ni x \mapsto |\cos x|$;
5) $\mathbf{R} \ni x \mapsto \sin x + |\sin x|$;
6) $(0, +\infty) \ni x \mapsto |\ln x|$;
7) $\mathbf{R} \ni x \mapsto \max(1, x^2)$.

V.1.7. Функция $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$ имеет производную второго порядка f'' на (a, b), причем

$$f''(x) = cf(x), \quad x \in (a, b),$$

с некоторым числом $c \neq 0$. Проверить, что функция $\frac{1}{c} f'$ есть примитивная для f на (a, b).

V.1.8. Функции $f: (a, b) \to \mathbf{R}$, $g: (a, b) \to \mathbf{R}$ имеют производные f'', g'' на (a, b), причем

$$f''(x) = cf(x), \quad g''(x) = dg(x), \quad x \in (a, b),$$

с некоторыми числами c и d, $c \neq d$. Проверить, что функция

$$\frac{1}{c-d}(f'g - fg')$$

есть примитивная для функциии fg на (a, b).

V.1.9. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

не имеет примитивной на $(-1, 1)$.

V.1.10. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int \frac{x^8 dx}{(x-1)^{12}}$, $x \in (-\infty, 1)$ или $x \in (1, +\infty)$;

2) $\int \frac{x^5 dx}{(2+x^2)^3}$, $x \in \mathbf{R}$;

3) $\int \frac{P(x)}{(x-a)^n} dx$, $x \in (-\infty, a)$ **или** $x \in (a, +\infty)$,

где $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, P — многочлен;

4) $\int \frac{e^{3x}}{2+e^x} dx$, $x \in \mathbf{R}$;

5) $\int x^3 \sqrt{1-x^2}\, dx$, $x \in (-1, 1)$;

6) $\int \frac{dx}{(x+1)^3 (x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2 (x-1)^4}}$, $x \in (1, +\infty)$;

8) $\int x^2 \ln \frac{x-1}{x} dx$, $x \in (-\infty, 0)$ **или** $x \in (1, +\infty)$;

9) $\int \ln(1+x+x^2)\, dx$, $x \in \mathbf{R}$;

10) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x dx$, $x \in \mathbf{R}$;

11) $\int (a^x + a^{-x})^n dx$, $x \in \mathbf{R}$,

где $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbf{N}$;

12) $\int \frac{x^{2n}}{x^2+a^2} dx$, $x \in \mathbf{R}$; $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$;

13) $\int \frac{x^{2n}}{x^2 - a^2}\,dx, \quad x \in (a, +\infty); \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\};$

14) $\int \frac{dx}{x^{2n}(x^2 + a^2)}, \quad x \in (0, +\infty); \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\};$

15) $\int P(x)\,e^{ax}\,dx, \quad x \in \mathbf{R},$

где $a \in \mathbf{R}$, P — многочлен;

16) $\int P(x) \sin x\,dx, \quad x \in \mathbf{R},$ где P — многочлен;

17) $\int P(x) \ln x\,dx, \quad x \in (0, +\infty);$

18) $\int \frac{dx}{\cos^{2n} x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbf{N}.$

Глава VI ● ИНТЕГРАЛ РИМАНА

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА. СУЩЕСТВОВАНИЕ

VI.1.1. Записать нижнюю $L(f, \lambda)$ и верхнюю $U(f, \lambda)$ суммы Дарбу для функции $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, и разбиения $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots \ldots, x_n\}$, где $0 = x_0 < \ldots < x_n = 1$. Определить нижний интеграл от f по отрезку $[0, 1]$

VI.1.2. Доказать утверждение: если функция f монотонна на $[a, b]$ или $f \in \mathbf{C}([a, b])$, то каждая нижняя (верхняя) сумма Дарбу для f есть интегральная сумма.

VI.1.3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

Доказать, что $f \notin \mathbf{R}([0, 1])$.

VI.1.4. Предположим, что $f \in \mathbf{R}([a, b])$. Доказать, что:

(i) $|f| \in \mathbf{R}([a, b])$,

(ii) $\sin f \in \mathbf{R}([a, b])$,

(iii) $f^2 \in \mathbf{R}([a, b])$,

(iv) $\sqrt{|f|} \in \mathbf{R}([a, b])$,

(v) $\operatorname{arctg} f \in \mathbf{R}([a, b])$.

VI.1.5. Функция $f \in \mathbf{R}([0, 1])$. Доказать, что функция

$$[-1, 1] \ni x \mapsto f(|x|)$$

входит в $\mathbf{R}([-1, 1])$.

√**VI.1.6.** Пусть функция $f \in \mathbf{R}([a, b])$, функция g удовлетворяет на множестве $f([a, b])$ условию Липшица порядка 1. Доказать, что $g(f) \in \mathbf{R}([a, b])$.

VI.1.7. Функция f ограничена на $[a, b]$ и непрерывна в точках $[a, b]$, исключая точки сходящейся последовательности точек из $[a, b]$. Доказать, что $f \in \mathbf{R}([a, b])$.

VI.1.8. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что $f \in \mathbf{R}([0, 1])$.

VI.1.9. Пусть $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ — ограниченная на $[a, b]$ функция. Положим

$$g(x) = \inf \{f(u) \mid u \in [a, x]\}, \quad x \in [a, b].$$

Доказать, что $g \in \mathbf{R}([a, b])$.

VI.1.10. Пусть $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$ и

$$h(x) := \max(f(x), g(x)), \ x \in [a, b].$$

Доказать, что $h \in \mathbf{R}([a, b])$.

VI.1.11. Пусть $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ — ограниченная на $[a, b]$ функция. Доказать, что $f \in \mathbf{R}([a, b])$ тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует разбиение λ отрезка $[a, b]$, для которого сумма длин отрезков с колебанием функции, большим чем δ, является меньше чем ε.

VI.1.12. Функция f имеет конечный предел в каждой точке $[a, b]$. Доказать, что $f \in \mathbf{R}([a, b])$.

VI.1.13. Пусть $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ — ограниченная на $[0, 1]$ функция. Доказать, что $f \in \mathbf{R}([0, 1])$ тогда и только тогда, когда существует число l такое, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

$$\forall \xi_k^{(n)} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] : \left|\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^{(n)}) - l\right| < \varepsilon.$$

VI.1.14. Доказать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ и выразить его значение через интеграл

1) $s_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$;

2) $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$;

3) $s_n = n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3 + k^3}$;

4) $s_n = \frac{1}{n^4} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \sqrt[3]{k^3 + n^3}$;

5) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2 + k^2}}$;

6) $s_n = n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(n^2 + k^2)^2}$;

7) $s_n = \frac{1}{n^4} \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 5^{\frac{k}{n}}$;

8) $s_n = \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k^r (k+1)^s, \quad r \in \mathbf{N}, \quad s \in \mathbf{N}$;

9) $s_n = \left(\prod_{k=1}^{2^n-1}\left(1+\frac{k}{2^n}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}}$;

10) $s_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$;

11) $s_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}, \quad f \in \mathbf{C}([0, 1]), \quad f(x) > 0, \quad x \in [0, 1]$;

12) $s_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$;

13) $s_n = \frac{1}{n^a}\sum_{k=1}^{n} k^{a-1} f\left(\frac{k^a}{n^a}\right), \quad f \in \mathbf{R}([0, 1]), \quad a \geqslant 1$;

14) $s_n = \frac{1}{n^2}\sum_{1 \leqslant k < i \leqslant n} \cos\frac{k}{n} \cdot \cos\frac{i}{n}$;

15) $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}$;

16) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}$;

17) $s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\frac{n}{n^2+k^2}$.

VI.1.15. Пусть $f \in \mathbf{R}([a, b])$, $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$; для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ $\xi_k^{(\lambda)} \in [x_k, x_{k+1}]$. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{|\lambda| \to 0} \sum_{n=0}^{n-1} f(\xi_k^{(\lambda)}) \Delta x_k^{1+\alpha}, \quad \alpha > 0$;

2) $\lim\limits_{|\lambda| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + f(\xi_k^{(\lambda)}) \Delta x_k)$;

3) $\lim\limits_{|\lambda| \to 0} \prod_{k=0}^{n-1} (1 + f(\xi_k^{(\lambda)}) \Delta x_k)$.

VI.1.16. Пусть $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$. Вычислить предел

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^{(\lambda)}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,dx.$$

VI.1.17. Определить функцию $f \in R([0, 1])$, удовлетворяющую условиям:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right)\right), \quad x \in [0, 1];$$

$$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 1.$$

§ 2. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА

VI.2.1. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

VI.2.2. Вычислить следующие интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}\,dx;$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\,dx}{\sin x + \cos x};$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N};$

4) $\displaystyle\int_0^1 (1 + xf'(x))\, e^{f(x)}dx, \quad f \in C^1([0,1]);$

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx, \quad f \in C([0, 1]), \quad f(x) > 0, \quad x \in [0, 1];$

6) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ для функции $f \in C(\mathbb{R})$, удовлетворяющей соотношению

$$pf(x) + qf(-x) = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

где p и q — некоторые числа, причем $p + q \neq 0$.

7) $\displaystyle\int_a^b xf''(x)\,dx, \quad f \in C^2([a, b]).$

VI.2.3. Пусть $f \in C([-a, a])$ и четна. Доказать, что

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

VI.2.4. Функция $f \in \mathbf{C}\,[(a, b])$ неотрицательна на $[a, b]$ и такова, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0, \quad x \in [a, b]$.

VI.2.5. Функция $f \in \mathbf{C}\,([a, b])$ и для любых $\alpha, \beta, a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0, \quad x \in [a, b]$.

VI.2.6. Функция $f \in \mathbf{C}\,([a, b])$ и для любых $\alpha, \beta, a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Доказать, что $f(x) \geqslant 0, \; x \in [a, b]$.

VI.2.7. Функция $f \in \mathbf{R}\,([a, b])$ обладает свойством

$$\forall \{\alpha, \beta\} \subset [a, b], \; \alpha < \beta \quad \exists c \in (\alpha, \beta) \; : \; f(c) = 0.$$

Доказать, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

VI.2.8. Пусть функция $f \in \mathbf{C}\,([a, b])$ и такова, что

$$\forall g \in \mathbf{C}\,([a, b]) \; : \; \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0, \quad x \in [a, b]$.

VI.2.9. Пусть функция $f \in \mathbf{C}\,([a, b])$ и такова, что

$$\forall g \in \mathbf{C}\,([a, b]), \quad g(a) = g(b) = 0 \; : \; \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b].$$

VI.2.10. Для функции $f \in \mathbf{R}\,([a, b])$ пусть

$$F(x) := \int_a^x f(u)\,du, \quad x \in [a, b].$$

Доказать, что функция F удовлетворяет условию Липшица порядка 1.

VI.2.11. Доказать, что функция $f \in C(\mathbf{R})$ нечетна на $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad \int_{-x}^{x} f(u)\,du = 0.$$

VI.2.12. Доказать, что функция $f \in C(\mathbf{R})$ четна на $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad \int_{-x}^{x} f(u)\,du = 2\int_{0}^{x} f(u)\,du.$$

VI.2.13. Доказать, что функция $f \in C(\mathbf{R})$ периодична с периодом T на $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad \int_{x}^{x+T} f(u)\,du = \int_{0}^{T} f(u)\,du.$$

VI.2.14. Доказать равенство

$$\int_{0}^{1} u^n (1-u)^x\,du = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}$$

для $x \geqslant 0$ и $n \in \mathbf{N}$.

VI.2.15. Пусть $f \in C^1([1, a])$, $a > 1$. Доказать, что

$$\int_{1}^{a} [x]\, f'(x)\,dx = [a]\, f(a) - \sum_{k=1}^{[a]} f(k).$$

VI.2.16. Доказать, что

$$\int_{1}^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{[x]}\,dx = -\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

VI.2.17. Пусть последовательность $\{a_n \;:\; n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ и функция $f \in C^1([1, +\infty))$. Доказать, что для $x \geqslant 1$ справедливо равенство

$$\sum_{k:1 \leqslant k \leqslant x} a_k f(k) = a(x)\, f(x) - \int_{1}^{x} a(u)\, f'(u)\,du,$$

где $a(x) := \sum_{k:1 \leqslant k \leqslant x} a_k, \quad x \geqslant 1.$

VI.2.18. Определить точки локального экстремума функции

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \int_{0}^{x} e^{u^2}(u^2 - 3u + 2)\,du.$$

VI.2.19. Пусть функция $f \in C([0, 1])$ имеет производную f' на $(0, 1)$, причем для некоторого числа L

$$\forall x \in (0, 1) \quad : \quad |f'(x)| \leqslant L.$$

Доказать, что

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{L}{2n},\quad n\in\mathbf{N}.$$

VI.2.20. Функция f удовлетворяет на отрезке $[0,\ 1]$ условию Липшица порядка 1 с постоянной L и такова, что

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0.$$

Доказать, что

$$\forall n\in\mathbf{N}\ :\ \left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{L}{2}.$$

VI.2.21. Функция f имеет производную f' в некоторой окрестности точки x, причем f' непрерывна в точке x. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(x+\frac{k}{k^2+n^2}\right)-f(x)\right)=f'(x)\ln\sqrt{2}.$$

VI.2.22. Функция $f\in\mathbf{R}\,([a,\ b])$ и неотрицательна на отрезке $[a,\ b]$, число $\alpha>1$. Доказать, что

$$\lim_{|\lambda|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\Delta x_k^{\alpha-1}}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(u)\,du\right)^{\alpha}=\int_a^b f^{\alpha}(u)\,du.$$

VI.2.23. Функция f монотонно возрастает на отрезке $[0,\ 1]$. Доказать, что

$$\forall n\in\mathbf{N}\ :\ 0\leqslant\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\frac{f(1)-f(0)}{n}.$$

VI.2.24. Пусть $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ — различные положительные числа. Доказать, что матрица

$$\left(\frac{1}{a_j+a_k+1}\right)_{j,k=1}^{n}$$

невырождена.

VI.2.25. Функция $f\in\mathbf{C}^1([0,\ 1])$ строго возрастает на $[0,\ 1]$ и $f(0)=0$. Пусть g — функция, обратная к f. Доказать, что

$$\forall x\in[0,\ 1]\ :\ \int_0^x f(u)\,du+\int_0^{f(x)} g(u)\,du=xf(x).$$

VI.2.26. Функция $f\in\mathbf{C}([0,\ +\infty))$ и монотонно возрастает на $[0,\ +\infty)$. Доказать, что функция

$$g(x):=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du,\quad x>0,$$

возрастает на $(0,\ +\infty)$.

VI.2.27. Пусть $\{f, g\} \subset C([0, +\infty))$, g — положительна на $[0, +\infty)$ и функция $\frac{f}{g}$ возрастает на $[0, +\infty)$. Доказать, что функция

$$h(x) := \frac{\int_0^x f(u)\,du}{\int_0^x g(u)\,du}, \quad x > 0,$$

возрастает на $(0, +\infty)$.

VI.2.28. Пусть $f \in C([0, +\infty))$ и для любых $a, b, 0 \leqslant a < b$, любого $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_{a+\delta}^{b+\delta} f(x)\,dx.$$

Доказать, что f не убывает на $[0, +\infty)$.

VI.2.29. Пусть

$$f(x) = \int_0^1 e^{-u}u^{x-1}du, \quad x \geqslant 1.$$

Доказать, что

(i) $f(x) > 0, \quad x \geqslant 1$;

(ii) $f(x_1) > f(x_2), \quad 1 \leqslant x_1 < x_2$;

(iii) $f(x+1) = xf(x) - \frac{1}{e}, \quad x \geqslant 1$.

VI.2.30. Функция $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ выпукла вниз на (a, b) и имеет производную f' на (a, b). Доказать, что

$$\forall x \in (a, b) \quad : \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(u)\,du \geqslant f(x). \qquad (*)$$

Предположим, что $f \in C^2((a, b))$ и удовлетворяет условию (*). Доказать, что f выпукла вниз на (a, b).

VI.2.31. Определить все функции $f \in C([0, +\infty))$, положительные на $(0, +\infty)$ и удовлетворяющие условию

$$\forall x > 0 \quad : \quad 2x \int_0^x f(u)\,du = f(x).$$

VI.2.32. Определить все функции $f \in C([0, +\infty))$, удовлетворяющие условию

$$\forall x > 0 \quad : \quad \sin\left(\int_0^x f(u)\,du\right) = \frac{x}{1+x}.$$

VI.2.33. Определить все функции $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, удовлетворяющие условию

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad \int_0^x e^u f(x-u)\,du = \sin x.$$

VI.2.34*. Определить все функции $f : \mathbf{R} \to [1, +\infty)$, имеющие производную f' на $\mathbf{R}$ и удовлетворяющие условию

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad : \int_1^{f(x)} e^{u^2} du = \int_0^x \frac{u\,du}{f(u)}.$$

VI.2.35. Определить функцию $f \in \mathbf{C}^2([0, 1])$, удовлетворяющую условиям: $f(0) = f'(0) = 1$; $f''(x) \geqslant 0$, $x \in (0, 1)$;

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2}.$$

VI.2.36. Пусть функция $f \in \mathbf{R}([a, b])$. Доказать, что

$$\exists \theta \in [a, b] \quad : \quad \int_a^\theta f(u)\,du = \int_\theta^b f(u)\,du.$$

VI.2.37. Функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad \int_a^\theta f(u)\,du = f(\theta).$$

VI.2.38. Пусть $a > 0$ и функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad \int_a^\theta f(u)\,du = \theta f(\theta).$$

VI.2.39. Пусть функции $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$, причем $g(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$. Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad \frac{\int_a^b f(u)\,du}{\int_a^b g(u)\,du} = \frac{f(\theta)}{g(\theta)}.$$

VI.2.40. Функции $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$. Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad g(\theta)\int_a^\theta f(u)\,du = f(\theta)\int_\theta^b g(u)\,du.$$

VI.2.41. Функции $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$ и положительны на $[a, b]$. Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad \frac{f(\theta)}{\int\limits_a^\theta f(u)\, du} - \frac{g(\theta)}{\int\limits_\theta^b g(u)\, du} = 1.$$

VI.2.42. Функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f(a) > a, \quad \int\limits_a^b f(x)\, dx < \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad f(\theta) = \theta.$$

VI.2.43. Функция $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и

$$3 \int\limits_0^1 f(u)\, du = 1.$$

Доказать, что

$$\exists \theta \in (0, 1) \quad : \quad f(\theta) = \theta^2.$$

VI.2.44. Пусть $f \in \mathbf{C}^1([0, 1])$. Доказать, что

$$\exists \theta \in (0, 1) \quad : \quad \int\limits_0^1 f(x)\, dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(\theta).$$

VI.2.45. Пусть $f \in \mathbf{C}^2([0, 1])$. Доказать, что

$$\exists \theta \in (0, 1) \quad : \quad \int\limits_0^1 f(x)\, dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{6} f''(\theta).$$

VI.2.46. Пусть $f \in \mathbf{C}^1([0, 1])$, причем $f'(0) \neq 0$. Для каждого $x \in (0, 1]$ пусть $\theta(x)$ какое-нибудь из значений θ, для которых

$$\int\limits_0^x f(u)\, du = f(\theta)\, x.$$

Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\theta(x)}{x}.$$

VI.2.47. Функция $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и монотонно возрастает на $[0, 1]$. Доказать, что функция

$$x \mapsto \frac{1}{1 - x} \int\limits_x^1 f(u)\, du$$

монотонно возрастает на $[0, 1)$.

VI.2.48. Пусть $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$. Доказать неравенство Коши

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

Если дополнительно $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([a, b])$, то знак равенства в неравенстве Коши возможен тогда и только тогда, когда

$$\exists \{\lambda, \mu\} \subset \mathbf{R}, \quad |\lambda| + |\mu| > 0 \quad \forall x \in [a, b] \;:\; \lambda f(x) = \mu g(x).$$

VI.2.49. Доказать, что для функции $f \in \mathbf{R}([0, 1])$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 f(x)\, dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\, dx.}$$

VI.2.50. Для функции $f \in \mathbf{R}([a, b])$ доказать неравенство

$$\left(\int_a^b f(x) \sin x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \cos x dx\right)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

VI.2.51. Пусть $\{f, g, h\} \subset \mathbf{R}([a, b])$. Доказать, что

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, h(x)\, dx\right)^4 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)^2 \int_a^b g^4(x)\, dx \int_a^b h^4(x)\, dx.$$

VI.2.52. Пусть

$$G = \left\{ f \in \mathbf{C}([0, 1]) \;\middle|\; \int_0^1 f(x)\, dx = 1 \right\}.$$

Определить

$$\min_{f \in G} \int_0^1 (1 + x^2)\, f^2(x)\, dx$$

и найти функцию, доставляющую минимум.

VI.2.53. Пусть $f \in \mathbf{R}([a, b])$. Доказать, что для $d \geqslant 1$

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|^d \leqslant (b-a)^{d-1} \int_a^b |f(x)|^d\, dx.$$

VI.2.54. Пусть $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$. Доказать неравенство

$$\int_a^b \min(f(x), g(x))\, dx \leqslant \min\left(\int_a^b f(x)\, dx, \int_a^b g(x)\, dx\right).$$

VI.2.55. Предположим, что функция $f: [a, b] \to [m, M]$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in \mathbf{R}([a, b]); \quad \int_a^b f(x)\, dx = 0.$$

Доказать неравенство

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant -mM(b-a).$$

VI.2.56. Пусть $\{f, g\} \subset C([0, 1])$. Доказать неравенство

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\,dx\right)^2.$$

VI.2.57. Функция $f \in C([a, b])$ и не убывает на $[a, b]$. Доказать, что для любого $x \in (a, b)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(u)\,du \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \leqslant \frac{1}{b-x}\int_x^b f(u)\,du.$$

VI.2.58. Функция $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ монотонно не убывает на отрезке $[a, b]$. Доказать неравенство

$$\int_a^b (x-a)f(x)\,dx \geqslant \int_a^b (b-x)f(x)\,dx.$$

VI.2.59*. Функция $f \in C([0, 1])$ и монотонна в строгом смысле на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\forall a \in \mathbf{R} : \int_0^1 |f(x)-a|\,dx \geqslant \int_0^1 \left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|dx.$$

VI.2.60. Функция $f \in C^2([a, b])$, причем $f''(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$. Доказать, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

VI.2.61. Функция $f \in C([a, b])$ строго выпукла вверх и положительна на $[a, b]$. Доказать, что

$$\int_a^b f(x)\,dx > \frac{1}{2}(b-a)\max_{[a,b]} f.$$

VI.2.62. С помощью неравенства

$$e^x > 1, \quad x > 0,$$

получить неравенство для $n \in \mathbf{N}$

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad x > 0.$$

VI.2.63. Исходя из неравенства

$$\cos x \leqslant 1, \quad x \geqslant 0,$$

доказать все неравенства задачи IV.4.49.

VI.2.64. Доказать следующие неравенства:

1) $\frac{1}{2} < \int\limits_0^1 \frac{2x}{1+x^{13}}\,dx < 1;$

2) $\frac{1}{2} < \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{N};$

3) $\frac{2}{3} < \int\limits_0^1 \exp(-x^2)\,dx < \frac{\pi}{4}.$

VI.2.65. Определить, какой из интегралов

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^a 2^x dx, \quad \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} dx, \quad a > 1,$$

больше?

VI.2.66. Пусть $a > 0$. Определить знак интегралов

$$\int\limits_0^{2\pi} x^a \sin x dx, \quad \int\limits_0^{2\pi} x^{a+1} \cos x dx.$$

VI.2.67. Доказать неравенство

$$\left| \int\limits_x^{x+a} \frac{\sin u}{u}\,du \right| < \frac{3}{x}, \quad x > 0, \quad a > 0.$$

VI.2.68. Доказать, что при любом $x > 0$ справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_x^{x+1} \sin u^2 du \right| < \frac{2}{x}.$$

VI.2.69. Доказать, что при любых $x > 0$ и $a > 0$ справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_x^{x+a} \sin u^3 du \right| < \frac{4}{3x^2}.$$

VI.2.70. Пусть $f \in C([a, b])$. Доказать равенство

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^x f(u)\,du \right) dx = \int\limits_a^b (x-a) f(x)\,dx.$$

VI.2.71. Для функции $f \in C([a, b])$ доказать равенство

$$\int\limits_a^b z \left(\int\limits_a^z x \left(\int\limits_a^x f(u)\,du \right) dx \right) dz = \frac{1}{8} \int\limits_a^b (b^2 - t^2)^2 f(t)\,dt.$$

VI.2.72. Функция $f \in C^1([a, b])$ и монотонна на $[a, b]$, а функция $g \in C([a, b])$. Доказать, что

$$\exists \theta \in (a, b) \quad : \quad \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(a) \int_a^\theta g(x)\, dx + f(b) \int_\theta^b g(x)\, dx$$

(частный случай второй теоремы о среднем значении).

VI.2.73. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{(1+u)^{\frac{1}{13}} - 1}{u}\, du$$

(подынтегральная функция в точке 0 считается равной пределу в этой точке).

VI.2.74. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\ln x} \displaystyle\int_0^x \frac{du}{\sqrt[3]{1+u^3}} \right)$; $= 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x (1 + \sin 2u)^{\frac{1}{u}}\, du \right)$;

3) $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x u^{1+u} du \right)$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\displaystyle\int_0^x e^{u^2} du \right)^{\frac{1}{x^2}}$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^{e^x} \frac{du}{\sqrt[3]{1+u^3}} \right)$.

VI.2.75. Пусть $f \in C([0, +\infty))$ и $f(x) \to a$, $x \to +\infty$. Найти

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u)\, du \right).$$

Привести пример функции $g \in C([0, +\infty))$, для которой существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x g(u)\, du \right)$$

и не существует предел при $x \to +\infty$.

VI.2.76. Пусть функции $\{f, g\} \subset C([0, +\infty))$, причем $f(x) \to a$, $xg(x) \to b$, $x \to +\infty$. Вычислить предел

$$\lim_{x \to +\infty} \left(g(x) \int_0^x f(u)\, du \right).$$

VI.2.77. Для функции $f: (a, b) \to \mathbf{R}$, имеющей производную f' на (a, b), вычислить предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\Delta}\int_x^{x+\Delta} f(u)\,du - f(x)\right), \quad x \in (a, b).$$

VI.2.78. Функции $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([0, 1])$, причем

(i) $\forall x \in [0, 1] : g(x) > 0$;

(ii) $\lim\limits_{x \to 1-} \int_0^x g(u)\,du = +\infty$;

(iii) $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = a$.

Доказать, что

$$\lim_{x \to 1-} \frac{\int_0^x f(u)\,du}{\int_0^x g(u)\,du} = a.$$

VI.2.79. Пусть P и Q — многочлены, положительные на полуоси $[0, +\infty)$ и $a > 1$. Доказать, что

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^a}\int_0^x \ln\frac{P(u)}{Q(u)}\,du\right) = 0.$$

VI.2.80. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0}\int_x^{2x} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

VI.2.81. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \cos\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

и

$$F(x) := \int_0^x f(u)\,du, \quad x \geqslant 0.$$

Вычислить $F'(0)$.

VI.2.82. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0+}\int_x^1 u^{a-1}\ln u\,du$$

для положительного a.

VI.2.83. Функция $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ монотонно убывает на $[0, +\infty)$; $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx.$$

VI.2.84. Функция $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и положительна на $[0, 1]$. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ пусть $\theta(n)$ есть значение, для которого

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\theta(n)} f(x)\,dx.$$

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} (n\theta(n)).$$

VI.2.85. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ $\theta(n)$ есть значение, для которого

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx = \int_1^{\theta(n)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx.$$

Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(n)}{\sqrt{n}}.$$

VI.2.86. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ пусть $\theta(n)$ есть значение, для которого

$$\frac{1}{n}\int_1^n x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx = \int_1^{\theta(n)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(n)}{n} = 1.$$

VI.2.87. Пусть $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([0, 1])$ положительные на $[0, 1]$ функции. Для всех $n \in \mathbf{N}$, начиная с некоторого, определены значения $\theta(n)$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx = \int_0^{\theta(n)} g(x)\,dx.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} (n\theta(n)) = \frac{f(0)}{g(0)}.$$

VI.2.88. Функция $f \in \mathbf{C}^1([0, 1])$ положительна на $[0, 1]$, причем $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ определено значение $\theta(n)$, для которого

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\theta(n)} f(x)\,dx.$$

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} (n\theta^2(n)).$$

VI.2.89. Вычислить следующие пределы:

1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(n^4\int_n^{n+1}\frac{x}{1+x^5}\,dx\right);$

2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(n^3\int_n^{2n}\frac{x}{1+x^5}\,dx\right);$

3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(n^3\int_n^{n^2}\frac{x}{1+x^5}\,dx\right);$

4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\int_n^{n+1}x^x\,dx\right)^{\frac{1}{n}}\right);$

5) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(n^{e-1}\left(1-\int_n^{n+1}\frac{x^e}{n+x^e}\,dx\right)\right).$

VI.2.90*. Пусть число $c>0$ и

$$a_1=1;\quad a_{n+1}=\int_0^{a_n}c^{x^2}dx,\quad n\geqslant 1.$$

Определить те значения c, для которых последовательность $\{a_n : n\geqslant 1\}$ сходится, и найти ее предел.

VI.2.91*. Пусть $\{a_n : n\geqslant 1\}$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел таких, что

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{x^{13}}{1+x^{13}}\,dx\to a,\quad n\to\infty,$$

для некоторого $a\in\mathbf{R}$. Доказать, что

$$\frac{a_n}{n}\to a,\quad n\to\infty$$

VI.2.92. Вычислить следующие пределы:

1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nf(x)}{n+x}\,dx,\quad f\in\mathbf{R}([0,\ 1]);$

2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{f(x)}{1+nx}\,dx,\quad f\in\mathbf{R}([0,\ 1]);$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^n f(x)\,dx, \quad f\in \mathbf{R}\left(\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\right);$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^n f(x)\,dx, \quad f\in \mathbf{R}([0,\ 1]);$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(x^n)\,dx$

для функции $f\in \mathbf{R}([0,\ 1])$, у которой существует предел

$$\lim_{x\to 0+} f(x);$$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi} f(\sin^n x)\,dx, \quad f\in \mathbf{C}([0,\ 1]);$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 e^{-nx}x^{\alpha}dx, \quad \alpha>0;$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \dfrac{3^{nx}dx}{(1+x)^2(1+3^{nx})};$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^n}};$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{2n}}\int\limits_1^2 x^{nx}dx;$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)^n\,dx;$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx.$

VI.2.93. Пусть функции $\{f,\ g\}\subset \mathbf{C}([0,\ 1])$, причем $g(x)>0$, $x\in[0,\ 1]$. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\int\limits_0^1 x^n f(x)\,dx\right);$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int\limits_0^1 x^n f(x)\,dx}{\int\limits_0^1 x^n g(x)\,dx}.$

VI.2.94. Для функции $f \in \mathbf{C}^1([0, 1])$, $f(1) = 0$ вычислить **предел**

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2\int_0^1 x^n f(x)\,dx\right).$$

VI.2.95. Функции $\{f, g\} \subset \mathbf{C}([-1, 1])$, **причем функция** g **неотрицательна и четна на** $[-1, 1]$, **строго возрастает на** $[0, 1]$. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-1}^{1} f(x)\,g^n(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} g^n(x)\,dx}.$$

VI.2.96. Для функции $f \in \mathbf{C}([0, 3])$ вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^3 f(x)\sin^{2n}(\pi x)\,dx}{\int_0^3 \sin^{2n}(\pi x)\,dx}.$$

VI.2.97*. Пусть $f \in \mathbf{R}([0, 1])$, $g \in \mathbf{R}([0, 1+\alpha])$ с некоторым $\alpha > 0$. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^1 f(u)\,g(u+x)\,du = \int_0^1 f(u)\,g(u)\,du.$$

VI.2.98*. Пусть функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^{2n}\,dx\right)^{\frac{1}{2n}} = \max_{[a,b]}|f|.$$

VI.2.99. Для функции $f \in \mathbf{C}^1([a, b])$ доказать равенства (частный случай леммы Римана):

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0.$

VI.2.100. Для функции $f \in \mathbf{C}^1([a, b])$ вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin^2(nx)\,dx.$$

VI.2.101. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, +\infty))$ и

$$a_n := \int_0^1 f(n+x)\,dx, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Предположим, что существует предел $a \in \mathbf{R}$ последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx.$$

VI.2.102. Функция $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ и периодична с периодом $T > 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(nx)\,dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x)\,dx.$$

VI.2.103. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \int\limits_0^x \sin^2 u\,du \right)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \int\limits_0^x \sqrt{u} \sin u\,du \right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2} \int\limits_0^x u \sin^2 u\,du \right)$.

VI.2.104. Для функции $f \in \mathbf{C}([-1, 1])$ вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \int\limits_0^n f(\sin x)\,dx \right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \int\limits_0^n f(|\sin x|)\,dx \right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} \int\limits_0^n x f(\sin x)\,dx \right)$.

VI.2.105. Для функции $f \in \mathbf{C}([-1, 1])$ вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^1 f(\sin(xu))\,du$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^1 f(\cos(xu))\,du$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^1 u f(\sin(xu))\,du$;

4)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^1 f(\sin(xu)) \cos u\,du$.

VI.2.106. Пусть функция $f \in C([0,\ 1])$. Доказать, что

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+x}{n}\right) - \int_0^1 f(u)\, du \right| \to 0$$

при $n \to \infty$.

VI.2.107. Предположим, что функция $f \in C([0,\ 2])$. Доказать, что

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n} + x\right) - \int_0^1 f(u+x)\, du \right| \to 0$$

при $n \to \infty$.

VI.2.108*. Пусть $f \in C([-1,\ 1])$, $g \in C([0,\ 1])$. Доказать, что

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 f(\sin(xu))\, g(u)\, du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{1} f(\sin z)\, dz \int_0^1 g(u)\, du$$

(частный случай теоремы Фейера).

VI.2.109. Доказать, что

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x+\varepsilon}\, dx \sim \ln\frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \to 0+;$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\varepsilon x)}{x}\, dx = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{18} + o(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \to 0;$

3) $\displaystyle\int_0^1 e^{-\lambda x} \ln(1+x)\, dx \sim \frac{1}{\lambda^2}, \quad \lambda \to +\infty.$

Глава VII • РЯДЫ. ПРОИЗВЕДЕНИЯ

§ 1. СУММА РЯДА. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА

VII.1.1. При каких значениях $a \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{R}$ сходится ряд

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots?$$

Чему равна его сумма?

VII.1.2. Исследовать сходимость следующих рядов; для сходящихся рядов определить их сумму:

1) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \dots;$

2) $\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})\sqrt{1\cdot 2}} + \dfrac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2\cdot 3}} + \dots$

$\dots + \dfrac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}} + \dots;$

3) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \dots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots;$

4) $\left(\dfrac{1}{c_1} - \dfrac{1}{c_2}\right) + \left(\dfrac{1}{c_2} - \dfrac{1}{c_3}\right) + \dots + \left(\dfrac{1}{c_n} + \dfrac{1}{c_{n+1}}\right) + \dots,$

где $\{c_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность положительных чисел такая, что $c_n \to +\infty$, $n \to \infty$;

5) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots;$

6) $\dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \dots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \dots;$

7) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m+1)} + \dfrac{1}{2\cdot 3\dots(m+2)} + \dots$

$\dots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)} + \dots, \quad m \in \mathbf{N};$

8) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{35} + \dots + \dfrac{1}{4n^2-1} + \dots;$

9) $\dfrac{1}{1^2\cdot 3^2} + \dfrac{2}{3^2\cdot 5^2} + \dots + \dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \dots;$

10) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}+\dots$;

11) $\frac{1}{1\cdot(1+m)}+\frac{1}{2\cdot(2+m)}+\dots+\frac{1}{n(n+m)}+\dots,\quad m\in\mathbf{N}$;

12) $\frac{1}{1\cdot(m+k)}+\frac{1}{2\cdot(2m+k)}+\dots+\frac{1}{n(mn+k)}+\dots,$

где $\{k,\ m\}\subset\mathbf{N},\quad k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,m)$;

13) $\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx+\dots,\quad x\in\mathbf{R}$;

14) $\frac{x}{1-x^{2^1}}+\frac{x^{2^1}}{1-x^{2^2}}+\frac{x^{2^2}}{1-x^{2^3}}+\dots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}+\dots$

для $x\in(0,\ 1)$.

VII.1.3. Пусть

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n},\quad n\in\mathbf{N},$$

— частичная сумма гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

Доказать, что $s_{2n}-s_n>\frac{1}{2}$, $n\geqslant 2$, и с помощью этого неравенств установить расходимость гармонического ряда. Доказать, что пр $n>1$ сумма s_n не является целым числом.

VII.1.4. Доказать, что при любом $\alpha\in(0,\ 1]$ ряд

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots+\frac{1}{n^\alpha}+\dots$$

расходится.

VII.1.5. Доказать расходимость следующих рядов:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\dots+\frac{1}{a+nb}+\dots,$

где a, b — положительные числа;

2) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}+\dots$;

3) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\dots$;

4) $\frac{2}{1^2}+\frac{3}{2^2}+\dots+\frac{n+1}{n^2}+\dots$

VII.1.6*. Доказать сходимость и найти суммы следующих рядо

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

VII.1.7. Пусть $x \in (-1,\ 1)$. Доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \int_0^x \frac{1}{u} \ln \frac{1}{1-u}\, du.$$

Подынтегральная функция предполагается равной 1 при $u = 0$.

VII.1.8. Пусть $x \in (-1,\ 1)$. Найти суммы следующих рядов:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} x^k$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} x^k$; 4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$; 6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k}$;

7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k}$.

VII.1.9. Пусть $f \in \mathbf{R}\,([0,\ 1])$. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_1^2 f\left(\frac{x}{2^k}\right) dx.$$

VII.1.10. Пусть функция $f \in \mathbf{R}\ ([0,\ 1])$; $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset [0,\ 1]$ — последовательность такая, что $a_1 = 0$ и $a_n \to 1$, $n \to \infty$. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\, dx.$$

VII.1.11. Функция $f \in \mathbf{C}\,([0,\ +\infty))$ и такова, что существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(u)\, du = a, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что существует последовательность $\{x_n : n \geqslant 1\}$ такая, что $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$; $x_n \to +\infty$, $n \to \infty$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = a.$$

VII.1.12. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — произвольная, сходящаяся к 0 последовательность. Доказать, что существует подпоследовательность $\{a_{m(n)} : n \geqslant 1\}$, для которой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m(n)}$ сходится и имеет сумму a, причем $|a| < \frac{1}{10}$.

§ 2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ. ПРИЗНАКИ СРАВНЕНИЯ И СХОДИМОСТИ

VII.2.1. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходящийся к сумме a ряд с неотрицатель ными членами и $\{d_n : n \geqslant 1\}$ — ограниченная последовательност неотрицательных чисел. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n$ сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n \leqslant a \sup_{n \geqslant 1} d_n.$$

VII.2.2. Пусть $\alpha > 1$ и для ряда

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots$$

пусть

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать неравенство

$$s_{2n} < \frac{1}{2^{\alpha-1}} s_n + 1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

С помощью этого неравенства доказать сходимость ряда.

VII.2.3. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ и $\{b_n : n \geqslant 1\}$ — последовательност положительных чисел, монотонно убывающие и такие, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (*)$$

сходятся. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n).$$

ривести пример последовательностей, для которых ряды (*) рас дятся, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$$

ходится.

VII.2.4. Исследовать сходимость следующих рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \sin n}{n^2 - n + 1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta + 1}$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\alpha}}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1+n^2}{n^2}$;

) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$;

) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$; 8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}$;

) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin^2 \frac{1}{n}$; $\alpha \in \mathbf{R}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

VII.2.5. Доказать следующие неравенства:

) $\frac{5}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} < \frac{7}{5}$;

) $0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^k} < \frac{1}{n(n+1)^n}$, $n \geqslant 1$.

VII.2.6. Исследовать сходимость следующих рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$;

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^5 n}{n^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)^{\alpha}$, $\alpha > 0$;

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\ln \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$;

6) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\ln \left(\frac{\ln n}{\ln (n-1)}\right) - \frac{1}{n \ln n}\right)$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \operatorname{arctg} n^{\beta}$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n} (n!)^2}{n^{2n}}$.

VII.2.7. Доказать сходимость следующих последовательностей:

1) $\left\{\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \ n \geqslant 1\right\}$;

2) $\left\{\bar{\gamma}_n = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \cdots + \frac{1}{n \ln n} - \ln \ln n, \ n \geqslant 2\right\}$.

VII.2.8. Определить значения $\alpha \in \mathbf{R}$, при которых сходится ря

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^{\alpha}$, $a > 1$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^{\alpha}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln (n+1) - \ln n}{\ln^{\alpha} (n+1)}$.

VII.2.9. Пусть $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Исследо вать сходимость следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$.

VII.2.10. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами сходится а $\{d_n \mid n \geqslant 1\}$ — ограниченная последовательность. Доказать сходи мость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n a_n$.

VII.2.11. Положим, что $a_n \to a$, $n \to \infty$; $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$; $a \neq 0$ Доказать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a} \right|$$

сходятся или расходятся одновременно.

VII.2.12. Доказать, что для любой последовательности положи тельных чисел $\{d_n \mid n \geqslant 1\}$ такой, что $d_n \to +\infty$, $n \to \infty$, сущест вует сходящийся ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, дл которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n a_n$ расходится.

VII.2.13. Пусть $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Исследо вать сходимость ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1})$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_n a_{n+1} \ldots a_{2n-1}}$;

) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$;

) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})$.

VII.2.14*. Обозначим через $m(n)$ число нулей в десятичной записи исла $n \in \mathbf{N}$. Определить значения $a > 0$, для которых ходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^{m(n)}}{n^2}$.

VII. 2.15. Пусть ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать сходимость ряда

) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

VII.2.16. Предположим, что

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

VII.2.17*. Пусть для $\alpha \in (0, 1)$

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n^{\alpha}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

VII.2.18. Пусть

$$a_1 \in (0, 1); \quad a_{n+1} = a_n - na_n^2, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

VII.2.19. Пусть $\{b_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность положительых чисел, сходящаяся к положительному числу a, и

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n b_n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

VII.2.20. Пусть

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{\operatorname{arctg} a_n}{1 + a_n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

VII.2.21. Пусть $\{a_n \mid n \geqslant 1\}$ — убывающая последовательность положительных чисел, для которой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} (na_n) = 0$$

VII.2.22. Пусть $\{b_n \mid n \geqslant 1\}$ — неубывающая последовательность чисел таких, что

$$2b_n \geqslant b_{n-1} + b_{n+1}, \quad n \geqslant 2,$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)^{\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

сходится. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} (n^{\frac{1}{\alpha}} (b_{n+1} - b_n)) = 0.$$

VII.2.23. Признак Коши. Пусть $a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

сходятся или расходятся одновременно. Использовать этот результат для исследования сходимости гармонического ряда.

VII. 2.24. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два сходящихся ряда с положительными членами. Предположим, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n^1}{r_n^2} = p,$$

где

$$r_n^1 := \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \quad r_n^2 = \sum_{k=n}^{\infty} b_k, \quad n \geqslant 1.$$

VII.2.25. Доказать сходимость следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $x \geqslant 0$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n (n!)^2}{n^{2n}}$.

VII.2.26. Пусть $\{p_n : n \geqslant 1\}$ — монотонная последовательность положительных чисел. Предположим, что предел этой последовательности отличен от 1, если он существует. Исследовать сходимость ряда

$$p_1 + p_1p_2 + p_1p_2p_3 + \cdots + p_1p_2 \ldots p_n + \cdots$$

VII.2.27. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами. Доказать, что

1) если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд сходится;

2) если $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд расходится.

VII.2.28. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами для некоторого $m \in \mathbf{N}$ существует предел

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+m}}{a_n}.$$

Доказать, что ряд сходится при $r < 1$ и расходится при $r > 1$.

VII.2.29. Доказать сходимость следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^n}{(\ln n)^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2^{\sqrt{n}}}{2^n}$.

VII.2.30. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 x^n e^{-nx} dx.$$

VII.2.31. Пусть для ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ величина r есть

$$r = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad r \leqslant +\infty.$$

Доказать, что ряд сходится при $r < 1$ и расходится при $r > 1$.

VII.2.32. Доказать утверждение: если для последовательности положительных чисел $\{a_n : n \geqslant 1\}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r,$$

то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

Привести пример последовательности, для которой обратиое утверждение не верно.

VII.2.33. Пусть $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[\ln n]{a_n} < \frac{1}{e}.$$

Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

VII.2.34*. Пусть $\{a_n \mid n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится для любой последовательности $\{b_n \mid n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0,$$

тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|} \mid n \geqslant 1\}$ ограничена.

VII.2.35. Пусть $\alpha > 1$. Доказать неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}, \quad n \in \mathbf{N}$$

VII.2.36. Доказать сходимость следующих рядов:

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{\sqrt{n}}}$.

VII.2.37. Пусть $a_n \geqslant 0, n \geqslant 1$, и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[\ln\ln n]{n a_n} < \frac{1}{e}.$$

Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

VII.2.38. Доказать, что

1) $\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$, $n \in \mathbf{N}$, $\alpha > 1$;

2) $0 < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) < 1$, $n \in \mathbf{N}$.

VII.2.39. Пусть $\alpha > 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln^\alpha n \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{1+\alpha} k}\right) = \frac{1}{\alpha}.$$

VII.2.40. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad n \to \infty.$$

VII.2.41. Пусть $f \in C^1([1, +\infty))$. Доказать, что для $\{m, n\} \subset \mathbf{N}$ справедливы следующие неравенства:

1) $$\left|\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_1^{n+1} |f'(x)|\,dx;$$

2) $$\left|\sum_{k=m}^{m+n} f(k) - \int_m^{m+n+1} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_m^{m+n+1} |f'(x)|\,dx.$$

Проверить, что

$$0 < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{m} < \frac{1}{m^2}, \quad m \geqslant 1.$$

VII.2.42. Пусть

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{na_n}{n + a_n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n}$.

VII.2.43. Последовательность $\{u_n : n \geqslant 1\} \subset [a, +\infty)$ такова, что для некоторого $\Delta > 0$ $u_{k+1} - u_k \geqslant \Delta$, $k \geqslant 1$, а функция $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ монотонно не возрастает на $[a, +\infty)$. Предположим, что существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(u)\,du.$$

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(u_n)$. Привести дополнительное условие на числа u_n, $n \geqslant 1$, при котором из сходимости ряда следует существование предела.

VII.2.44. Пусть последовательность $\{u_n : n \geqslant 1\} \subset [a, +\infty)$ монотонно не убывает и $u_n \to +\infty$, $n \to \infty$, а функция $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ монотонно не возрастает на $[a, +\infty)$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(u_n)(u_n - u_{n-1})$$

сходится, если существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(u)\,du,$$

а ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})$$

расходится, если

$$\int_a^x f(u)\,du \to +\infty, \quad x \to +\infty.$$

VII.2.45. Пусть $a_n > 0$, $n \geqslant 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. **Доказать**, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^{\alpha}}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Здесь

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

VII.2.46. Пусть $a_1 = 1$; $a_n > 0$, $n \geqslant 2$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Пусть $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что

1) ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}}{s_n \ln s_n}$ расходится;

2) ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{s_n \ln^2 s_n}$ сходится.

VII. 2.47. Пусть $a_n > 0$, $n \geqslant 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{r_n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

VII. 2.48. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — строго убывающая последовательность положительных чисел такая, что $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_{n-1} - a_n}{a_n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1}^{\alpha}}$, где $\alpha \in (0, 1)$, сходится.

VII.2.49. Пусть $\{m(n) : n \geqslant 1\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Доказать, что ряды

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{m(n) - m(n-1)}{m(n-1)}; \quad 2)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{m(n) - m(n-1)}{m(n)}$$

расходятся.

VII.2.50. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $a_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n^{\alpha}}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

VII.2.51. Пусть $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Доказать следующие утверждения:

1) из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

следует, что

$$t_n := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \to 0, \quad n \to \infty;$$

2) обратное к 1) утверждение не верно;

3) сходимость $t_n \to 0$, $n \to \infty$, влечет сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}}$ для каждого $\varepsilon > 0$.

VII.2.52. Для функции $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ существует производная второго порядка f'' на $[1, +\infty)$, причем

$$\forall x \geqslant 1 : f'(x) \geqslant 0, \quad f''(x) \leqslant 0.$$

Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_n^{n+1} f(x)\,dx - \frac{f(n) + f(n+1)}{2} \right) \leqslant \frac{f(2) - f(1)}{2}.$$

§ 3. АБСОЛЮТНО И УСЛОВНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

VII.3.1. С помощью утверждения задачи VII.2.7 доказать сходимость и найти суммы следующих рядов:

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$ (ряд Лейбница);

2) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} + \cdots$;

3) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$;

4) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \cdots$;

5)* $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{7} + \cdots$.

VII.3.2. Доказать расходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots,$$

в котором знак «—» имеют члены вида 2^{-k}, $k \geqslant 1$.

VII.3.3. Для $x \in [0, 1)$ вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[2^n x]} 2^{-n}.$$

VII.3.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$; 4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n \ln \ln n}$.

VII.3.5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbf{R}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbf{R}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln^{\alpha} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\alpha > 0$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^{\alpha} \frac{1}{n}$, $\alpha > 0$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\alpha}$, $\alpha > 0$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}$, $\alpha > 0$.

VII.3.6. Пусть $m \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 2$, фиксировано и

$$d(n, m) = \begin{cases} 0, & n \neq km, \quad k \in \mathbf{N}, \\ m, & n = lm, \quad l \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Найти сумму ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 - d(n, m)}{n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d(n, l) - d(n, m)}{n}$, $l \geqslant 2$, $m \geqslant 2$.

Рассмотреть частные случаи: 1) при $m = 2$, $m = 3$; 2) при $m = 2$, $l = 3$.

VII.3.7. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ такова, что

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0, \quad n \geqslant 1; \quad a_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказать сходимость ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right);$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \right).$

VII.3.8. Предположим, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n b_n|}$.

VII.3.9. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

VII.3.10. Привести пример сходящего ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; для которого расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$.

VII.3.11. Пусть последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$, $\{b_n : n \geqslant 1\}$ таковы, что $a_n \to a$, $n \to \infty$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

VII.3.12. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Доказать, что существует последовательность чисел $\{b_n : n \geqslant 1\}$ такая, что $b_n \to 0$, $n \to \infty$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ расходится.

VII.3.13. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность такая, что $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Доказать, что существует последовательность $\{b_n : n \geqslant 1\}$ такая, для которой:

1) $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0, \quad n \geqslant 1,$

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится;

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится абсолютно.

VII.3.14. Определить необходимое и достаточное условие на последовательность $\{d_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ того, чтобы для любой последова-

тельности $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset [0, +\infty)$ из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следовала бы сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n a_n$.

VII.3.15*. Определить необходимое и достаточное условие на последовательность $\{d_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ того, чтобы для любой последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следовала бы сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n a_n$.

VII.3.16. Функция $f \in C([0, +\infty))$, причем

$$\forall x \geqslant 0 \ : \ 0 < f(x+1) < f(x); \quad f(x) \to 0, \quad x \to +\infty.$$

Пусть

$$a_n = \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx, \quad n \geqslant 1.$$

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

VII.3.17. Исследовать сходимость следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 x \cos(nx)\,dx$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_0^1 x^n \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{n}\right) dx$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_{n-1}^{n+1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^3}\,dx$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_n^{2n} \dfrac{dx}{\sqrt{x^5+n}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_n^{n^2} \dfrac{dx}{1+x^4}$;

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_n^{n+1} \dfrac{dx}{\ln x}$.

VII.3.18. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{2\pi k}{n}\right)^2.$$

VII.3.19. Пусть $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Доказать условную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

VII.3.20. Доказать сходимость следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n^2 x) \sin(nx), \quad x \in \mathbf{R};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n^2 x) \sin(nx), \quad x \in \mathbf{R};$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n \sin(nx), \quad x \in \mathbf{R};$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_n - a_{n-1})$, где $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ — ограниченная последовательность;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 x \cos(nx)\, dx;$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x) \sin(nx)\, dx$, где $f \in C^1\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right);$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} n;$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_0^n e^{-x^2} dx;$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

VII.3.21. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\}$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел, причем $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in (0, \pi) \quad : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sin kx \right| \leqslant \frac{a_{n+1}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

VII.4.1. Доказать, что для произвольного ряда допустима группировка членов одного знака (без изменения порядка следования). Например, ряды

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{4}+\cdots$$

оба сходятся и имеют одну сумму, а ряды

$$\frac{1+1}{1}-1+\frac{2+1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3+1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots,$$

$$1+1-1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots$$

оба расходятся.

VII.4.2. Доказать, что следующие утверждения равносильны:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно;

2) для любой последовательности $\{\varepsilon_n \mid n\geqslant 1\}$, в которой каждое $\varepsilon_n=1$ или $\varepsilon_n=-1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ сходится;

3) для любой последовательности $\{\varepsilon_n \mid n\geqslant 1\}$, в которой каждое $\varepsilon_n=1$ или $\varepsilon_n=0$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ сходится.

VII.4.3. Пусть $\{a_n \mid n\geqslant 1\}$ и $\{b_n \mid n\geqslant 1\}$ — последовательности действительных чисел, причем ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся.

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, если

1) $c_n=\begin{cases} a_n, & n\in\{2k \mid k\in\mathbf{N}\}; \\ b_n, & n\in\{2k-1 \mid k\in\mathbf{N}\}; \end{cases}$

2) $c_n=\begin{cases} a_n, & n\in\mathbf{N}\setminus\{2^k \mid k\in\mathbf{N}\}; \\ b_n, & n\in\{2^k \mid k\in\mathbf{N}. \end{cases}$

VII.4.4. Для $x\in\mathbf{R}$ доказать равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

VII.4.5. Предположим, что $\mathbf{N}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k\cap A_j=\varnothing$, $k\neq j$, $A_k\sim\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{N}$, $j\in\mathbf{N}$. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — абсолютно сходящийся ряд.

Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n\in A} a_n\right).$$

VII.4.6*. Теорема Римана. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно и $s\in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Доказать, что существует такая перестановка $\{m(k) \mid k\geqslant 1\}$ множества $\mathbf{N}$, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m(k)} \qquad (*)$$

сходится к s. Доказать также существование перестановки, для которой частичные суммы ряда $(*)$ ограничены, но не имеют предела.

VII.4.7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ обладает свойством: для любой перестановки $\{m(k) \mid k\geqslant 1\}$ множества $\mathbf{N}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m(k)}$ сходится. Доказать, что исходный ряд сходится абсолютно.

VII.4.8. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходящийся ряд с положительными членами такими, что $a_n \to 0$, $n\to\infty$. Доказать, что для любого $s\in\mathbf{R}$ существует последовательность чисел ε_n, $n\geqslant 1$, таких, что каждое $\varepsilon_n = 1$ или $\varepsilon_n = -1$, и таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = s.$$

VII.4.9. Доказать, что произведение по Коши ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

на себя есть расходящийся ряд.

VII.4.10. Пусть для $n\geqslant 0$ s_n', s_n'' — частичные суммы рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n', \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n'' \qquad (*)$$

соответственно, а s_n — частичная сумма ряда-произведения этих рядов по Коши

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k' a_{n-k}''\right). \qquad (**)$$

Доказать, что для $n\geqslant 0$ справедливо равенство

$$s_0+s_1+\cdots+s_n = s_0's_n''+s_1's_{n-1}''+\cdots+s_n's_0''.$$

С помощью результатов задач II.1.29, II.1.44 установить теорему Абеля: если ряды $(*)$ и $(**)$ сходятся к суммам s', s'' и s соответст-

венно, то $s = s' \cdot s''$.

VII.4.11. Ряд $a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится абсолютно для каждого $x \in \mathbf{R}$. Доказать равенство

$$a(x+y) = a(x)\,a(y)$$

для любых $\{x, y\} \subset \mathbf{R}$. С помощью этого равенства проверить, что

$$a(n) = c^n,\ n \in \mathbf{N};\quad a(-1) = c^{-1},\quad a(0) = 1;$$

$$a(r) = c^r,\quad r \in \mathbf{Q},\quad \text{где } c = a(1) > 0.$$

Доказать, что $a \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ и справедливо представление

$$a(x) = c^x,\quad x \in \mathbf{R}.$$

VII.4.12. Пусть $|x| < 1$ и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad x \in (-1, 1),$$

сходится. Положим $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, $n \geqslant 0$. Доказать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad x \in (-1, 1).$$

§ 5. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

VII.5.1. Найти значения следующих произведений:

1) $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}),\quad x \in (-1, 1);$

2) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right);$

3) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$, где $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = (n+1)(1 + a_n),\quad n \geqslant 1.$

VII.5.2. Исследовать сходимость следующих произведений:

1) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{m(n) - m(n-1)}{m(n)}\right)$, где $\{m(n) \quad n \geqslant 1\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел;

2) $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n, $n \geqslant 1$, — числа, удовлетворяющие неравенствам

$$a_1 > 0,\quad 1 \leqslant a_n \leqslant \frac{n^2}{n^2 - 1},\quad n \geqslant 2;$$

3) $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$, где числа a_n, $n \geqslant 1$, с некоторым $\alpha > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$a_n \geqslant \alpha\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad a_n a_{n+1} \leqslant \frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3}, \quad n \geqslant 2; \quad a_1 > 0;$$

4) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a}$, $a > 0$;

5) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{a}$, $a > 0$.

VII.5.3. Исследовать сходимость следующих произведений:

1) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha > 0$;

2) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$, $x \in (-1, 1)$;

3) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + e^{-n^2 x})$, $x > 0$;

4) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$;

5) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$;

6) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}}$;

7) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^\alpha$, $\alpha > 0$;

8) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$, $\alpha > 0$;

9) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}$, $x > 0$;

10) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)^\alpha$, $\alpha > 0$;

11) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, где положительные числа a_n, $n \geqslant 1$, такие, что

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = O(1), \quad n \to \infty;$$

12) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$;

13) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \frac{x^2 dx}{1+x^2}$.

VII.5.4. Пусть числа a_n, $n \geqslant 1$, положительны и таковы, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln a_n| < +\infty$$

Доказать, что произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не зависит от порядка сомножителей.

Глава VIII ● ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ

VIII.1.1. Доказать, что последовательность функций

$$\{A \ni x \mapsto f_n(x) \quad : \quad n \geqslant 1\}$$

сходится равномерно на множестве B ($B \subset A$) к функции $f : B \to \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда

$$d_n := \sup \{ |f_n(x) - f(x)| \quad | \quad x \in B\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Заметим, что $d_n \leqslant +\infty$, $n \geqslant 1$.

VIII.1.2. Исследовать на поточечную и равномерную на множестве $B \subset A$ сходимости последовательность функций

$$\{A \ni x \mapsto f_n(x) \quad : \quad n \geqslant 1\}, \text{ где}$$

1) $A = B = [0, 1]$; $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, $n \geqslant 1$.

2) $A = B = [0, 1]$;

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = \dfrac{1}{n}, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \left\{\dfrac{1}{n}\right\}, \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

3) Пример 1) для множества $B_\alpha = [0, \alpha]$, $\alpha \in [0, 1)$ — фиксировано.

4) Пример 2) для множества $B_\alpha = [\alpha, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$ — фиксировано.

5) $A = B = [0, +\infty)$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, n), \\ 1, & x \geqslant n, \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

6) Пример 5) для множества $B_c = [0, c]$, $c > 0$ — фиксировано.

7) $A = B = \mathbf{R}$; $f_n(x) = (n^2 + x^2)^{-1}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$.

8) $A = B = [0, 1]$; $f_n(x) = 2nx(1 + n^2x^2)^{-1}$, $x \in A$, $n \geqslant 1$.

9) Пример 8) для множества $B_\alpha = [\alpha, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$ — фиксировано.

10) $A = B = \mathbf{R}$; $f_n(x) = \exp(-(x-n)^2)$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$.

11) Пример 10) для множества $B_c = [0, c]$, $c > 0$ — фиксировано.

12) $A = B = [0, 1]$; $f_n(x) = (1 + (nx - 1)^2)^{-1}$, $x \in A$, $n \geqslant 1$.

13) $A=B=[0,\ 1]$; $\quad f_n(x)=x^2(x^2+(nx-1)^2)^{-1}, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

14) $A=B=[0,\ +\infty)$; $\quad f_n(x)=(1-x^n)(1+x^n)^{-1}, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

15) Пример 14) для множества $B=[0,\ 1]$.

16) $A=B=[0,\ 1]$; $\quad f_n(x)=x^n(1-x), \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

17) $A=B=[0,\ 1]$; $\quad f_n(x)=x-x^n, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

18) $A=B=[0,\ 1]$; $\quad f_n(x)=\left(x-\frac{1}{n}\right)^2, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

19) $A=\mathbf{R}$; $\quad f_n(x)=\sin^{2n}x, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1$ для множеств $B_1=[0,\ 2\pi]$, $B_2=\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$.

20) $A=[0,\ 1]$; $\quad f_n(x)=(1+x^n)^{-1}, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1$ для множеств $B_1=[0,\ 1]$, $\quad B_2=\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

21) $A=B=[0,\ 1]$; $\quad f_n(x)=nx^n(1-x), \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

22) $A=B=[0,\ 1]$; $\quad f_n(x)=n^3x^n(1-x)^4, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

23) $A=B=[0,\ 1]$; $\quad f_n(x)=nx^2(1+nx)^{-1}, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

24) $A=B=[0,\ 1]$; $\quad f_n(x)=n^3x(1+n^4x)^{-1}, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

25) $A=B=[a,\ +\infty),\ a>0$; $\quad f_n(x)=n^3x(1+n^4x^2)^{-1}, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

26) $A=B=\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$; $\quad f_n(x)=\cos^n x(1-\cos^n x), \quad x\in A, \quad n\geqslant 1.$

27) $A=\mathbf{R}$; $\quad f_n(x)=\cos x\cdot\sin^{2n}x, \quad x\in A, \quad n\geqslant 1$ для множеств $B_1=\mathbf{R}$, $\quad B_2=\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$.

VIII.1.3. Исследовать на равномерную на множестве $\mathbf{R}$ сходимость последовательность

$$\left\{f_n(x)=\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}, \quad x\in\mathbf{R} \ : \ n\geqslant 1\right\}.$$

VIII.1.4. Определить поточечный на $\mathbf{R}$ предел последовательности

$$\left\{f_n(x)=n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right), \quad x\in\mathbf{R} \ : \ n\geqslant 1\right\}.$$

Будет ли сходимость к пределу равномерной на множестве $\mathbf{R}$? $[-a,\ a]$, $a>0$?

VIII.1.5. Определить поточечный на $(0,\ +\infty)$ предел последовательности

$$\left\{f_n(x)=n\ln\frac{1+nx}{nx}, \quad x>0 \ : \ n\geqslant 1\right\}.$$

Будет ли сходимость к пределу равномерной на $(0,\ +\infty)$?

VIII.1.6. Найти поточечный на $\mathbf{R}$ предел последовательности

$$\left\{f_n(x) = \sqrt[2n]{1 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbf{R} \;:\; n \geqslant 1\right\}.$$

Будет ли сходимость равномерной на оси?

VIII.1.7. Определить поточечный предел и доказать равномерную на $\mathbf{R}$ сходимость последовательности

$$\left\{f_n(x) = \sqrt[n]{2^n + |x|^n}, \quad x \in \mathbf{R} \;:\; n \geqslant 1\right\}.$$

VIII.1.8. Исследовать на равномерную на $\mathbf{R}$ сходимость последовательность

$$\left\{f_n(x) = n\left(\sin\left(x + \frac{1}{n}\right) - \sin x\right), \quad x \in \mathbf{R} \;:\; n \geqslant 1\right\}.$$

VIII.1.9. Исследовать на равномерную на множестве A сходимость последовательность

$$\left\{f_n(x) = n\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\alpha} - 1\right), \quad x \geqslant 0 \;:\; n \geqslant 1\right\}$$

для $A = [0, +\infty)$, $A = [0, 1]$.

VIII.1.10. Определить поточечный на $\mathbf{R}$ предел последовательности

$$\{f_n(x) = n \sin \sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbf{R} \;:\; n \geqslant 1\}.$$

Будет ли сходимость равномерной на $[0, a]$, $a > 0$? на $\mathbf{R}$?

VIII.1.11. Для $m \in \mathbf{N}$ пусть H_m — множество всех многочленов степени, не большей m, рассматриваемых на $[a, b]$. Функция f есть поточечный предел последовательности $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset H_m$. Доказать, что $f \in H_m$. Доказать также, что сходимость к f равномерна на $[a, b]$.

VIII.1.12. Доказать, что равномерный на оси предел последовательности многочленов есть многочлен.

VIII.1.13. Пусть $f_n \to f$, $g_n \to g$, $n \to \infty$, поточечно на множестве A. Доказать, что $f_n + g_n \to f + g$, $f_n g_n \to fg$, $n \to \infty$, поточечно на A.

VIII.1.14. Пусть $f_n \to f$, $g_n \to g$, $n \to \infty$, равномерно на множестве A. Доказать, что $f_n + g_n \to f + g$, $n \to \infty$, равномерно на A. Сходится ли равномерно на A последовательность $\{f_n g_n : n \geqslant 1\}$?

VIII.1.15. Пусть $f_n \to f$, $g_n \to g$, $n \to \infty$, равномерно на множестве A и

$$\exists C \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A \;:\; |f(x)| \leqslant C, \quad |g(x)| \leqslant C.$$

Доказать, что $f_n g_n \to fg$, $n \to \infty$, равномерно на A. В частности, $f_n g \to fg$, $n \to \infty$, равномерно на A.

VIII.1.16. Пусть последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ и $\{f_n(x),\ x \in A : n \geqslant 1\}$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_n \to a \in \mathbf{R}, \quad n \to \infty;$

2) $\sup\limits_{x \in A} |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |a_m - a_n|, \quad \{m, n\} \subset \mathbf{N}.$

Доказать, что $\{f_n : n \geqslant 1\}$ сходится равномерно на A.

VIII.1.17. При каждом $n \geqslant 1$ функция $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$ и $f_n \to f$, $n \to \infty$, равномерно на $\mathbf{R}$. Доказать, что f равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$.

VIII.1.18. Для функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ существует f' на $\mathbf{R}$ и f' равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$. Доказать, что

$$n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) \to f'(x), \quad n \to \infty, \quad x \in \mathbf{R},$$

равномерно на $\mathbf{R}$.

VIII.1.19*. Пусть $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{C}([a, b])$ и для некоторого $k \in \mathbf{N}$ и всех $n \in \mathbf{N}$ существует $f_n^{(k)}$ на (a, b), причем

$$\exists C \in \mathbf{R} \quad \forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in (a, b) \quad : \quad |f_n^{(k)}(x)| \leqslant L.$$

Предположим, что $f_n \to f$, $n \to \infty$, поточечно на $[a, b]$. Доказать, что $f_n \to f$, $n \to \infty$, равномерно на $[a, b]$.

VIII.1.20. Для $f \in \mathbf{C}([a, b])$ пусть

$$f_n(x) = \int_a^b f\left(\frac{u}{n} + \frac{n-1}{n}\, x\right) du, \quad x \in [a, b]; \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что $f_n \to f$, $n \to \infty$, равномерно на $[a, b]$.

§ 2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА

VIII.2.1. Определить множество A ($A \subset \mathbf{R}$) поточечной сходимости функционального ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n (x+2)$, $x > -2$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-x)\, x^n$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-x^2)\, x^n$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n \sin \dfrac{1}{4^n x}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x^n}{3^n} + \dfrac{1}{x^n}\right)$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n4^n}{3^n}\, x^n (1-x)^n$; 8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n (1-x)^n$;

9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x+1)^n (x+2)^n$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n} \left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^n$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^{\frac{n}{2}}$; 12) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin^n x$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n x$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{n} \sin^n \left(x^2 - \dfrac{\pi}{6}\right)$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, где $a_n(x)=0$ при $x\leqslant n$ и $a_n(x)=(-1)^n$ при $x>n$ для каждого $n\geqslant 1$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, где $a_n(x)=\frac{1}{n^2}$ при $|x|\leqslant n$ и $a_n(x)=\frac{1}{x^2}$ при $|x|>n$ для каждого $n\geqslant 1$;

17) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$; 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$;

19) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$; 20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$;

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+x^n}{1+3^n x^n}$; 22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$;

23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$; 24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{2^n}$;

25) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^x$; 26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$, $x>0$;

27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^n)}$;

28) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin^2(2\pi\sqrt{n^2+x^2})$;

29) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(n^2(1+x^2))\right)$.

VIII.2.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $x\in A$, сходится равномерно на множестве A. Доказать, что

1) $\sup\limits_{x\in A}|a_n(x)|\to 0$, $n\to\infty$;

2) $\sup\limits_{x\in A}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k(x)\right|\to 0$, $n\to\infty$.

VIII.2.3. Пусть при каждом $n\geqslant 1$ a_n есть многочлен. Описать все ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $x\in\mathbf{R}$, сходящиеся равномерно на $\mathbf{R}$.

VIII.2.4. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x),\quad x\in A, \tag{*}$$

сходится равномерно на A, а $f: A \to \mathbf{R}$ — функция, ограниченная на A. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f(x)\, a_n(x)), \quad x \in A, \qquad (**)$$

сходится равномерно на A. Привести пример, показывающий, что условие ограниченности функции f существенно. При каком условии на функцию f из равномерной на A сходимости ряда $(**)$ следует равномерная на A сходимость ряда $(*)$?

VIII.2.5. Последовательность функций $\{a_n(x),\ x \in A : n \geqslant 1\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{(i)}\ \forall\, x \in A \quad \forall\, n \geqslant 1 \ :\ a_n(x) \geqslant 0;$$

$$\text{(ii)}\ \forall\, x \in A \quad \forall\, n \geqslant 1 \ :\ a_n(x) \geqslant a_{n+1}(x);$$

$$\text{(iii)}\ \sup_{x \in A} |a_n(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n(x)$ сходится равномерно на A.

VIII.2.6. Доказать равномерную на R сходимость ряда

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n + x^2} + x^2}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \cos x}$.

VIII.2.7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(x)$, $x \in A$, сходится на A, причем

$$\sup_{x \in A} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(x) \right) < +\infty,$$

а числа $\{c_n : n \geqslant 1\}$ таковы, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n(x), \quad x \in A,$$

сходится равномерно на A.

VIII.2.8. Определить множество A точек сходимости произведения

1) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2^{n(x - x^2)})$; 2) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2^n \sin^{2n} x)$.

VIII.2.9. Исследовать на равномерную на множестве A сходимость

1) ряд 15) задачи VIII.2.1. для множеств $A = [-c, c], c > 0$; $A = \mathbf{R}$;

2) ряд 16) задачи VIII.2.1. для множеств $A = [-c, c], c > 0$; $A = \mathbf{R}$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ для множеств $A = [0, c], \quad c \in (0, 1)$; $A = [0, 1)$;

4) ряд 2) задачи VIII.2.1. для $A = [0, 1]$;

5) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^2 x^n$ для $A = [0, 1]$;

6) ряд 23) задачи VIII.2.1. для $A = (1, +\infty)$; $A = [2, +\infty)$.

VIII.2.10. Определить множество A точек сходимости, множество B точек абсолютной сходимости функционального ряда. Является ли сходимость равномерной на множестве D?

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} 2^{-n(1-x)}, \quad D = [1, 2]$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 2^n (3x-1)^n, \quad D = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (2^{-n(1+x)} + 3^{n(x-2)}), \quad D = [0, 1]$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+1}{x}\right)^n, \quad D = [-2, -1]$.

VIII.2.11. Доказать равномерную на множестве A сходимость ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (x - \ln n)^2}, \; A = \mathbf{R}$;

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{x^2}{n \ln^2 n}, \quad A = [-c, c], \quad c > 0$;

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2 + x^2}{n^2}, \quad A = [-c, c], \quad c > 0$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}, \quad A = \mathbf{R}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, \quad A = [2, +\infty)$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad A = [0, c], \quad c > 0$;

7) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^2 e^{-n^2|x|}, \quad A = \mathbf{R}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sqrt[3]{n}}{1+n^3x^2}$, $A = \mathbf{R}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^{n-1}$, $A = [-1, 1]$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$, $A = \mathbf{R}$;

11) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $A = [-c, c]$, $c > 0$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\cos nx}{\sqrt{(n^2+1)(n^2x^4+1)}}$, $A = \mathbf{R}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n\sin(nx)}$, $A = \mathbf{R}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\frac{x}{n}} \ln(1+u^2)\,du$, $A = [0, 3]$;

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} \operatorname{arctg} u^2 du$, $A = [0, 3]$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-\frac{x}{n}}^{\frac{x}{n}} \sin u^2 du$, $A = [-3, 4]$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n|x|} \sin(x^2\sqrt{n})$, $A = \mathbf{R}$;

18) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$, $A = \mathbf{R}$, $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

VIII.2.12. Последовательности функций $\{a_n(x),\ x \in A \mid n \geqslant 1\}$ и $\{b_n(x),\ x \in A \mid n \geqslant 1\}$ таковы, что

1) $\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in A \ : \ |a_n(x)| \leqslant b_n(x)$,

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на A.

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на A.

VIII.2.13. Доказать равномерную на $[0, +\infty)$ сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n(x-n)^2}, \quad x \geqslant 0.$$

VIII.2.14. Доказать равномерную на множестве A сходимость ряда

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n+x}+x}, \quad x \in A = [0, +\infty);$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n+x^2}}, \; x \in A = [\delta, 2\pi-\delta], \quad \delta \in (0, \pi);$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)\sin(nx)}{n+x^2}, \quad x \in A = \mathbf{R};$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(nx)\operatorname{arctg}(nx), \quad x \in A = [\delta, 2\pi-\delta], \quad \delta \in (0, \pi).$

VIII.2.15. Предположим, что функции $a_n : A \to \mathbf{R}$ $b_n : A \to \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$, удовлетворяют следующим условиям:

1) ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}(x) - a_n(x)|$ сходится равномерно на A;

2) $\displaystyle\sup_{x \in A} |a_n(x)| \to 0, \quad n \to \infty;$

3) $\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in A \quad : \quad \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant c.$

Доказать, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на A. Вывести из этого утверждения признак Дирихле равномерной сходимости.

VIII.2.16. Доказать равномерную на множестве A сходимость ряда

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in A = [0, 1];$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n+x^2}, \quad x \in A = \mathbf{R};$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}, \quad x \in A = [\alpha, +\infty), \quad \alpha > 0;$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}}, \quad x \in A = [0, +\infty).$

VIII.2.17. Предположим, что функции $a_n : A \to \mathbf{R}$, $b_n : A \to \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$, удовлетворяют следующим условиям:

1) функция a_1 ограничена на A;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}(x) - a_n(x)|$ сходится поточечно на A, причем

$$\sup_{x\in A}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}(x) - a_n(x)|\right) < +\infty;$$

3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на A.

Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$$

сходится равномерно на множестве A. Вывести из этого утверждения признак Абеля равномерной сходимости.

VIII.2.18*. Теорема Дини. Пусть $a_n : [\alpha, \beta] \to [0, +\infty)$, $a_n \in \in \mathbf{C}([\alpha, \beta])$, $n \geqslant 1$. Предположим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a(x), \quad x \in [\alpha, \beta] \qquad (*)$$

сходится поточечно на $[\alpha, \beta]$, причем $a \in \mathbf{C}([\alpha, \beta])$. Доказать, что ряд $(*)$ сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$.

VIII.2.19. Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n(x) = p(x), \quad x \in A,$$

сходится равномерно на множестве A (то есть последовательность положительных на A функций

$$\left\{\prod_{n=1}^{m} p_n(x), \quad x \in A \ : \ m \geqslant 1\right\}$$

сходится равномерно на A к p), причем

$$\exists a > 0 \quad \forall x \in A \ : \ p(x) \geqslant a.$$

Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n(x) = \ln p(x), \quad x \in A,$$

при этом сходимость ряда равномерна на A.

VIII.2.20. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a(x), \quad x \in A,$$

сходится равномерно на A и $\sup_A |a| < +\infty$. Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{a_n(x)} = e^{a(x)}, \quad x \in A,$$

сходится равномерно на A.

VIII.3.1. Предположим, что функции $a_n \in \mathbf{C}([0, 1])$, $n \geqslant 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на множестве $[0, 1)$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(1)$ сходится.

VIII.3.2. Определить множество A точек сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \cos(nx), \quad x \in \mathbf{R}.$$

VIII.3.3. Привести пример ряда, члены которого являются разрывными функциями, и который равномерно сходится к непрерывной сумме.

VIII.3.4. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

сходится на $\mathbf{R}$ и что его сумма есть непрерывная функция на $\mathbf{R}$.

VIII.3.5. Исследовать на непрерывность на $[0, +\infty)$ сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}.$$

VIII.3.6. Исследовать на непрерывность на множестве сходимости ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n!}.$$

VIII.3.7. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2} =: a(x)$ сходится поточечно на $(-1, 1)$ и что $a \in \mathbf{C}((-1, 1))$.

VIII.3.8. Доказать, что функция $a(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n 2^n x^n$ определена и непрерывна в точках интервала $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

VIII.3.9. Доказать, что функция $a(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln^n (x+1)$ непрерывна на $\left(\frac{1}{e} - 1, e - 1\right)$.

VIII.3.10. Определить множество A точек сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x|^{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

и исследовать сумму ряда на непрерывность на множестве A.

VIII.3.11. Пусть $\{a_n : n \geqslant 0\} \subset \mathbf{R}$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится. Найти предел

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

VIII.3.12. Доказать следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to 1-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2;$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$

VIII.3.13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1-}\left((1-x)^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n\right)$.

VIII.3.14. Найти предел

$$\lim_{x\to 1-}\left((1-x)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} n^m x^n\right), \quad m \in \mathbf{N}.$$

VIII.3.15. Определить множество $A \subset \mathbf{R}$ точек сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{3^n} + \frac{1}{x^n}\right)$$

и доказать, что его сумма непрерывна на A.

VIII.3.16. Определить множество $A \subset \mathbf{R}$ точек сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

и доказать, что его сумма непрерывна на A.

VIII.3.17. Наборы $\{a_n^N \mid n \geqslant 1,\ N \geqslant 1\}$, $\{a_n \mid n \geqslant 1\}$ удовлетворяют условиям

(i) $\forall\, n \geqslant 1 \;:\; a_n^N \to a_n, \quad N \to \infty;$

(ii) $\forall\, n \geqslant 1 \quad \forall\, N \geqslant 1 \;:\; |a_n^N| \leqslant b_n, \quad |a_n| \leqslant b_n;$

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty.$

Доказать, что

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

VIII.3.18. Определить множество $A \subset \mathbf{R}$ всех точек x, в которых сходится произведение, и доказать, что его значение $p \in C(A)$,

1) $\prod\limits_{n=0}^{\infty} (1 + e^{nx}) = p(x);$

2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + nx^n) = p(x)$;

3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \sqrt{n} \cdot 2^{-n(x+1)}) = p(x)$;

4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{n}{x^{2n}}\right) = p(x)$.

VIII.3.19. Пусть числа $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, и произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ сходится. Найти предел

$$\lim_{x \to 1-} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n x^n).$$

VIII.3.20. Представить в виде суммы ряда интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где

1) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2 \dfrac{x}{n}$, $\quad x \in [a, b] = [0, 2]$;

2) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n + x)(n + 2x)^2}$, $\quad x \in [a, b] = [0, 1]$;

3) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x + \sqrt{n})(x + 1 + \sqrt{n})(x + 2 + \sqrt{n})}$, $\quad x \in [a, b] = [0, 1]$.

Ответ обосновать.

VIII.3.21. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$. Доказать существование f' на $\mathbf{R}$.

VIII.3.22. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1 + n^2}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right].$$

Доказать существование f' на $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right]$.

VIII.3.23. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right), \quad x \geqslant 0.$$

Доказать существование f' на $[0, +\infty)$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

VIII.3.24. Пусть

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}},\quad x\in\mathbf{R}.$$

Доказать, что $f\in\mathbf{C}^1$ **(R).**

VIII.3.25. Пусть

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx^2)}{1+n^3},\quad x\in\mathbf{R}.$$

Доказать, что $f\in\mathbf{C}^1$ **(R).**

VIII.3.26. Пусть

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(\operatorname{tg}x)^n,\ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$$

Доказать, что $f\in\mathbf{C}^1\left(\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

VIII.3.27. Определить множество A точек сходимости функционального ряда и доказать существование производной f' на A суммы ряда f, если

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n!},\quad x\in A;$

2) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n},\quad x\in A;$

3) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+x^n},\quad x\in A;$

4) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n},\quad x\in A;$

5) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(1+x^2)^n},\quad x\in A;$

6) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1+x^n},\quad x\in A;$

7) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n},\quad x\in A;$

8) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}},\quad x\in A;$

9) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{1+x^n},\quad x\in A;$

10) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n(x+1)}}{1+2^{nx}}, \quad x\in A;$

11) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,x^n e^{-2nx^2}, \quad x\in A.$

VIII.3.28. Пусть

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}, \quad x\geqslant 0.$$

Доказать, что $f\in C([0,+\infty))$, $f\in C^{\infty}((0,+\infty))$ и что $f'(0)$ не существует.

VIII.3.29. Определить множество A точек сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{x}{3}\right)^n+x^{-n}\right)=f(x), \quad x\in A,$$

и доказать, что $f\in C^{\infty}(A)$.

VIII.3.30. Доказать, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln^n(1+x)$ принадлежит классу $C^{\infty}\left(\left(\frac{1}{e}-1,\ e-1\right)\right)$.

VIII.3.31. Доказать, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ принадлежит классу $C^{\infty}([2,+\infty))$.

VIII.3.32. Определить множество A точек сходимости произведения и доказать существование p' на A, если

1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)=p(x)$; 2) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+2^{nx})=p(x)$;

3) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+nx^{2n})=p(x)$; 4) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{n^2}{x^{2n}}\right)=p(x)$;

5) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^{2n}}{n!}\right)=p(x)$.

VIII.3.33*. Функции $u_n:[a,b]\to\mathbf{R}$, $n\geqslant 1$, удовлетворяют следующим условиям:

1) $\forall n\geqslant 1\quad \forall x\in[a,b]\ :\ u_n(x)\geqslant 0$;

2) $\forall n\geqslant 1\ :\ u_n\in C([a,b])$.

Доказать, что равномерная на $[a,b]$ сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ есть необходимое и достаточное условие непрерывности его суммы.

VIII.3.34. С помощью теоремы о почленном интегрировании функционального ряда доказать равенство

1) $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}, \quad x\in(-1,\ 1]$;

2) $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad x\in(-1,\ 1)$;

3) $\dfrac{x}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n, \quad x\in(-1,\ 1)$.

§ 4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

VIII.4.1. Лемма Абеля. Пусть числа $\{a_n \mid n\geqslant 0\}\subset \mathbf{R}$ и $x_0\neq 0$ таковы, что

$$\exists L>0 \quad \exists\alpha\geqslant 0 \quad \forall n\geqslant 1 \ : \ |a_nx_0^n|\leqslant Ln^{\alpha}.$$

Доказать, что для любого $x\in(-|x_0|,\ |x_0|)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ сходится абсолютно.

VIII.4.2. Определить радиус сходимости степенного ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nx^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n^2}x^n$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n^2}x^{n^2}$;

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$;

11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^nx^n$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}x^n$;

13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n x^n$; 14) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^nx^{2n}$;

15) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^nx^{n^2}$; 16) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n^2}x^{n!}$;

17) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$; 18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2+(-1)^n)^n\dfrac{x^n}{n^2}$;

19) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$; 20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$;

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n$; 22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n (C_{2n}^n)^{-1} x^n$.

VIII.4.3. Определить множество точек сходимости на $\mathbf{R}$ ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^2} (x-2)^n$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n (x+1)^{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{x}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 4^n}{3^n} x^n (1-x)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, (\operatorname{tg} x)^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-1)^n$.

VIII.4.4. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости r. Доказать, что радиус сходимости каждого из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1) a_n x^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+3} x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} a_n x^n, \ \alpha \in \mathbf{R}$$

также равен r. Пусть $0 < r < +\infty$, определить радиус сходимости ряда

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_n x^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} x^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n a_n x^n$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n$.

VIII.4.5. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеют радиусы сходимости r_1 и r_2 соответственно, $r_1 \neq r_2$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

имеет радиус сходимости $r = \min(r_1, r_2)$. Что можно утверждать о радиусе сходимости последнего ряда при $r_1 = r_2$?

VIII.4.6*. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеют радиусы сходимости r_1 и r_2. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ имеет радиус сходимости $r \geqslant r_1 \cdot r_2$.

VIII.4.7. Определить радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, если

1) $\exists L > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbf{R} \ : \ |a_n n^{\alpha}| \to L, \ n \to \infty$;
2) $\exists L > 0 \quad \exists \alpha > 0 \ : \ |a_n \alpha^n| \to L, \ n \to \infty$;
3) $\exists L > 0 \quad \exists \alpha > 0 \ : \ |a_n \alpha^{\sqrt{n}}| \to L, \ n \to \infty$;
4) $\exists L > 0 \ : \ |a_n n!| \to L, \ n \to \infty$;
5) $\exists L > 0 \ : \ \left|\frac{a_n}{n!}\right| \to L, \ n \to \infty$.

VIII.4.8. Определить множество A точек сходимости и множество B точек абсолютной сходимости ряда. Сходится ли равномерно на множестве C ряд

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad C = [-1, 0]$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(3x-1)^n, \quad C = \left[\frac{1}{6}, \ \frac{1}{3}\right)$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n(1-x)}}{n}, \quad C = A$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x}\right)^n, \quad C = A$.

VIII.4.9. Определить радиус сходимости в $\mathbf{C}$ степенного ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n(n+1)} z^n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(1+i)n}}{n3^n}(z-1-i)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1+e^{i\alpha})^n (z-e^{i\alpha})^n, \quad \alpha \in \mathbf{R}$.

VIII.4.10. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ — степенной ряд с суммой f и радиусом сходимости $r > 0$. Разложить в степенной ряд функцию

1) $f^{(m)}$ на $(-r, r)$;

2) $(-r, r) \ni x \mapsto \int_0^x f(u)\,du$;

3) $(-r, r) \ni x \mapsto \frac{1}{2} \int_{-x}^{x} f(u)\,du$;

4) $(-\sqrt{r}, \sqrt{r}) \ni x \mapsto \int_0^x f(u^2)\,du$;

5) $(-r, r) \ni x \mapsto (1-x) f(x)$;

6) $(-r, r) \ni x \mapsto \frac{1}{2}(f(-x) + f(x))$;

7) $(-r_1, r_1) \ni x \mapsto \frac{f(x)}{1-x}$;

8) $(-r, r) \ni x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{n^2}\right)$, $\quad a_0 = 0$;

9) $(-r, r) \ni x \mapsto f^2(x)$.

VIII.4.11. Описать все степенные ряды, которые равномерно сходятся на $\mathbb{R}$.

VIII.4.12. Определить радиус r сходимости и сумму ряда

1) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $\quad$ 2) $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

3) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

VIII.4.13. Найти сумму ряда

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$; $\quad$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; $\quad$ 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{n!}$; $\quad$ 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$.

VIII.4.14. Определить множество точек сходимости ряда

$$|x| - \frac{x^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{|x|^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

и найти его сумму a.

VIII.4.15. Определить радиус r сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$$

и для его суммы f доказать следующие соотношения:

1) $f'(x) = 1 + xf(x), \quad x \in (-r, r)$;

2) $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad x \in (-r, r)$.

VIII.4.16*. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = f(x)$ сходится на $\mathbf{R}$. Доказать, что

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

С учетом равенств $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ доказать, что

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

VIII.4.17. Представить в виде суммы ряда значение интеграла

$$\int\limits_0^1 e^{x^2} dx.$$

VIII.4.18. Доказать соотношение

$$\int\limits_0^1 e^{ax^3} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(3n+1)\, n!}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

VIII.4.19. Пусть $a_0 \in \mathbf{R}\,([0,1])$ и

$$a_n(x) = \int\limits_0^x a_{n-1}(u)\, du, \quad x \in [0, 1]; \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = a(x), \quad x \in [0, 1],$$

сходится на $[0, 1]$ и его сумма a удовлетворяет неравенству

$$|a(x)| \leqslant Le^x, \quad x \in [0, 1],$$

где $L = \sup\limits_{[0,1]} |a_0|$.

VIII.4.20. Предположим, что $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x)$$

...дится на интервале $(-r, r)$, $r > 0$, и существует предел

$$\lim_{x \to r-} a(x).$$

Доказать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$.

VIII.4.21*. Теорема Таубера. Предположим, что $na_n \to 0$, $n \to \infty$, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x)$$

сходится на интервале $(-1, 1)$ и существует предел

$$\lim_{x \to 1-} a(x) = s.$$

Доказать, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

VIII.4.22. Пусть $\{a_n, b_n \mid n \geqslant 1\} \subset \mathbf{C}$ и каждый из рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = g(z)$$

сходится в круге радиуса, большего 1. Доказать **равенство Парсеваля**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) \, d\theta,$$

в частности,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta.$$

§ 5. РЯД ТЕЙЛОРА

VIII.5.1. Ряды Тейлора функций f и g относительно точки 0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}; \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \ b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!},$$

сходятся на интервале $(-r, r)$, $r > 0$. Найти ряд Тейлора функции

1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) $(-r, r) \ni x \mapsto (1 + x) f(x)$;

4) $(-\sqrt{r}, \sqrt{r}) \ni x \mapsto f(x^2)$; 5) f';

6) $(-r, r) \ni x \mapsto \int_0^x f(u) \, du$;

7) $(-r,\ r) \ni x \mapsto h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0, \quad f(0) = 0; \end{cases}$

8) $(-r,\ r) \ni x \mapsto \int\limits_0^x \frac{f(u)}{u}\,du, \quad f(0) = 0;$

9) $(-r,\ r) \ni x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x));$

10) $(-r,\ r) \ni x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$

Какова особенность ряда Тейлора четной (нечетной) на $(-r,\ r)$ функции f?

VIII.5.2. Разложить в ряд Тейлора относительно точки 0 функцию

1) sh; 2) ch; 3) $\mathbf{R} \ni x \mapsto \sin x^3$; 4) $\mathbf{R} \ni x \mapsto \sin^3 x$;

5) $(-1,\ 1) \ni x \mapsto \ln(1 + x^2)$;

6) $(-1,\ 1) \ni x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$;

7) $(-1,\ 1) \ni x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$;

8) $(-1,\ 1) \ni x \mapsto \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$;

9) $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right) \ni x \mapsto \frac{1}{1 - 5x + 6x^2}$;

10) $(-1,\ 1) \ni x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$.

VIII.5.3. Для $n \in \mathbf{N}$ вычислить предел

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x + \ln(1-x)}{x^2}\right)$.

VIII.5.4. Разложить в степенной ряд по степеням x функцию

1) $f(x) = \sin x \cos 3x, \quad x \in \mathbf{R}$;

2) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x, \quad x \in \mathbf{R}$;

3) $f(x) = \int\limits_0^x u^2 \cos^4 u\,du, \quad x \in \mathbf{R}$;

4) $f(x) = \int\limits_0^x e^{u^4} du, \quad x \in \mathbf{R}$;

$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+x^2)}, \quad x \in (-1, 1);$

6) $f(x) = \ln(1+x) \cdot \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$

VIII.5.5. Разложить в ряд Тейлора относительно точки 0 функцию

1) $f(x) = \int_{0}^{x} \sqrt{1+u^4}\, du, \quad x \in (-1, 1);$

2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad x \in (-1, 1);$

3) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2), \quad x \in (-1, 1);$

4) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1);$

5) $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+x^2)}, \quad x \in (-1, 1);$

6) $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du, \quad x \in \mathbf{R}.$

VIII.5.6. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки 1 функцию

1) $f(x) = (x+1)e^x, \quad x \in \mathbf{R};$

2) $f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0;$

3) $f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad x \neq 0;$

4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0;$

5) $f(x) = x(\ln x - 1), \quad x > 0;$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad x \neq 0;$

7) $f(x) = \int_{1}^{x} \frac{e^u}{u}\, du, \quad x > 0.$

VIII.5.7. Представить в виде суммы числового ряда значение интеграла

1) $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx;$

2) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^p (1+x^n)^m\, dx, \quad p \geqslant 0, \; m \geqslant 0, \; n \geqslant 0.$

Глава IX. ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ И ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА. Дополнительные задачи к главам V—IX

§ 1. ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

IX.1.1 Доказать, что

$$V(f,\ [a,\ b])=0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\in[a,\ b] \ : \ f(x)=f(a).$$

IX.1.2. Доказать, что

$$V(f,\ [a,\ b])=f(b)-f(a) \quad \Leftrightarrow \quad f$$

монотонно не убывает на $[a,\ b]$.

IX.1.3. Функция $f: [a,\ b]\to\mathbf{R}$ для некоторого разбиения $\lambda^*=\{t_0^*,\ t_1^*,\ \ldots,\ t_n^*\}$ отрезка $[a,\ b]$ обладает следующим свойством: для каждого отрезка $[t_k^*,\ t_{k+1}^*]$ она монотонна на этом отрезке, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Доказать, что f имеет ограниченную вариацию и

$$V(f,\ [a,\ b])=\sum_{k=0}^{n-1}|f(t_{k+1}^*)-f(t_k^*)|.$$

IX.1.4. Определить $V(f,\ [a,\ b])$, если

1) $f(x)=\sin x,\quad x\in[a,\ b]=[0,\ 2\pi]$;

2) $f(x)=|\sin x|,\quad x\in[a,\ b]=[0,\ 10\pi]$;

3) $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\in[-1,\ 0];\\ x-x^2, & x\in(0,\ 1],\end{cases}$

$a=-1,\quad b=1$;

4) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ 1, & x\in[-1,\ 1]\setminus\{0\},\end{cases}\quad a=-1,\ b=1$;

5) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ 1-x, & x\in(0,\ 1);\\ 2, & x=1,\end{cases}\qquad a=0,\quad b=1$;

6) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in[0,\ 1);\\ 5 & x=1;\\ x^2, & x\in(1,\ 2],\end{cases}\qquad a=0,\quad b=2.$

IX.1.5. Доказать, что функция $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ не имеет ограниченной вариации на $[0, 1]$:

1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{1}{x}, & x \in (0, 1]; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}; \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \end{cases}$

3) $f(0) = 0$; $\quad f\left(\frac{1}{2k-1}\right) = 0$, $\quad f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k}$, $\quad k \in \mathbf{N}$:

f — линейна на каждом из отрезков

$$\left[\frac{1}{2k+1}, \ \frac{1}{2k}\right], \quad \left[\frac{1}{2k}, \ \frac{1}{2k-1}\right], \quad k \in \mathbf{N};$$

4) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \sin\frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1]; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ x \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x \in (0, 1]. \end{cases}$

IX.1.6*. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin\frac{1}{x^{\beta}}, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x = 0; \ \beta > 0. \end{cases}$$

Доказать, что $V(f, [0, 1]) < +\infty$ для $\alpha > \beta$ и

$$V(f, [0, 1]) = +\infty \text{ для } \alpha \leqslant \beta.$$

IX.1.7. Пусть $f \in \mathbf{BV}([a, b])$, $g(x) = A f(x) + B$, $x \in [a, b]$. Проверить, что

$$V(g, [a, b]) = |A| V(f, [a, b]).$$

IX.1.8. Пусть $f \in \mathbf{BV}([a, b])$, $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$, причем $\varphi \in \mathbf{C}([\alpha, \beta])$, φ монотонно не убывает и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Доказать, что

$$V(f, [a, b]) = V(f(\varphi), [\alpha, \beta])$$

IX.1.9. Доказать, что

$$f \in \mathbf{BV}([a, b]) \Rightarrow |f| \in \mathbf{BV}([a, b]).$$

IX.1.10. Пусть $f \in \mathbf{C}([a, b])$, доказать, что

$$|f| \in \mathbf{BV}([a, b]) \Rightarrow f \in \mathbf{BV}([a, b]).$$

Привести пример, показывающий, что условие непрерывности нельзя опустить.

IX.1.11. Функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$, имеет f' на $[a, b]$, исключая конечное число точек, и $f' \in \mathbf{R}([a, b])$. Доказать, что $f \in \mathbf{BV}([a, b])$ и

$$V(f, [a, b]) = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

IX.1.12. Пусть $\varphi \in \mathbf{R}([a, b])$ и

$$f(x) := \int_a^x \varphi(u)\,du, \quad x \in [a, b].$$

Доказать, что $f \in \mathbf{BV}([a, b])$ и

$$V(f, [a, b]) = \int_a^b |\varphi(u)|\,du.$$

IX.1.13. Пусть P — многочлен. Доказать, что для любого отрезка $[a, b]$ $P \in \mathbf{BV}([a, b])$.

IX.1.14. Исследовать сходимость ряда

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{V(\sin, [0, n\pi])}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nV\left(\sin\frac{1}{x}, \left[\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{\pi}\right]\right)}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (V(\sin\sqrt{x}, [n, n+1]))^3$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (V(\sin x^2, [0, n]))^{-1}$;

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} V(x\sin^2 x, [0, n\pi])$.

IX.1.15. Пусть $f \in \mathbf{BV}([a, b])$. Доказать, что $f \in \mathbf{R}([a, b])$.

IX.1.16*. Доказать, что

1) $\forall \alpha \in (0, 1) \ : \ \mathbf{Lip}_\alpha([0, 1]) \cap \mathbf{BV}[(0, 1]) \neq \varnothing$;

2) $\exists f \in \mathbf{C}([0, 1]) \cap \mathbf{BV}([0, 1]) \quad \forall_\alpha \in (0, 1) \ : \ f \notin \mathbf{Lip}_\alpha(0, 1])$.

IX.1.17. Пусть $\{f, g\} \subset \mathbf{BV}([a, b])$. Доказать, что

1) $\forall c \in \mathbf{R} \ : \ V(cf, [a, b]) = |c|\,V(f, [a, b])$;

2) $V(f+g, [a, b]) \leqslant V(f, [a, b]) + V(g, [a, b])$;

3) $V(|f|, [a, b]) \leqslant V(f, [a, b])$;

4) $V(fg, [a, b]) \leqslant V(f, [a, b]) \sup\limits_{[a, b]} |g| + \sup\limits_{[a, b]} |f|\,V(g, [a, b])$;

5) $V\left(\frac{f}{g}, [a, b]\right) \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\left(V(f, [a, b]) \sup\limits_{[a,b]} |g| + \sup\limits_{[a,b]} |f|\,V(g, [a, b])\right)$,

если дополнительно

$$\exists\alpha>0 \quad \forall x\in[a, b] \ : \ f(x)\geqslant\alpha.$$

IX.1.18. Пусть $\{f, g\}\subset \mathbf{BV}([a, b])$,

$$h(x):=\max(f(x), g(x)), \quad x\in[a, b].$$

Доказать, что $h\in\mathbf{BV}([a, b])$.

IX.1.19. Доказать, что суперпозиция функций ограниченной вариации не обязательно есть функция ограниченной вариации.

IX.1.20. Пусть $f: [a, +\infty)\to\mathbf{R}$, $\forall b>a : f\in\mathbf{BV}([a, b])$ и пусть

$$V(f, [a, +\infty)):=\lim_{b\to+\infty}V(f, [a, b])\leqslant+\infty.$$

Доказать, что неравенство $V(f, [a, +\infty))<+\infty$ влечет существование конечного предела

$$\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

IX.1.21. Для функции $f\in\mathbf{BV}([0, 1])$ доказать неравенство

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n}V(f, [0, 1]), \ n\in\mathbf{N}.$$

IX.1.22. Для $f\in\mathbf{BV}([a, b])$ пусть $g(a):=0$ и

$$g(x):=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(u)\,du, \quad x\in(a, b].$$

Доказать, что $g\in\mathbf{BV}([a, b])$.

IX.1.23. Пусть $f\in\mathbf{BV}([a, b])\cap C([a, b])$. Доказать, что f можно представить в виде разности двух непрерывных и монотонно неубывающих на отрезке $[a, b]$ функций.

IX.1.24. Для функции $f\in\mathbf{BV}([a, b])$ пусть

$$F(a):=0; \quad F(x):=V(f, [a, x]), \quad x\in(a, b].$$

Определить функцию F, если

1) $f(x)=|x|, \quad a=-1, \ b=1;$
2) $f(x)=\sin x, \quad a=0, \ b=2\pi;$
3) $f(x)=|\sin x|, \quad a=0, \ b=2\pi;$
4) $f(x)=x-[x], \quad a=0, \ b=3;$
5) $f(x)=x-x^2, \quad a=-1, \ b=1.$

IX.1.25. Представить в виде разности монотонно неубывающих функций

1) $f(x)=x^2, \quad x\in[-1, 1];$

2) $f(x) = x^3 - |x|$, $x \in [-1, 1]$;

3) $f(x) = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

IX.1.26. Пусть $f \in \mathbf{C}^1([a, b])$. Доказать, что

$$\frac{d}{dx} V(f, [a, x]) = |f'(x)|, \quad x \in [a, b].$$

§ 2. ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

IX.2.1. Определить нижний и верхний интегралы Стилтьеса функции f относительно монотонно неубывающей функции α, если

1) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0]; \\ 1, & x \in (0, 1], \end{cases}$ $\quad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0]; \\ 1, & x \in (0, 1]; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}; \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbf{Q}; \end{cases}$

3) $f(x) = x$, $\alpha(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.

IX.2.2. Пусть $\{f, g\} \subset \mathbf{RS}(\alpha, [a, b])$. Доказать, что каждая из функций cf $(c \in \mathbf{R})$, $f + g$, fg, $|f|$ также принадлежит классу $\mathbf{RS}(\alpha, [a, b])$.

IX.2.3. Функция α монотонно не убывает на $[a, b]$. Доказать, что

$$\left(\forall f \in \mathbf{C}([a, b]) \ : \ \int_a^b f d\alpha = 0\right) \Leftrightarrow \alpha(b) = \alpha(b).$$

IX.2.4. Пусть $f \in \mathbf{C}([a, b])$, α монотонно не убывает на $[a, b]$. Доказать, что

$$\exists \theta \in [a, b] \ : \ \int_a^b f d\alpha = f(\theta)(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

IX.2.5. Функция α монотонно не убывает на $[0, \pi]$ и

$$\int_0^\pi \sin x d\alpha(x) = \alpha(\pi) - \alpha(0).$$

Доказать, что

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(0), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \\ \alpha(\pi), & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]. \end{cases}$$

IX.2.6. Функция α монотонно не убывает на $[0, 2]$ и такова, что

$$\forall f \in \mathbf{C}([0, 2]) \ : \ \int_0^2 f(x) d\alpha(x) = f(1).$$

Доказать, что

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(0), & x \in [0, 1); \\ \alpha(2), & x \in (1, 2], \end{cases}$$

причем $\alpha(2) - \alpha(0) = 1$.

IX.2.7. Функция α монотонно не убывает на $[0, 1]$ и такова, что

$$\forall f \in \mathbf{C}([0, 1]) \quad : \quad \int_0^1 f(x)\, d\alpha(x) = f(0) + 2f(1).$$

Доказать, что

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(0), & x = 0; \\ \alpha(0) + 1, & x \in (0, 1); \\ \alpha(0) + 2, & x = 1. \end{cases}$$

IX.2.8. Функция α монотонно не убывает на $[0, 1]$ и такова, что для некоторого $n \in \mathbf{N}$

$$\forall f \in \mathbf{C}([0, 1]) \quad : \quad \int_0^1 f(x)\, d\alpha(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Определить вид функции α.

IX.2.9. Определить монотонно неубывающую на $[0, 1]$ функцию α, для которой

$$\int_0^1 x(1 - x)\, d\alpha(x) = 0,$$

$$\int_0^1 x\, d\alpha(x) = \frac{1}{3}(\alpha(1) - \alpha(0)).$$

IX.2.10. Функция $f \in \mathbf{C}([a, b])$ такова, что для любой монотонно неубывающей на $[a, b]$ функции α справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Найти функцию f.

IX.2.11. Пусть $f \in \mathbf{C}([a, b])$, $\alpha \in \mathbf{C}([a, b])$ и монотонно не убывает на отрезке $[a, b]$. Положим

$$F(x) := \int_a^x f(u)\, d\alpha(u), \quad x \in [a, b].$$

Доказать, что $F \in \mathbf{C}([a, b]) \cap \mathbf{BV}([a, b])$.

IX.2.12. Если последовательность $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset \mathrm{C}([a, b])$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции f, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

где α — монотонно неубывающая на $[a, b]$ функция.

IX.2.13. Пусть α — монотонно неубывающая на $[0, 1]$ функция. Вычислить предел

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^n d\alpha(x)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 (x^n + 2^{-nx})\, d\alpha(x)$.

IX.2.14. Определить монотонно неубывающую на $[0, 2]$ функцию α, для которой

$$\forall f \in \mathbf{C}([0,\ 2]) \quad : \quad \int\limits_0^2 f(x)\, d\alpha(x) = f(0) + \int\limits_0^1 f(x)\, dx.$$

IX.2.15. Определить монотонно неубывающую на $[a, b]$ функцию α, для которой

$$\forall f \in \mathbf{C}([a,\ b]) \quad : \quad \int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x) = 0.$$

IX.2.16. Определить монотонно неубывающую на $[a, b]$ функцию α, для которой

$$\forall n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \quad : \quad \int\limits_a^b x^n d\alpha(x) = 0.$$

IX.2.17. Определить монотонно неубывающую на $[0, 1]$ функцию α, для которой

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad \int\limits_0^1 x^n d\alpha(x) = 0.$$

IX.2.18. Пусть $\{f, \varphi\} \in \mathbf{C}([a, b])$, $\varphi(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, и α — монотонно неубывающая на $[a, b]$ функция. Положим

$$\beta(x) := \int\limits_a^x \varphi(u)\, d\alpha(u), \quad x \in [a,\ b].$$

Доказать, что функция β монотонно не убывает на $[a, b]$ и выполняется равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\beta(x) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\, d\alpha(x).$$

IX.2.19. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ в следующих случаях:

1) $f(x) = x$, $\alpha(x) = \sin x$, $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x) = x$, $\alpha(x) = |x|$, $x \in [-1,\ 1]$;

3) $f(x) = x$, $x \geqslant 1$; $\alpha(x) = n$, $x \in (n-1, n]$, $n \geqslant 1$; $a = 1$, $b = N \in \mathbf{N}$;
4) $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$; $\alpha(x) = (-1)^n$, $x \in [n, n+1)$, $n \geqslant 0$; $a = 0, b = N \in \mathbf{N}$;
5) $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$; $\alpha(x) = x^2 \tilde{\alpha}(x)$, где $\tilde{\alpha}$ — функция из примера 4); $a = 0$, $b = N$;
6) $f(x) = 1 + x$, $\alpha(x) = x^2 \operatorname{sign}(\sin \pi x)$, $x \in \mathbf{R}$; $a = 0$, $b = 2N$, $N \in \mathbf{N}$.

§ 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВАМ V—IX

IX.3.1. Пусть для $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = h(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$$

и $f(0) = 0$, $g(0) = \frac{1}{2}$, $h(0) = 0$. Доказать, что функции f и g имеют примитивную на $\mathbf{R}$, а для функции h не существует примитивной на $\mathbf{R}$.

IX.3.2. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что функция f имеет примитивную на $[0, +\infty)$.

IX.3.3. Пусть $m \in \mathbf{N}$. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{m+1} m^m} \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (km + j).$$

IX.3.4. Функция $f \in R([0, 1])$ и удовлетворяет соотношению

$$\forall x \in [0, 1] \quad : \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

Пусть $f(0) = 1$. Определить функцию f.

IX.3.5. Определить функцию $f \in C^2(\mathbf{R})$, для которой

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad \int_0^x u f(u)\, du = f(x) + x f'(x).$$

IX.3.6. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n} = \int_0^1 \ln x\, dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \ln x\, dx = -1.$$

С помощью этого равенства доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}.$$

IX.3.7. Доказать, что функция

$$f(x) = \int_1^x \frac{1+u}{u}\, du, \quad x \geqslant 1,$$

не является рациональной на $[1, +\infty)$ (рациональная на множестве A функция равна отношению двух многочленов на множестве A).

IX.3.8. Функция f возрастает на (a, b) и $c \in (a, b)$. Доказать, что функция

$$F(x) := \int_c^x f(u)\,du, \quad x \in (a, b),$$

выпукла вниз на (a, b).

IX.3.9. Пусть функция $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и положительна на $[0, 1]$. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует значение $\theta(n)$, для которого

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\theta(n)} f(x)\,dx + \int_{1-\theta(n)}^1 f(x)\,dx.$$

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}(n\,\theta(n))$.

IX.3.10*. Пусть

$$D = \left\{ f \in \mathbf{R}([0, 1]) \mid \int_0^1 f(x)\,dx = L, \ \int_0^1 xf(x)\,dx = M \right\},$$

где L, M — заданные числа. Найти

$$\min_{f \in D} \int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

IX.3.11*. Пусть

$$D = \{ f \in \mathbf{C}^2([0, 1]) \mid f(0) = f(1) = 0, \ f'(0) = a \},$$

где число $a \in \mathbf{R}$ фиксировано. Найти

$$\min_{f \in D} \int_0^1 (f''(x))^2\,dx$$

и функцию, доставляющую минимум.

IX.3.12. Пусть $f \in \mathbf{C}([a, b])$ и

$$\forall n \geqslant 0 : \int_a^b x^n f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

IX.3.13. Пусть $f \in \mathbf{C}([-1, 1])$ и

$$\forall n \geqslant 0 : \int_{-1}^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что f нечетна на $[-1, 1]$.

IX.3.14. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и

$$\forall n \geqslant 0 : \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$.

IX.3.15. Пусть $f \in \mathbf{C}([-1, 1])$ и

$$\forall n \geqslant 0 : \int_{-1}^{1} x^{2n+1} f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что f четна на $[-1, 1]$.

IX.3.16. Пусть $f \in \mathbf{C}([a, b])$ и

$$\forall n \geqslant 1 : \int_{a}^{b} x^{3n} f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

IX.3.17. Пусть $f \in \mathbf{C}([-1, 1) \cup (1, 2])$, существуют $f(1+)$ и $f(1-) =: f(1)$,

$$\forall n \geqslant 0 : \int_{-1}^{2} x^{2n} f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что f нечетна на $[-1,1]$ и $f(x) = 0$ для $x \in (0, 1]$.

IX.3.18. Пусть $f \in \mathbf{C}([a, b])$ и

$$\forall g \in \mathbf{C}([a, b]) : \int_{a}^{b} f(x)\,g(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

IX.3.19. Пусть $f \in \mathbf{C}([a, b])$ и

$$\forall n \geqslant 0 : \int_{a}^{b} e^{nx} f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

IX.3.20. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и неотрицательна на $[0, 1]$ и

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \exists \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall n \geqslant 1 : \int_{0}^{1} e^{nx} f(x)\,dx \leqslant c n^{\alpha}.$$

Доказать, что $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$.

IX.3.21. Функции f, g монотонно не убывают на $[0, a]$, $a > 0$. Доказать неравенство

$$\int_{0}^{a} f(x)\,g(x)\,dx \geqslant \int_{0}^{a} f(a-x)\,g(x)\,dx,$$

рассмотреть геометрическую интерпретацию.

IX.3.22. Пусть $f \in \mathbf{C}^1([0, +\infty))$, строго возрастает на $[0, 1]$ и $f(0) = 0$. Пусть g — функция, обратная к f. Тогда для любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ справедливо **неравенство Юнга**

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} g(x)\,dx \geqslant ab,$$

причем знак равенства возможен только при $b = f(a)$. Доказать это утверждение и дать геометрическую интерпретацию.

IX.3.23. Пусть $p > 1$ и q таковы, что $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда

$$\forall \{a, b\} \subset \mathbf{R} \ : \ |ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

IX.3.24. Вычислить предел

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\int_0^{x} e^{u^n} du \right)^{\frac{1}{x^n}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

IX.3.25. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^2 \ln \left(x + \frac{x^5}{n} \right) dx.$$

IX.3.26. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{(k+1)\, n^k}.$$

IX.3.27. Функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ периодична на $\mathbf{R}$ с периодом 1 и

$$f \in \mathbf{R}([0, 1]), \quad \int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

Доказать, что

$$\forall \{a, b\} \subset \mathbf{R},\ a < b \quad \forall \lambda > 0 \ : \ \left| \int_a^b f(\lambda x)\, dx \right| \leqslant \frac{2}{\lambda} \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

IX.3.28. Для $f \in \mathbf{R}([0, 1])$ пусть

$$a_k := \int_0^1 x^k f(x)\, dx, \quad k \geqslant 1.$$

Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ и найти его сумму.

IX.3.29. Функция $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и положительна на $[0, 1]$. Пусть

$$F(\alpha) := \int_0^1 f(x)^{\alpha}\, dx, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Вычислить предел $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\ln F(\alpha)}{\alpha}$.

IX.3.30*. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 2\pi])$ и

$$(\sin x)_+ = \frac{1}{2} (\sin x + |\sin x|), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Доказать равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} f(x) (\sin nx)_+\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

X.3.31*. Пусть $a > 1$. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \{x^a\} \sin x dx,$$

где $\{c\} = c - [c]$.

IX.3.32. Доказать, что

$$\int_0^x \sqrt[3]{u^3+1}\, du = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty.$$

IX.3.33. Доказать, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{4/5}}$.

IX.3.34. Пусть $m \in \mathbf{N}$ фиксировано. Доказать, что

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall N \geqslant 1 \quad : \quad \left| \sum_{n=1}^{N} n^m \sin(1 + n\sqrt{2}) \right| \leqslant cN^m.$$

IX.3.35*. Пусть $a > 1$. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\varepsilon n^a} = \frac{c}{\varepsilon^{\frac{1}{a}}} + o\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{a}}}\right), \quad \varepsilon \to 0+$$

с некоторым числом c. Определить c при $a = 2$.

IX.3.36. Числа a_n, $n \geqslant 1$, отличны от 0 и таковы, что

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \to 1, \quad n \to \infty.$$

Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

IX.3.37. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что $na_n \to 0$, $n \to \infty$.

IX.3.38. Функция $f \in C^1([0, +\infty))$, неотрицательна на $[0, +\infty)$ и

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall a > 0 \quad : \quad \int_0^a |f'(x)|\, dx \leqslant c.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\, dx.$$

IX.3.39. Функция $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ неотрицательна на $[0, +\infty)$ и $V(f, [a, +\infty)) < +\infty$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)\,dx.$$

IX.3.40. Пусть $\{a_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится для любой последовательности чисел $\{b_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$, для которой $\sqrt[n]{|b_n|} \to 0$, $n \to \infty$, тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \geqslant 1\}$ ограничена.

IX.3.41. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+a)^2}{n!}$, $a \in \mathbf{R}$.

IX.3.42. Пусть $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и для $n \geqslant 2$

$$(n-1)\,a_n - (n-2)\,a_{n-1} - a_{n-2} = 0.$$

Доказать сходимость последовательности $\{a_n : n \geqslant 0\}$ и найти ее предел.

IX.3.43. Определить множество значений $x \in \mathbf{R}$, для которых сходится произведение

1) $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + (x-2)^{2n})$; 2) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{n}$;

3) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\cos^2\frac{x}{n} - \sin^2\frac{x}{n}\right)$; 4) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x^n}{n!}$, $x \in (-1, 1)$;

5) $\prod_{n=2}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{n^2}\right)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

IX.3.44. Показать, что произведение $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{2^n}\right) = p(x)$ сходится на $\mathbf{R}$ и что его значение удовлетворяет неравенству

$$p(x) \leqslant (1 + x^2)\,e^{x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

IX.3.45*. Пусть $f_1(x) = 0$, $x \in [0, 1]$, и для $n \in \mathbf{N}$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n^2(x)), \quad x \in [0, 1].$$

Доказать, что последовательность функций $\{f_n : n \geqslant 1\}$ сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$ к функции $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

IX.3.46*. Пусть $\{f_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность выпуклых вниз на отрезке $[a, b]$ функций, сходящаяся поточечно на $[a, b]$ к функции $f \in \mathbf{C}([a, b])$. Доказать, что f выпукла вниз на $[a, b]$ и что сходимость последовательности $\{f_n : n \geqslant 1\}$ равномерна на $[a, b]$.

IX.3.47. Пусть $\{x_n \mid n \geqslant 1\}$ — занумерованные каким-либо способом числа $(0, 1) \cap \mathbf{Q}$ и

$$f(0) := 0; \quad f(x) := \sum_{n\,:\,x_n < x} \frac{1}{2^n}, \quad x \in (0, 1].$$

Доказать, что $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 - x_n}{2^n}$.

IX.3.48. Пример Ван дер Вардена непрерывной нигде недифференцируемой функции. Пусть g — периодична с периодом 1 и

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 1 - x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Доказать, что функция

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(x2^n), \quad x \in \mathbf{R},$$

непрерывна на $\mathbf{R}$ и ни в одной точке $\mathbf{R}$ не имеет производной.

IX.3.49*. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1])$. Доказать, что для $x \in [0, 1]$ справедливо соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int\limits_0^1 e^{-nk(x-u)} f(u)\,du = \int\limits_0^x f(u)\,du.$$

IX.3.50*. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и такова, что

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall n \geqslant 1 \ : \ \left| \int\limits_0^1 e^{nx} f(x)\,dx \right| \leqslant c.$$

Доказать, что $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$.

IX.3.51. Аналог теоремы Дини. Предположим, что числа $\{a_{nm} \mid n \in \mathbf{N}, \ m \in \mathbf{N}\}$ неотрицательны и удовлетворяют следующим условиям:

1) $\forall m \geqslant 1 \ : \ a_{nm} \to a_m, \ n \to \infty$;

2) $\forall n \geqslant 1 \ :$ ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm}$ сходится;

3) ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ сходится;

4) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm} \to \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m, \ n \to \infty$.

Доказать, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm}$, $n \in \mathbf{N}$ сходится равномерно на $\mathbf{N}$.

IX.3.52. Доказать, что последовательность чисел $\{a_n : n \geqslant 0\}$ есть последовательность коэффициентов степенного ряда с радиусом сходимости $+\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

IX.3.53*. Функция f есть сумма степенного ряда с радиусом сходимости $r > 0$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x^{-n-1} f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > \frac{1}{r}$$

для некоторого $n \in \mathbf{N}$ и условиям

$$f^{(k)}(0) = 1, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Определить функцию f.

IX.3.54*. Пусть числа $a_0 > 0$; $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, таковы, что для $A_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ справедливы следующие соотношения:

1) $A_n \to +\infty$, $n \to \infty$; 2) $\dfrac{a_n}{A_n} \to 0$, $n \to \infty$.

Доказать, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости 1.

IX.3.55. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$, $x \in (-1, 1)$, найти $f^{(n)}(0)$, $n \geqslant 1$.

IX.3.56. Определить сумму ряда

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(m+n)!}, \quad x \in \mathbf{R},$$

для $m \in \mathbf{N}$.

IX.3.57. Доказать следующие неравенства:

1) $0 < \operatorname{sh} x - x < \dfrac{x^2}{6} \operatorname{sh} x$, $x > 0$;

2) $0 < \operatorname{ch} x - 1 < \dfrac{x^2}{2} \operatorname{ch} x$, $x \neq 0$;

3) $0 < \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} - x < x^2 \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (0, 1)$;

4) $\operatorname{ch} x \leqslant e^{\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbf{R}$.

IX.3.58*. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} |\cos^n z + \cos^n (z+i) + \cos^n (z+3i)|^{\frac{1}{n}},$$

где $z = a + ib$, $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$, $b > 0$.

IX.3.59. Найти сумму ряда для $x \in \mathbf{R}$

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos (2n+1) x}{(2n+1)!}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2nx}{(2n)!}$.

IX.3.60*. Пусть $a_n \in \mathbf{C}$, $\lambda_n \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 1$. Предположим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in \mathbf{C},$$

сходится абсолютно в некоторых точках $z_1, z_2, \ldots, z_m$ плоскости $\mathbf{C}$. Доказать, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно на замкнутом выпуклом многоугольнике, натянутом на точки $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

IX.3.61. Пусть $f \in \mathbf{C}^{n}([a, b])$. Доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P = P_\varepsilon$ такой, что

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)| < \varepsilon.$$

Глава X

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

X.1.1. Пусть d: $X \times X \to [0, +\infty)$. Является ли d метрикой (расстоянием) на X, где

$$X = \mathbf{R},$$

1) $d(x, y) = \sqrt{|x-y|}$;

2) $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

3) $d(x, y) = |x-y|^2$;

4) $d(x, y) = \min(1, |x-y|)$;

5) $d(x, y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$;

6)* $d(x, y) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$;

$\{x, y\} \subset \mathbf{R}$;

$$X = \mathbf{R}^2,$$

7) $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + 2|x_2 - y_2|$;

8) $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + 4(x_2-y_2)^2}$;

9) $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|)$;

$$\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} \subset \mathbf{R}^2;$$

$$X = \mathbf{R}^m, \quad m \in \mathbf{N},$$

10) $d((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}$;

11) $d((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \max\limits_{1 \leq k \leq m} |x_k - y_k|$;

12) $d((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k - y_k|$;

13) $d((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = |x_1 - y_1| + \sqrt{\sum\limits_{k=2}^{m} (x_k - y_k)^2}$;

14) $d((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \frac{(x_k - y_k)^2}{k^2}}$;

$$\{(x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)\} \subset \mathbf{R}^m;$$

$$X = \mathbf{l}_2 := \left\{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty\right\},$$

15) $d((x_1, \ldots, x_n, \ldots), (y_1, \ldots, y_n, \ldots)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$;

16) $d((x_1, \ldots, x_n, \ldots), (y_1, \ldots, y_n, \ldots)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x_k - y_k)^2}$;

17) $d((x_1, \ldots, x_n, \ldots), (y_1, \ldots, y_n, \ldots)) = \sup\limits_{k \geqslant 1} |x_k - y_k|$;

18) $d((x_1, \ldots, x_n, \ldots), (y_1, \ldots, y_n, \ldots)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x_k - y_k)^2}$,

где $\alpha_k \in [0, 1]$, $k \geqslant 1$;

$$\{(x_1, \ldots, x_n, \ldots), (y_1, \ldots, y_n, \ldots)\} \subset \mathbf{l}_2;$$

$$X = \mathbf{C}([a, b]),$$

19) $d(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$;

20) $d(x, y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$;

21) $d(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} (e^t |x(t) - y(t)|)$;

22) $d(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} ((t - a)|x(t) - y(t)|)$;

23) $d(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant c} |x(t) - y(t)| + \int\limits_c^b |x(t) - y(t)|\, dt$,

где $c = \frac{1}{2}(a + b)$;

$$\{x, y\} \subset \mathbf{C}([a, b]);$$

$$X = \mathbf{C}_b(\mathbf{R}) := \{x \in \mathbf{C}(\mathbf{R}) \mid \sup_{t \in \mathbf{R}} |x(t)| < +\infty\},$$

24) $d(x, y) = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |x(t) - y(t)|$;

25) $d(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max(|x(t) - y(t)| \mid |t| \leqslant n)$;

$$\{x, y\} \subset \mathbf{C}_b(\mathbf{R}); \quad X = \mathbf{C}^1([a, b]),$$

26) $d(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t) - y'(t)|$;

27) $d(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t) - y'(t)|$;

28) $d(x, y) = |x(a) - y(a)| + \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t) - y'(t)|$;

29) $d(x, y) = |x(a) - y(a)| + \left(\int\limits_a^b [x'(t) - y'(t)]^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$;

$$\{x, y\} \subset \mathbf{C}^1([a, b]);$$

$X = P_n([a, b])$, где $P_n([a, b])$ — множество всех многочленов с действительными коэффициентами степени не более n, рассматриваемых на $[a, b]$,

30) $d(p, q) = \sum\limits_{k=0}^{n} |p_k - q_k|$,

где
$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k t^k, \quad q(t) = \sum_{k=0}^{n} q_k t^k, \quad t \in [a, b];$$

$X = \mathbf{BV}_+([a, b])$ — множество всех функций ограниченной вариации и непрерывных справа на $[a, b]$,

31) $d(x, y) = |x(a) - y(a)| + V(x - y, [a, b])$, $\{x, y\} \subset X$;

(X, ρ) — метрическое пространство,

32) $d(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)}$;

33) $d(x, y) = \min(1, \rho(x, y))$;

34) $d(x, y) = \rho^2(x, y)$;

$$\{x, y\} \subset X;$$

X — произвольное непустое множество,

35) $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$ $\{x, y\} \subset X$;

X — множество всех действительных функций на $\mathbf{R}$, отличных от 0 не более, чем в счетном числе точек, причем, если функция x отлична от 0 для значений $\{t_k : k \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^2(t_k) < +\infty;$$

36) $d(x, y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x(t_k) - y(t_k))^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\{t_k : k \geqslant 1\}$ — последователь-

...всех точек, в которых отлична от 0 хотя бы одна из функций ... из X?

X.1.2. В метрическом пространстве (X, d) каждого из примеров 7) — 9) задачи X.1.1 изобразить шары $B((0, 0), 1)$, $\bar{B}((3, 1), 1)$ и сферу $S((0, 0), 2)$.

X.1.3. В метрическом пространстве $\mathbf{C}([0, 1])$ с равномерной метрикой ρ описать множества

$$B\left(x_1, \frac{1}{2}\right), \quad \bar{B}\left(x_1, \frac{1}{2}\right), \quad S\left(x_1, \frac{1}{2}\right), \quad \bar{B}\left(x_1, \frac{1}{2}\right) \cap \bar{B}\left(x_2, \frac{1}{2}\right),$$

$$B\left(x_3, \frac{1}{8}\right) \cap B\left(x_4, \frac{1}{8}\right), \quad \bar{B}\left(x_3, \frac{1}{2}\right) \cap \bar{B}\left(x_5, \frac{1}{2}\right),$$

где $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 0$, $x_3(t) = t$, $x_4(t) = 1 - t$, $x_5(t) = \frac{1}{2}$, $t \in [0, 1]$.

X.1.4. Пусть (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$, — метрические пространства,

$$X = X_1 \times X_2,$$

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)}$$

для $\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} \subset X$. Доказать, что (X, ρ) — метрическое пространство. Доказать также, что

1) $\forall (x_1, x_2) \in X \quad \forall \{r_1, r_2\} \subset (0, +\infty) \quad \exists r > 0$:

$B((x_1, x_2), r) \subset B(x_1, r_1) \times B(x_2, r_2)$;

2) $\forall (x_1, x_2) \in X \quad \forall r > 0 \quad \exists r_1 > 0 \quad \exists r_2 > 0$:

$B(x_1, r_1) \times B(x_2, r_2) \subset B((x_1, x_2), r)$.

Дать геометрическую интерпретацию утверждений 1) и 2) для $X_1 = X_2 = \mathbf{R}$, $\rho_1 = \rho_2$ есть обычное расстояние на $\mathbf{R}$.

X.1.5. Задача X.1.4 для

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)).$$

X.1.6. Пусть $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ и ρ — евклидова метрика на X. Изобразить шары $B((1, 0), 1)$, $B\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; проверить, что $B((1, 0), 1) \subset B\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

X.1.7. Описать все сходящиеся последовательности пространства (X, d) задачи X.1.1, 35).

X.1.8. Доказать, что сходимость последовательности в метрическом пространстве $(\mathbf{R}^m, d)$ с каждой из метрик 10) — 14) задачи X.1.1 равносильна покоординатной сходимости.

X.1.9. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство из задачи X.1.4 либо из задачи X.1.5. Доказать, что

$$(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \to (x_1, x_2), \ n \to \infty, \text{ в } (X, \rho) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i^{(n)} \to x_i, \ n \to \infty, \text{ в } (X_i, \rho_i) \text{ для каждого } i = 1, 2.$$

X.1.10. Сходимость последовательности функций в метрическом пространстве $(\mathbf{C}([a, b]), \rho)$ с равномерной метрикой ρ равносильна равномерной на $[a, b]$ сходимости этой последовательности.

X.1.11. Охарактеризовать сходимость последовательности в пространстве $(\mathbf{C}([a, b]), d)$, введенном в задаче X.1.1, 21).

X.1.12. Доказать, что последовательность $\{x_n : n \geqslant 1\}$ сходится к x в пространстве $(\mathbf{C}([a, b]), d)$ из задачи X.1.1, 22) тогда и только тогда, когда

1) для любого $\varepsilon \in (0, b-a)$ последовательность $\{x_n : n \geqslant 1\}$ сходится равномерно на $[a+\varepsilon, b]$ к x;

2) $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant a+\varepsilon} (t-a)|x_n(t)| \to 0, \ n \to \infty.$

Обратить внимание на то, что при выполнении условия 2) возможно, что $x_n(a) \to +\infty, \quad n \to \infty$.

X.1.13. Доказать, что сходимость последовательности

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots) \in \mathbf{l}_2, \quad n \geqslant 1,$$

к элементу $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in \mathbf{l}_2$ равносильна:

1) для метрики d из X.1.1, 5) покоординатной сходимости и выполнению условия

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m \geqslant N \quad \forall n \geqslant 1 \quad : \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2 < \varepsilon;$$

2) для метрики d из X.1.1, 16) покоординатной сходимости и выполнению условия

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m \geqslant N \quad \forall n \geqslant 1 \quad : \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|x_k^{(n)}|}{k} < \varepsilon.$$

X.1.14. Охарактеризовать сходимость последовательности в пространстве $\mathbf{C}_b(\mathbf{R})$ с метриками d из X.1.1, 24), 25).

X.1.15. Охарактеризовать сходимость последовательности в пространстве $\mathbf{C}^1([a, b])$ с метриками из задачи X.1.1, 27), 28).

X.1.16. Проверить, что сходимость в пространстве, введенном в задаче X.1.1, 30), равносильна равномерной на $[a, b]$ сходимости.

X.1.17. Пусть $x_n \to x, \ n \to \infty$, в (X, ρ). Доказать, что

1) множество чисел $\{\rho(x_n, x_m) \mid n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}\}$ ограничено;

2) $\forall y \in X \quad : \quad \rho(x_n, y) \to \rho(x, y), \ n \to \infty$;

3) $\forall A, \ A \subset X, \ A \neq \varnothing \quad : \quad \rho(x_n, A) \to \rho(x, A), \ n \to \infty$,

где для $y \in X$

$$\rho(y, A) := \inf \{\rho(y, z) \mid z \in A\}.$$

X.1.18. Множество $A \subset X$ метрического пространства (X, d) называется **ограниченным**, если диаметр множества A

$$d(A) := \sup_{x \in A, y \in A} d(x, y) < +\infty.$$

...ть следующие утверждения:

1) множество A ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре;

2) для любых $x \in X$ и $r > 0$

$$d(\overline{B}(x, r)) \leqslant 2r;$$

привести пример пространства, точки x и числа $r > 0$, для которых

$$d(\overline{B}(x, r)) < 2r.$$

3) сходящаяся последовательность ограничена.

X.1.19. Пусть A множество точек пространства задачи X.1.1, 35). Какие точки множества A являются предельными для множества A?

X.1.20. Пусть $x_n \to x$, $n \to \infty$, в (X, ρ). При каком условии точка x есть предельная точка множества $\{x_1, x_2, \dots\}$ — множества значений последовательности?

X.1.21. Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$. Определить множества: A' — предельных точек, A° — внутренних точек, $\overline{A}$ — замыкание множества A, если

$$X = \mathbf{R};\quad d(x, y) = |x - y|,\quad \{x, y\} \subset \mathbf{R}$$

1) $A = [0, 1) \cup \{2\}$;

2) $A = \mathbf{Q}$;

3) $A = \left\{\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^n} \;\middle|\; m \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{N}\right\}$;

4)* $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{N}\}$;

5)* $A = \{\sin n \mid n \in \mathbf{N}\}$;

$$X = \mathbf{R}^2,\ d \text{ — евклидово расстояние},$$

6) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$;

7) $A = \{(x_1, x_2)\} \mid x_2 = rx_1^2,\ r \in \mathbf{Q}\}$;

8) $A = \left\{\left(\frac{m}{n}, \frac{n}{m}\right) \;\middle|\; m \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{N}\right\}$;

9) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$;

$$X = C([a, b]),\quad \rho \text{ — равномерная метрика},$$

10) $A = \{x \mid \forall t \in [a, b] : x(t) > t\}$;

11) A — множество всех многочленов, рассматриваемых на $[a, b]$;

12) $A = \left\{x \;\middle|\; \int_a^b x(t)\,dt > 0\right\}$.

X.1.22. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\overline{B}(x, r) := \{y \mid d(x, y) \leqslant r\}$ для $x \in X$ и $r > 0$, $C(x, r)$ — замыкание $B(x, r) := \{y \mid d(x, y) < r\}$. Проверить, что $C(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$. Привести

пример пространства, точки x и числа $r > 0$, для которых

$$C(x, r) \neq \overline{B}(x, r).$$

X.1.23. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, введенное в задаче X.1.4. Доказать для $A_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, следующие утверждения.

1) $x_1 \in \overset{\circ}{A_1}$ и $x_2 \in \overset{\circ}{A_2}$ $\Leftrightarrow$ $(x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2)^\circ$, то есть $(A_1 \times A_2)^\circ = \overset{\circ}{A_1} \times \overset{\circ}{A_2}$;

2) если x_1 — предельная точка A_1 и x_2 — предельная точка A_2, то (x_1, x_2) — предельная точка $A_1 \times A_2$; обратное утверждение неверно;

3) $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$.

X.1.24. Доказать, что в пространстве задачи X.1.1, 35) любое множество открыто и замкнуто.

X.1.25. Пусть A — открытое множество в пространстве (X, ρ) и $x_1, \ldots, x_n$ — элементы из X. Доказать, что множество $A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ — открыто. Можно ли обобщить это утверждение на случай счетного набора элементов $\{x_n : n \geqslant 1\}$?

X.1.26. Проверить, что множество $[0, 1)$ открыто в метрическом пространстве $([0, +\infty), \rho)$, $\rho(x, y) = |x - y|$.

X.1.27. При условиях задачи X.1.4 пусть $A_i \subset X_i$, $i = 1, 2$. Доказать, что $A_1 \times A_2$ открыто в (X, ρ) тогда и только тогда, когда A_i открыто в (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$.

X.1.28. Пусть $X = \mathbf{R}^2$ с евклидовым расстоянием ρ, $A \subset \mathbf{R}^2$, $B \subset \mathbf{R}^2$ и

$$A + B := \{(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \mid (x_1, x_2) \in A, (y_1, y_2) \in B\}.$$

Доказать, что

1) если хотя бы одно из множеств A и B открыто, то $A + B$ открыто;

2) если оба множества замкнуты, то $A + B$ замкнуто.

X.1.29. Пусть (X, d) — метрическое пространство, A — замкнутое множество и $x \overline{\in} A$. Доказать, что $\rho(x, A) > 0$.

X.1.30. Пусть A — множество в пространстве (X, d). Доказать, что замыкание

$$\overline{A} = \{x \mid \rho(x, A) = 0\}.$$

Проверить также, что

$$\overline{A} = \{\bigcap F \mid F \text{ замкнуто и } F \supset A\}.$$

X.1.31. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Доказать, что следующие утверждения равносильны:

1) A — всюду плотно в (X, d);

2) A имеет непустое пересечение с любым открытым шаром;

3) $\overline{A} = X$;

4) $\forall x \in X \quad \exists \{x_n : n \geqslant 1\} \subset A : x_n \to x, n \to \infty$, в (X, d).

X.1.32. В каком случае пространство, введенное в задаче X.1.1, 3b), сепарабельно?

X.1.33. Декартово произведение (X, ρ) задачи X.1.4 сепарабельно тогда и только тогда, когда каждое из пространств (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$ сепарабельно.

X.1.34. Доказать, что метрическое пространство (X, d) сепарабельно тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетная ε-сеть для X.

X.1.35. Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство и $Y \subset X$. Доказать, что (Y, d) — сепарабельное метрическое пространство.

X.1.36. Какие из пространств, введенных в задаче X.1.1, сепарабельны?

X.1.37. Доказать, что классы открытых (замкнутых) множеств пространств, введенных в задаче X.1.1, 7) — 9), совпадают. Доказать, что классы открытых (замкнутых) множеств пространств, введенных в задаче X.1.1, 10)— 14), совпадают.

X.1.38. Пусть ρ — евклидова метрика в $\mathbf{R}^m$. Доказать, что любое семейство непустых открытых попарно не пересекающихся множеств в $\mathbf{R}^m$ не более чем счетно.

X.1.39. Доказать, что непустое открытое множество в сепарабельном метрическом пространстве есть объединение счетного семейства открытых шаров.

X.1.40. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и A — замкнутое множество в (X, d). Проверить, что (A, d) — полное метрическое пространство.

X.1.41. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Доказать следующие утверждения:

1) фундаментальная последовательность ограничена;

2) сходящаяся последовательность элементов (X, d) фундаментальна;

3) если последовательность $\{x_n : n \geqslant 1\}$ — фундаментальна, а $\{y_n : n \geqslant 1\}$ такова, что $d(x_n, y_n) \to 0$, $n \to \infty$, то $\{y_n : n \geqslant 1\}$ также фундаментальна; при этом $y_n \to y$, $n \to \infty$, в (X, d) тогда и только тогда, когда $x_n \to y$, $n \to \infty$, в (X, d); 4) для фундаментальной последовательности $\{x_n : n \geqslant 1\}$ и любого $y \in X$ числовые последовательности

$$\{d(x_n, x_{n+1}) \ : \ n \geqslant 1\}, \quad \{d(x_n, y) \ : \ n \geqslant 1\}$$

сходятся;

5) фундаментальная последовательность $\{x_n : n \geqslant 1\}$, которая содержит сходящуюся к x в (X, d) подпоследовательность $\{x_{n(k)} : k \geqslant 1\}$, сходится к x.

X.1.42. Пусть $\rho(x, y) = |x - y|$ для $\{x, y\} \subset \mathbf{R}$. Доказать, что

1) метрическое пространство $((0, 1), \rho)$ не является полным;

2) метрическое пространство $(\mathbf{Q}, \rho)$ не является полным.

X.1.43. Доказать, что декартово произведение (X, ρ), введенное в задаче X.1.4, полно тогда и только тогда, когда каждое из пространств (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$, полно.

X.1.44. Определить, какие из метрических пространств, введенных в задаче X.1.1, полны.

X.1.45. Построить пополнение пространств, введенных в задачах X.1.42 и X.1.1,2).

§ 2. ФУНКЦИИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

X.2.1. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $a \in X$ и $f(x) = d(x, a)$, $x \in X$. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на X.

X.2.2. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $A \subset X$ и $f(x) = d(x, A) = \inf(d(x, y) \mid y \in A)$. Доказать, что функция f равномерно непрерывна на X.

X.2.3. Пусть $(\mathbf{C}([0, 1]), \rho)$ — пространство непрерывных функций с равномерной метрикой ρ. Доказать равномерную непрерывность на $\mathbf{C}([0, 1])$ функции
$f\colon \mathbf{C}([0, 1]) \to \mathbf{C}([0, 1])$:

1) $f(x)(t) = \int\limits_0^t e^{tu} \sin(x(u))\, du, \quad t \in [0, 1];$

2) $f(x)(t) = \int\limits_0^1 \sin(1 + tx(u))\, du, \quad t \in [0, 1];$

3) $f(x)(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_0^1 x\left(\frac{tu}{n}\right) du, \quad t \in [0, 1]; \quad x \in \mathbf{C}([0, 1]).$

X.2.4. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Доказать, что функция $f\colon X \to \mathbf{R}$ принадлежит $\mathbf{C}(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $a \in \mathbf{R}$ множества

$$\{x \in X \mid f(x) < a\}, \quad \{x \in X \mid f(x) > a\}$$

открыты в (X, d).

X.2.5. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $X \times \mathbf{R}$ — декартово произведение с расстоянием, введенном в задаче X.1.4, $\mathbf{R}$ рассматривается с евклидовым расстоянием. Предположим, что функция $f\colon X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывна по каждой переменной при каждом фиксированном значении второй и монотонна по второй переменной при каждом фиксированном значении первой переменной. Доказать, что $f \in \mathbf{C}(X \times \mathbf{R})$.

X.2.6. Пусть (X, d) — метрическое пространство и

$$A = \{x \mid d(x, a) + d(x, b) < 1\}, \quad B = \{x \mid d(x, a)\, d(x, b) \geqslant 1\}$$

для фиксированных элементов a и b. Доказать, что множество A открыто, а множество B замкнуто.

X.2.7. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $A \subset X$ и для $\varepsilon > 0$

$$A^{\varepsilon} := \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\},$$

$$A^{\varepsilon]} := \{x \in X \mid d(x, A) \leqslant \varepsilon\}.$$

Доказать, что A^{ε} — открыто, $A^{\varepsilon]}$ — замкнуто и

$$A^{\varepsilon} = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon).$$

X.2.8. Доказать, что для замкнутого множества A

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^{\frac{1}{n}},$$

а для открытого множества A

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus (X \setminus A)^{\frac{1}{n}});$$

обратить внимание на то, что каждое множество $A^{\frac{1}{n}}$ открыто, а каждое множество $X \setminus (X \setminus A)^{\frac{1}{n}}$ замкнуто.

X.2.9. Пусть (X, d) — метрическое пространство, A и B — непересекающиеся замкнутые множества в (X, d). Доказать, что существуют открытые в (X, d) непересекающиеся множества G и H такие, что $A \subset G$, $B \subset H$.

X.2.10. Пусть (X, ρ), (Y, σ) — метрические пространства и $\{f, g\} \subset \subset \mathbf{C}(X, Y)$. Доказать, что множество $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ замкнуто в (X, ρ).

X.2.11. Доказать, что следующие множества открыты в $(\mathbf{R}^2, \rho)$, где ρ — евклидово расстояние:

1) $\{(x_1, x_2) \mid 2^{x_1} + x_1 x_2^3 < 1\}$;

2) $\left\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 x_2^5 - \dfrac{x_2}{1 + x_1^2} < 1\right\}$;

3) $\{(x_1, x_2) \mid e^{x_1 + x_2} > 1 + 13x_1 + x_2,\ x_1 - x_2 < 0\}$.

X.2.12. Какие из множеств

1) $\{x \in \mathbf{C}([a, b]) \mid x(a) \geqslant 0\}$;

2) $\left\{x \in \mathbf{C}([a, b]) \,\middle|\, \int\limits_a^b t \sin(x(t))\, dt < 1\right\}$;

3) $\{x \in \mathbf{C}([a, b]) \mid x(a) \leqslant 1,\ x(b) \geqslant 1\}$;

4) $\left\{x \in \mathbf{C}([a, b]) \mid \forall t \in [a, b] \quad \int\limits_a^t \sin(x(u))\, du > t\right\}$;

5) $\{x \in \mathbf{C}([a, b]) \mid \forall t \in A \quad x(t) = 0\}$,

где $A \subset [a, b]$, открыты (замкнуты) в $\mathbf{C}([a, b])$ с равномерной метрикой?

X.2.13. (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$,— метрические пространства, причем (X_2, ρ_2) — компактно и $X = X_1 \times X_2$ — их декартово произведение с расстоянием, введенным в задаче X.1.4. Пусть $f\colon X_1 \to X_2$. Доказать, что $f \in \mathbf{C}(X_1, X_2)$ тогда и только тогда, когда график

$$G(f) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, \ x_2 = f(x_1)\}$$

есть замкнутое множество в (X, ρ).

X.2.14. Доказать, что

$$\vec{f} \in \mathbf{C}(X, \mathbf{R}^m) \iff \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \ : \ f_i \in \mathbf{C}(X, \mathbf{R}),$$

где $(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \vec{f}$, а $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}$ рассматриваются с евклидовыми расстояниями.

X.2.15*. Пусть (l_2, d) — пространство, введенное в задаче X.1.1,15), а на $[0, 1]$ рассматривается евклидово расстояние. Пусть

$$f = (f_1, f_2, \ldots) \ : \ [0, 1] \to \mathrm{l}_2.$$

Доказать, что $f \in \mathbf{C}([0, 1], \mathrm{l}_2)$ тогда и только тогда, когда

1) $\forall k \geqslant 1 \ : \ f_k \in \mathbf{C}([0, 1])$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2$ сходится равномерно на $[0, 1]$.

X.2.16*. Пусть (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$,— метрические пространства, причем (X_2, ρ_2) — компактное пространство, и (X, ρ) — декартово произведение, введенное в задаче X.1.4. Пусть $f \in \mathbf{C}(X)$ и

$$g(x_1) := \max_{x_2 \in X_2} f(x_1, x_2), \quad x_1 \in X_1.$$

Доказать, что $g \in \mathbf{C}(X_1)$.

§ 3. КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

X.3.1. Пусть $(\mathbf{R}, \rho)$ — прямая с евклидовым расстоянием ρ. Для множества $(0, 1]$ привести пример открытого покрытия, не содержащего конечного подпокрытия.

X.3.2. Пусть $(\mathbf{R}^2, \rho)$ — плоскость с евклидовым расстоянием. Для множества $[0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$ привести пример открытого покрытия, не содержащего конечного подпокрытия.

X.3.3. Доказать, что метрическое пространство (X, d) сепарабельно тогда и только тогда, когда любое открытое покрытие X содержит счетное подпокрытие.

X.3.4. Пусть $(\mathbf{R}^2, \rho)$ — плоскость с евклидовым расстоянием, $A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ x_2 = 0\}$, $\{O_\alpha, \alpha \in T\}$ — открытое покрытие множества A. Доказать, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что набор $\{O_\alpha, \alpha \in T\}$ есть покрытие множества

$$A_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \mid -\varepsilon \leqslant x_1 \leqslant 1 + \varepsilon, \ |x_2| \leqslant \varepsilon\}.$$

X.3.5. Проверить, что

1) пересечение любого семейства компактных множеств компактно;
2) объединение конечного числа компактных множеств компактно;
3) разность компактных множеств может быть как компактным, так и не быть компактным множеством;
4) объединение бесконечного семейства компактных множеств может не быть компактным множеством.

X.3.6. Пусть $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ и $\bar{B}(\bar{0}, 1)$ — замкнутый шар в $(\mathbf{l}_2, d)$, где d — расстояние, определенное в задаче X.1.1,15). Доказать, что $\bar{B}(\bar{0}, 1)$, не является компактным множеством в $(\mathbf{l}_2, d)$.

X.3.7. Пусть $x_0(t) = 0$, $t \in [0, 1]$ и $\bar{B}(x_0, 1)$ — замкнутый шар в пространстве $\mathbf{C}([0, 1])$ с равномерной метрикой ρ. Доказать, что множество $\bar{B}(x_0, 1)$ не является компактным в пространстве $(\mathbf{C}([0, 1]), \rho)$.

X.3.8. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $n_i \in \mathbf{N}$, $i \geqslant 1$; $\{x_{ij} \mid 1 \leqslant j \leqslant n_i, i \geqslant 1\}$ — набор элементов из X. Доказать, что множество

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n_i} \bar{B}\left(x_{ij}, \frac{1}{i}\right)$$

компактно.

X.3.9. Доказать, что подмножество $\mathbf{R}^m$ с любой из метрик 10) — 14) задачи X.1.1 компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

X.3.10. Какие из следующих множеств компактны в $(\mathbf{R}^2, \rho)$, где ρ — евклидово расстояние:

1) $\{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$;
2) $\{(x_1, x_2) \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\}$;
3) $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leqslant 1, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\}$;
4) $\left\{(x_1, x_2) \mid x_1 \in (0, 1), x_2 = \sin\frac{1}{x_1}\right\} \cup$
$\cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, -1 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$?

X.3.11. Пусть A — замкнутое ограниченное подмножество $\mathbf{l}_2$ с расстоянием d, определенным в задаче X.1.1, 15). Доказать, что множество A компактно тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x=(x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

X.3.12. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in \mathbf{l}_2$; $a_k \geqslant 0$, $k \geqslant 1$. Доказать, что множество

$$\{(x_1, \ldots, x_k, \ldots) \mid |x_k| \leqslant a_k, k \geqslant 1\}$$

компактно в $(\mathbf{l}_2, d)$.

X.3.13. Пусть при условиях задачи X.1.4 $F_i \subset X_i$, $i = 1, 2$ и $F = F_1 \times F_2$. Доказать, что множество F компактно в (X, ρ) тогда и только тогда, когда F_i компактно в (X_i, ρ_i) для каждого $i = 1, 2$.

X.3.14. Пусть F и G — компактные множества в $(\mathbf{R}^m, \rho)$, ρ — евклидово расстояние, число $\alpha \in \mathbf{R}$ и

$$A = \{\alpha\vec{x} \mid \vec{x} \in F\},$$

$$B = \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in F, \quad \vec{y} \in G\}.$$

Доказать, что множества A и B компактны в $(\mathbf{R}^m, \rho)$.

X.3.15. Пусть F — компактное множество в $(\mathbf{R}^m, \rho)$ и

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}^{(i)} \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbf{N}, \quad \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, 1]; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \quad \{\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}\} \subset F \end{array} \right\}.$$

Доказать, что множество G компактно в $(\mathbf{R}^m, \rho)$.

X.3.16. Пусть $\mathcal{K}$ — семейство компактных множеств в $(\mathbf{R}^m, \rho)$. Для $\{A, B\} \subset \mathcal{K}$ определим

$$d(A, B) := \inf\{a > 0 \mid B \subset A^{a]}, \; A \subset B^{a]}\}.$$

Доказать, что d есть метрика на $\mathcal{K}$.

X.3.17. В пространстве $(\mathbf{C}([0, 1]), \rho)$ с равномерной метрикой ρ пусть

$$F = \left\{ x \in \mathbf{C}([0, 1]) \;\middle|\; \begin{array}{l} |x(0)| \leqslant L, \; \forall \{t_1, t_2\} \subset [0, 1] \quad : \\ |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant L\,|t_1 - t_2| \end{array} \right\}$$

для некоторого $L > 0$. Доказать, что множество F компактно в пространстве $(\mathbf{C}([0, 1]), \rho)$.

X.3.18*. Пусть при условиях задачи X.1.4 $F_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, и $F = F_1 \times F_2$. Доказать, что множество F связно тогда и только тогда, когда каждое из множеств F_1 и F_2 связно.

X.3.19*. Пусть $\{K_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность компактных связных множеств метрического пространства (X, d), причем $K_n \supset K_{n+1}$, $n \geqslant 1$. Доказать, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ связно в (X, d). Привести пример, показывающий, что условие компактности нельзя заменить замкнутостью множеств K_n, $n \geqslant 1$.

§ 4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА КОМПАКТАХ

X.4.1. Пусть K — компактное множество в метрическом пространстве (X, d) и элемент $z \notin K$. Доказать, что в K существует точка, находящаяся на минимальном расстоянии от z, и точка, находящаяся на максимальном расстоянии от z.

X.4.2. Пусть K — компактное множество в метрическом пространстве (X, d) и

$$d(K) := \sup\{d(x, y) \mid \{x, y\} \subset K\}.$$

Доказать, что $d(K) < +\infty$ и что

$$\exists \{x_0, y_0\} \subset K \quad : \quad d(K) = d(x_0, y_0).$$

X.4.3. Пусть K_1 и K_2 — компактные непересекающиеся множества метрического пространства (X, d). Доказать, что

$$\inf_{x\in K_1, y\in K_2} d(x, y) > 0.$$

X.4.4. Пусть K — компактное множество в метрическом пространстве (X, d) и $f \in \mathbf{C}(K)$. Доказать, что график функции f

$$\{(x, y) \mid x\in K,\ y = f(x)\}$$

есть компактное множество в пространстве $(X \times \mathbf{R}, \rho)$, где

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|.$$

X.4.5. Пусть (X, d) — метрическое пространство и $f \in \mathbf{C}(X)$. Предположим, что для некоторого $c \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) \leqslant c\} \neq \varnothing$ и компактно. Доказать, что

$$\exists x_* \in X \quad \forall x \in X \ : \ f(x_*) \leqslant f(x).$$

X.4.6. Пусть $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^m)$ и для некоторого $c \in \mathbf{R}$ множество $\{\vec{x} \in \mathbf{R}^m \mid f(\vec{x}) \leqslant c\} \neq \varnothing$ и ограничено. Доказать, что

$$\exists \vec{x}_* \in \mathbf{R}^m \ : \ \min_{\mathbf{R}^m} f = f(x_*).$$

X.4.7*. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и $f \in \mathbf{C}(X)$. **Функция** f называется **компактной**, если для каждого $a \in \mathbf{R}$ множество $\{x \mid f(x) \leqslant a\}$ — компактно. Привести примеры компактных функций для пространства $X = \mathbf{R}^2$ с евклидовым расстоянием. Доказать, что для пространства $X = \mathbf{l}_2$ с расстоянием d, определенным в задаче X.1.1, 15), компактных функций не существует.

X.4.8. Используя функцию

$$\mathbf{C}([0, 1]) \ni x \to f(x) := \left(|x(1)| - \int_0^1 |x(t)|\,dt\right) \in \mathbf{R},$$

доказать, что шар $\bar{B}(x_0, 1)$ в $\mathbf{C}([0, 1])$ с равномерной метрикой ρ не является компактным множеством, $x_0(t) = 0$, $t \in [0, 1]$.

X.4.9. Пусть f и g — действительные ограниченные и равномерно непрерывные на множестве A метрического пространства (X, d) функции. Доказать, что функция $f \cdot g$ равномерно непрерывна на A.

X.4.10. Пусть A — всюду плотное множество в метрическом пространстве (X, d), $f\colon A \to \mathbf{R}$ — равномерно на A непрерывная функция. Доказать, что существует равномерно на X непрерывная функция $g\colon X \to \mathbf{R}$ такая, что

$$\forall x \in A \ : \ g(x) = f(x).$$

Привести пример, показывающий, что условие равномерной непрерывности f нельзя опустить.

X.4.11. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а (Y, ρ) — метрическое пространство. Доказать, что функция $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ ограничена на X.

X.4.12. Пусть (X, d) и (Y, ρ) — метрические пространства, $A \subset \subset X$ — компактное множество и $f \in \mathbf{C}(X, Y)$. Доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x' \in A \quad \forall x'' \in X,\ d(x', x'') < \delta \ :$$
$$\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

X.4.13. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, (Y, ρ) — метрическое пространство и $\mathbf{R}$ — прямая с евклидовым расстоянием. Предположим, что последовательность функций $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{C}(X, Y)$ сходится равномерно на X к функции $f\colon X \to Y$, а функция $g \in \mathbf{C}(Y)$. Доказать, что последовательность $\{g(f_n) : n \geqslant 1\}$ сходится равномерно на X к функции $g(f)$.

X.4.14*. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство и функции $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{C}(X)$ удовлетворяют условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \{x', x''\} \subset X, \quad d(x', x'') < \varepsilon$$
$$\forall n \geqslant 1 \quad : \quad |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Предположим, что последовательность функций $\{f_n : n \geqslant 1\}$ сходится поточечно на X к функции f. Доказать, что сходимость к f равномерна на X и что $f \in \mathbf{C}(X)$.

X.4.15*. **Теорема Дини.** Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а последовательность функций $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset \subset \mathbf{C}(X)$ сходится поточечно на X к функции $f \in \mathbf{C}(X)$ и

$$\forall x \in X \quad \forall n \geqslant 1 \quad : \quad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x).$$

Доказать, что последовательность $\{f_n : n \geqslant 1\}$ сходится равномерно на X к f.

§ 5. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

X.5.1. Проверить, что в метрическом пространстве $(\mathbf{R}^2, \rho)$, где ρ — евклидова метрика,

1) преобразование

$$\mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1,\ x_2 + 2)$$

не имеет неподвижных точек и не является сжимающим;

2) преобразование

$$\mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi,\ x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi),$$

где φ — фиксировано, имеет неподвижную точку и не является сжимающим.

X.5.2. В метрическом пространстве $(\mathbf{C}([0, 1]), \rho)$, где ρ — равномерная метрика, рассмотреть преобразование

1) $\mathbf{C}([0, 1]) \ni x \mapsto -x$;

2) $\mathbf{C}([0, 1]) \ni x \to |x|$;

3) $f(x)(t) = x\left(\frac{t}{2}\right), \quad f \in [0, 1]$;

4) $f(x)(t) = \int\limits^{t} x(u)\, du, \quad t \in [0, 1]$;

5) $f(x)(t) = 1 + \int\limits_0^t x(u)\,du,\quad t \in [0, 1]$;

6) $f(x)(t) = \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^u x(v)\,dv\right) du = \int\limits_0^t (t-u)\,x(u)\,du,\quad t \in [0, 1]$.

Определить, какие из этих преобразований имеют неподвижные точки, являются преобразованием сжатия.

X.5.3. Пусть $f: X \to X$ — сжимающее отображение. Доказать, что f равномерно непрерывно на X.

X.5.4. Доказать, что в пространстве $(\mathbf{R}, \rho)$ (ρ — евклидово расстояние) преобразование

$$f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbf{R},$$

удовлетворяет условию

$$\forall \{x, y\} \subset \mathbf{R},\ x \neq y \ :\ |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

и не имеет неподвижных точек.

X.5.5. Пусть $f: [a, b] \to [a, b]$ — функция, для которой существует f' на $[a, b]$. Доказать, что f есть преобразование сжатия в пространстве $([a, b], \rho)$, где ρ — евклидово расстояние, тогда и только тогда, когда

$$\exists \lambda \in [0, 1) \ :\ \sup_{[a,b]} |f'| \leqslant \lambda.$$

X.5.6. Функция $F \in \mathbf{C}([a, b] \times \mathbf{R})$ удовлетворяет условию

$$\exists m > 0 \quad \exists M \geqslant m \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\forall \{y_1, y_2\} \subset \mathbf{R},\ y_1 \neq y_2 \ :\ m \leqslant \frac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{y_1 - y_2} \leqslant M.$$

Доказать, что

$$\exists!\, f \in \mathbf{C}([a, b]) \quad \forall x \in [a, b] \ :\ F(x, f(x)) = 0.$$

X.5.7. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $A: X \to X$; $T: X \to X$ — биекция, причем преобразование $T^{-1}AT$ есть преобразование сжатия. Доказать, что преобразование A имеет единственную неподвижную точку.

X.5.8. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $\overline{B}(x_0, r)$ — фиксированный шар и $A: \overline{B}(x_0, r) \to X$ — преобразование сжатия с коэффициентом $\lambda < 1$ такое, что $d(Ax_0, x_0) \leqslant (1 - \lambda) r$. Доказать, что преобразование A имеет единственную неподвижную точку в $\overline{B}(x_0, r)$.

X.5.9. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ — матрица с действительными элементами такая, что

$$\lambda := \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{k=1}^m |a_{ki} + \delta_{ki}| < 1.$$

Доказать, что для каждого $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$ система уравнений

$$A\vec{x} = \vec{a}$$

имеет единственное решение $\vec{x}^*$, которое можно получить методом последовательных приближений.

X.5.10. Пусть $A = (a_{ij})_{ij=1}^m$ — матрица с действительными элементами такая, что

$$\lambda := \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \sum_{j=1}^m |a_{kj} + \delta_{kj}| < 1.$$

Доказать, что для каждого $a \in \mathbf{R}^m$ система

$$A\vec{x} = a$$

имеет единственное решение, которое можно получить методом последовательных приближений.

X.5.11. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а преобразование $f: X \to X$ удовлетворяет условию

$$\forall \{x, y\} \subset X, \ x \neq y \ : \ d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Доказать, что преобразование f имеет единственную неподвижную точку.

X.5.12. Пусть (X, d) — метрическое пространство, а преобразование $f: X \to X$ удовлетворяет условию предыдущей задачи. Предположим, что множество $f(X)$ компактно. Доказать, что преобразование f имеет единственную неподвижную точку.

X.5.13*. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а преобразование $f: X \to X$ удовлетворяет условию

$$\forall \{x, y\} \subset X \ : \ \rho(f(x), f(y)) \geqslant \rho(x, y).$$

Доказать, что $f(X) = X$ и f — изометрия.

X.5.14. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и для каждого $t \in T$ преобразование $A_t: X \to X$ удовлетворяет условию

$$\forall \{x, y\} \subset X \ : \ d(A_t x, A_t y) \leqslant \lambda(t)\, d(x, y),$$

причем $0 \leqslant \lambda(t) < 1$ для $t \in T$. Предположим, что $\lambda \in \mathbf{C}(T)$ и для любого $x \in X$ функция $t \mapsto A_t x$ непрерывна на T. Пусть $x(t)$ — неподвижная точка преобразования A_t, $t \in T$. Доказать, что $x \in \mathbf{C}(T, X)$.

X.5.15. Пусть $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $t \in [a, b]$. Описать алгебру функций A, включающую функции x_1 и x_2, и найти замыкание $\bar{A}$.

X.5.16. Пусть $[a, b] \subset [0, +\infty)$ и A — семейство всех конечных линейных комбинаций функций

$$[a, b] \ni t \mapsto t^{2n}, \quad n \geqslant 0.$$

Определить $\bar{A}$.

X.5.17. Пусть $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbf{C}([a, b])$ — последовательность функций, разделяющая точки отрезка $[a, b]$. Доказать, что

$$\forall f \in \mathbf{C}([a, b]) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbf{N} \quad \exists F \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^m) \quad :$$
$$\forall t \in [a, b] \quad |f(t) - F(f_1(t), \ldots, f_m(t))| < \varepsilon.$$

X.5.18. Пусть (X_i, d_i), $i = 1, 2$,— компактные метрические пространства, $X_1 \times X_2$ — их декартово произведение с расстоянием задачи X.1.4. Пусть $f \in \mathbf{C}(X_1 \times X_2)$. Доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbf{N} \quad \exists \{g_{i1}, \ldots, g_{in}\} \subset \mathbf{C}(X_i), \; i = 1, 2 \quad :$$
$$\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \quad : \quad \left| f(x_1, x_2) - \sum_{k=1}^{n} g_{1k}(x_1) g_{2k}(x_2) \right| < \varepsilon.$$

X.5.19. Пусть $\varphi \in \mathbf{C}([a, b])$. Доказать, что утверждение

$$\forall f \in \mathbf{C}([a, b]) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbf{N} \quad \exists \{a_0, \ldots, a_m\} \subset \mathbf{R}$$
$$\forall x \in [a, b] \quad : \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi(x)^k \right| < \varepsilon$$

справедливо тогда и только тогда, когда функция φ строго возрастает на $[a, b]$.

Глава XI • ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

XI.1.1. Для функции

$$\mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

вычислить $f'_{\vec{a}}(2, 1)$, $\vec{a} = (1, 1)$.

XI.1.2. Для функции

$$\mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1^2 - x_2^2|}$$

определить направления $\vec{a}$, для которых существует производная $f'_{\vec{a}}(0, 0)$, и найти ее. Проверить, что $f \in C(\mathbf{R}^2)$.

XI.1.3. Для функции

$$\mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2}$$

определить направления $\vec{a}$, для которых существует производная $f'_{\vec{a}}(0, 0)$. Проверить, что $f \in C(\mathbf{R}^2)$.

XI.1.4. Для функции

$$\mathbf{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = |x_1 + x_2 + x_3|$$

определить направления $\vec{a}$, для которых существует производная $f'_{\vec{a}}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3)$ в точке $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3)$, $\overset{\circ}{x}_1 + \overset{\circ}{x}_2 + \overset{\circ}{x}_3 = 0$.

XI.1.5. Для функции

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0); \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases}$$

вычислить $f'_{\vec{a}}(0, 0)$, $f'_{\vec{b}}(0, 0)$ для $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$. Существует ли $f'_{\vec{a}+\vec{b}}(0, 0)$?

XI.1.6. Пусть

$$f(x_1, \ldots, x_m) = a + \sum_{k=1}^{m} b_k x_k + \sum_{j,k=1}^{m} c_{jk} x_j x_k$$

для $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ Вычислить

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, \quad 1 \leqslant j, \ k \leqslant m.$$

XI.1.7. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0); \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Доказать, что f_1' и f_2' существуют на $\mathbf{R}^2$. Доказать также, что $f'_{\vec{a}}(0, 0)$ существует для любого направления $\vec{a}$. Проверить, что f разрывна в точке $(0, 0)$.

XI.1.8. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2, & |x_2| \leqslant |x_1|; \\ -x_1 x_2, & |x_2| > |x_1|. \end{cases}$$

Доказать, что $f''_{12}(0, 0) \neq f''_{21}(0, 0)$.

XI.1.9. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{x_1^2}{x_2^2} - \dfrac{x_2^2}{x_1^2}\right), & x_1 x_2 \neq 0; \\ 0, & x_1 x_2 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что функция f имеет частные производные всех порядков, которые не зависят от порядка дифференцирований, и что f разрывна в точке $(0, 0)$.

XI.1.10. Для функции

$$\mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \int\limits_{x_1 x_2}^{x_1 + x_2^2} e^{u^2} du$$

найти f_1', f_2'.

XI.1.11. Найти производную функции

$$\mathbf{R}^m \ni (x_1, \ldots, x_m) \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \ldots & x_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

в точке $(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ по направлению $\vec{a} = (1, 1, \ldots, 1)$.

XI.1.12. Пусть A — открытое выпуклое подмножество $\mathbf{R}^m$, функция $f: A \to \mathbf{R}$ имеет частные производные первого порядка на A, причем

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall \vec{x} \in A \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad : \quad \left| \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} \right| \leqslant c.$$

Доказать, что f равномерно непрерывна на A.

XI.1.13. Пусть A — открытое выпуклое подмножество $\mathbf{R}^m$, функция $f: A \to \mathbf{R}$ имеет частные производные первого порядка на A, причем

$$\forall \vec{x} \in A \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad : \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} = 0.$$

Доказать, что f постоянна на A.

XI.1.14. Для функций

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k, \quad g(\vec{x}) = \sum_{k,j=1}^{m} b_{kj} x_k x_j,$$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m,$$

где $\{a_k\}$, $\{b_{kj}\}$ — числа из $\mathbf{R}$, определить производную (градиент).

XI.1.15. Проверить справедливость формулы

1) $\nabla(cf) = c\nabla f, \quad c \in \mathbf{R}$;

2) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

3) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$;

4) $\nabla\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g\nabla f - f\nabla g), \quad g \neq 0,$

в предположении, что существуют производные-градиенты функций $f, g: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$.

XI.1.16. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2}{x_2}, & x_2 \neq 0; \\ 0, & x_2 = 0. \end{cases}$$

Доказать, что $f'(0, 0) = \nabla f(0, 0) = (0, 0)$ и что фуикция f не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

XI.1.17. Для функции $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ и направления $\vec{a}$ в точке $\vec{x}^\circ$ существует $f'_{\vec{a}}(\vec{x}^\circ) > 0$. Доказать, что

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t \in (0, \delta) \quad : \quad f(\vec{x}^\circ - t\vec{a}) < f(\vec{x}^\circ)$$

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

XI.2.1. Описать все линейные функции

$$L(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m; \quad \{a_j\} \subset \mathbf{R},$$

для которых

$$L(\vec{x}) = o(\|\vec{x}\|), \quad \vec{x} \to \vec{0} = (0, \ldots, 0).$$

Здесь

$$\|\vec{x}\| = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

XI.2.2. Проверить, что

1) функция $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ дифференцируема в точках (x_1, x_2), $x_1 x_2 \neq 0$;

2) $f_1'(0, 0) = f_2'(0, 0) = 0$;

3) f не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$;

4) f не является дифференцируемой в каждой точке (x_1, x_2), для которой $x_1 x_2 = 0$.

XI.2.3. Проверить, что

1) для функции

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0); \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases}$$

существует $f'_{\vec{a}}(0, 0)$ для любого направления $\vec{a}$;

2) f не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

XI.2.4. Пусть $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1^2 x_2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Для каких направлений $\vec{a}$ существует $f'_{\vec{a}}(0, 0)$? Является ли f дифференцируемой в точке $(0, 0)$?

XI.2.5. Для функции

$$f(x_1, x_2) = (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})^3, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

доказать, что

1) $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^2)$;

2) $f'_{\vec{a}}(0, 0)$ существует для любого направления $\vec{a}$;

3) f не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

XI.2.6. Для функции

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt[3]{x_1 x_2} \cos \dfrac{1}{x_1}, & x_1 \neq 0; \\ 0, & x_1 = 0, \end{cases}$$

доказать, что

1) $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^2)$;

2) $f_1'(0, 0) = f_2'(0, 0) = 0$;

3) f не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

XI.2.7. Для функции

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 \sin \dfrac{1}{x_1} + x_2^2, & x_1 \neq 0; \\ x_2^2, & x_1 = 0, \end{cases}$$

доказать, что

1) $f \in C(\mathbf{R}^2)$;

2) f дифференцируема в точке $(0, 0)$,

3) f'_1 разрывна в точке $(0, 0)$.

XI.2.8. Определить множество всех тех точек $\mathbf{R}^3$, в которых дифференцируема функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$$

XI.2.9. Пусть $\alpha > 0$ и

$$f(\vec{x}) = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m.$$

При каких α функция f дифференцируема в точке $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$?

XI.2.10. Функция $f: B(\vec{x}^\circ, r) \to \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^\circ, r)$ f дифференцируема в точке $\vec{x}$,

2) $\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall \vec{x} \in B(\vec{x}^\circ, r) \ : \ \|\nabla f(\vec{x})\| \leqslant c$.

Доказать, что

$$\forall \{\vec{x}', \vec{x}''\} \subset B(\vec{x}^\circ, r) \ : \ |f(\vec{x}') - f(\vec{x}'')| \leqslant c \|\vec{x}' - \vec{x}''\|.$$

XI.2.11. Функция $f: B(\vec{x}^\circ, r) \to \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^\circ, r)$ f дифференцируема в точке $\vec{x}$;

2) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^\circ, r) \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\} \ : \ \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} = 0.$

Доказать, что $f(\vec{x}) = f(\vec{x}^\circ)$, $\vec{x} \in B(\vec{x}^\circ, r)$.

XI.2.12. Функция $f: [0, 1]^2 \to \mathbf{R}$ называется **дифференцируемой в точке** $\vec{x} \in [0, 1]^2$, если

$$f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) - f'(\vec{x})\vec{a} = \delta(\vec{x}, \vec{a})\|\vec{a}\|,$$

причем $\delta(\vec{x}, \vec{a}) \to 0$ при $\vec{a} \to \vec{0}$; $\vec{x} + \vec{a} \in [0, 1]^2$. Предположим, что $\{f'_1, f'_2\} \subset C([0, 1]^2)$. Доказать, что

$$\sup_{\vec{x} \in [0,1]^2} |\delta(\vec{x}, \vec{a})| \to 0, \quad \vec{a} \to \vec{0}.$$

XI.2.13. Пусть A — открытое подмножество $\mathbf{R}^m$ и точки $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ таковы, что

$$\{\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Доказать, что для функции $f: A \to \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{C}^1(A)$ справедливо равенство

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} (y_k - x_k) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k} (\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}))\, dt.$$

XI.2.14. Записать формулу Тейлора относительно точки $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ для следующих функций:

1) $f(\vec{x}) = \exp(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$;

2) $f(\vec{x}) = \ln(1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m)$, $x_1 + \cdots + x_m > -1$.

XI.2.15. Разложить функцию

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

в ряд по степеням $x_1 - 1$, $x_2 + 1$.

XI.2.16. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \int_0^1 \operatorname{ch}(x_1 t) \operatorname{ch}(x_2 t)\, dt, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Написать ряд Маклорена для f.

§ 3. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

XI.3.1. **(Седло).** Для функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ найти критические точки и доказать, что эти точки не являются точками экстремума.

XI.3.2. **(Обезьянье седло).** Для функции $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ найти критические точки и доказать, что эти точки не являются точками экстремума.

XI.3.3. Пусть

$$f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)(x_2 - 2x_1^2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Доказать, что
1) $(0, 0)$ есть критическая точка для f;
2) для каждого $\varphi \in [0, \pi)$ функция

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$$

в точке $t = 0$ имеет строгий минимум;
3) $(0,0)$ не есть точка локального экстремума f.

XI.3.4. Проверить, что для функции

$$f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

точка $(0, 0)$ есть точка строгого минимума и что $f_1'(0, 0)$ и $f_2'(0, 0)$ не существуют.

XI.3.5. Пусть функция $f: \overline{B}(\vec{0}, 1) \to \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f \in \mathbf{C}(\overline{B}(\vec{0}, 1))$;

2) f дифференцируема в каждой точке $\vec{x}$, $\|\vec{x}\| < 1$;

3) $f(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x}$, $\|\vec{x}\| = 1$.

Доказать, что

$$\exists \vec{x}^{\circ} \in B(\vec{0}, 1) \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\} \quad : \quad \frac{\partial f(\vec{x}^{\circ})}{\partial x_k} = 0.$$

XI.3.6. Определить критические точки функции и исследовать их на экстремум

1) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

5) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$;

6) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)e^{-x_1-2x_2-3x_3}, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0$;

7) $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2\right)$,

$x_k \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m$;

8) $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i \sum\limits_{k=1}^{m} (x_k - x_k^{(i)})^2$,

$(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$,

где $a_i > 0$, $(x_1^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)}) \in \mathbf{R}^m$, $1 \leqslant i \leqslant N$ — фиксированы.

XI.3.7. Для каждой из функций

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4, \quad f_3(x_1, x_2) = -f_1(x_1, x_2)$$

точка $(0, 0)$ является критической. Проверить, что

1) $f_i''(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$;

2) $(0, 0)$ есть точка минимума, седловая и максимума для функций f_1, f_2 и f_3 соответственно.

XI.3.8. Определить наибольшее на множестве $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$ значение функции

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2e^{-x_1^2-x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

XI.3.9. Доказать, что

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad : \quad x_1e^{x_1(1+x_2^2)^2} \geqslant -\frac{1}{e}.$$

XI.3.10. Пусть A — замкнутое подмножество $\mathbf{R}^m$, $f \in \mathbf{C}(A)$ и для любой последовательности $\{\vec{x}^{(n)} : n \geqslant 1\} \subset A$, $\|\vec{x}^{(n)}\| \to +\infty$, $n \to \infty$, выполняется соотношение

$$f(\vec{x}^{(n)}) \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что

$$\exists \vec{x}_* \in A \quad \forall \vec{x} \in A \quad : \quad f(\vec{x}_*) \leqslant f(\vec{x}).$$

XI.3.11. Пусть P — многочлен в $\mathbf{R}^2$. Верно ли, что

$$\exists \vec{x}_* \in \mathbf{R}^2 \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^2 \quad : \quad |P(\vec{x}_*)| \leqslant |P(\vec{x})|?$$

Аналогичное утверждение верно для многочлена на $\mathbf{R}$.

XI.3.12. Определить наибольшее и наименьшее значения на множестве $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0\}$ функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) e^{-x_1 - 2x_2 - 3x_3},$$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$$

XI.3.13. Пусть $\{a, b_1, \ldots, b_m\} \subset \mathbf{R}$, $C = (c_{jk})_{jk=1}^m$ — симметрическая невырожденная матрица и

$$f(x_1, \ldots, x_m) = a + \sum_{k=1}^m b_k x_k + \sum_{j,k=1}^m c_{jk} x_j x_k,$$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)^t \in \mathbf{R}^m.$$

Проверить, что значение $\vec{x}^\circ = -\frac{1}{2} C^{-1} \vec{b}$, где $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)^t$, есть единственная критическая точка функции f. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

1) $\vec{x}^\circ$ — точка локального минимума (максимума);
2) $\vec{x}^\circ$ — точка минимума f на $\mathbf{R}^m$ (максимума f на $\mathbf{R}^m$);
3) матрица C положительно (отрицательно) определена.

XI.3.14*. Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство и $f: X \to \mathbf{R}$. Доказать, что множество всех точек строгого локального экстремума функции f не более чем счетно.

Глава XII • ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. Дополнительные задачи к главам X—XII

§ 1. ОТОБРАЖЕНИЯ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

XII.1.1. Для отображения $\vec{f}$ найти образ $\vec{f}(A)$ множества A, если

1) $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)^t, \quad (x_1, x_2) \in A = [0, 1] \times [0, 2]$;

2) $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)^t, \quad (x_1, x_2) \in A = [0, 1] \times [-1, 1]$;

3) $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)^t, \quad (x_1, x_2) \in A = [0, 1]^2$;

4) $\vec{f}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^t, \quad (r, \varphi) \in A$ для случаев:

$$A = A_1 = [1, 2] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad A = A_2 = [1, 2] \times [0, 2\pi];$$

5) $\vec{f}(r, \varphi) = (e^r\cos\varphi, e^r\sin\varphi)^t, \quad (r, \varphi) \in A$ для случаев:
$A = A_1 = [0, 1] \times [0, \pi], \quad A = A_2 = [0, 1] \times [0, 2\pi]$;

6) $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1 x_2)^t, (x_1, x_2) \in A = [0, 1]^2$.

XII.1.2. Для отображений задачи XII.1.1 найти образы координатных прямых.

XII.1.3. Определить, какие из отображений задачи XII.1.1 являются взаимно однозначными, непрерывными.

XII.1.4. Для отображения $\vec{f}$ найти образ $\vec{f}(A)$ множества A, если

1) $\vec{f}(r, \varphi, x_3) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, x_3)^t$,

$$(r, \varphi, x_3) \in A = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2];$$

2) $\vec{f}(r, \varphi, \theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)^t$,

$$(r, \varphi, \theta) \in A = [1, 2] \times \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \times [0, \pi].$$

Найти образцы координатных линий и координатных плоскостей при отображении $\vec{f}$. Доказать, что отображение $\vec{f}$ непрерывно на A.

Проверить также, что отображение $\vec{f}$ в 1) не взаимно однозначно, а в 2) — взаимно однозначно.

XII.1.5. Для отображения $\vec{f}$ и точки $\vec{x}^\circ$ найти производную $\vec{f}'(\vec{x}^\circ)$ и главную линейную часть отображения в точке $\vec{x}^\circ$:

1) $\vec{f}$ задачи XII.1.1, 2) и $\vec{x}^\circ = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$;

2) $\vec{f}$ задачи XII.1.1, 4) и $\vec{x}^\circ = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\vec{f}$ задачи XII.1.1, 5) и $\vec{x}^\circ = (r^\circ, \varphi^\circ)$;

4) $\vec{f}$ задачи XII.1.1, 6) и $\vec{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ)$;

5) $\vec{f}$ задачи XII.1.4, 1) и $\vec{x}^\circ = (r^\circ, \varphi^\circ, x_3^\circ)$;

6) $\vec{f}$ задачи XII.1.4, 2) и $\vec{x}^\circ = (r^\circ, \varphi^\circ, \theta^\circ)$.

XII.1.6. Для отображения

$$\vec{f}(x_1, x_2) = (|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|)^t, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

определить точки, в которых $\vec{f}$ дифференцируемо. В этих точках найти $\vec{f}'$, $\det \vec{f}'$. Определить критические точки и найти $\vec{f}^{-1}(\{(1, 1)\})$.

XII.1.7. Для отображения

$$\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, 2x_1x_2)^t, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

определить точки, в которых $\vec{f}$ дифференцируемо, для них найти $\vec{f}'$ и $\det \vec{f}'$. Определить критические точки $\vec{f}$ и найти $\vec{f}^{-1}(A)$, где $A = \{(y_1, y_2) \mid y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0\}$.

XII.1.8. Вычислить якобианы отображений, введенных в задачах XII.1.1 и XII.1.4.

XII.1.9. Для отображений

$$\vec{f}(r, \varphi, \theta) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \theta)^t, \quad (r, \varphi, \theta) \in \mathbf{R}^3;$$

$$\vec{g}(y_1, y_2, y_3) = \left(y_1\cos y_3, y_2\cos y_3, \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\sin y_3\right)^t,$$
$$(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3;$$

$$\vec{h}(r, \varphi, \theta) = \vec{g}(\vec{f}(r, \varphi, \theta)), \quad (r, \varphi, \theta) \in \mathbf{R}^3$$

вычислить производные $\vec{f}'$, $\vec{g}'$, $\vec{h}'$ и якобианы $\det \vec{f}'$, $\det \vec{g}'$, $\det \vec{h}'$.

XII.1.10. Пусть

$$\vec{f}(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}\sin x_1 - \frac{1}{3}\cos x_2 + 2, \frac{1}{6}\cos x_1 + \frac{1}{2}\sin x_2 - 1\right)^t,$$

$(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Доказать, что $\vec{f}$ имеет единственную неподвижную точку в $\mathbf{R}^2$.

XII.2.1. Доказать, что отображение $\vec{f}$ взаимно однозначно на множестве A, и найти обратное отображение $\vec{g}$:

1) $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)^t$, $(x_1, x_2) \in A = \mathbf{R}^2$;

2) $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$, $(x_1, x_2) \in A = (0, +\infty)^2$;

3) $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1 - x_2)^t$, $(x_1, x_2) \in A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \geqslant 0\}$;

4) $\vec{f}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^t$,
$(r, \varphi) \in A = \{(r, \varphi) \mid r > 0, \varphi \in (-\pi, \pi]$;

5) $\vec{f}(r, \varphi, x_3) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, x_3)^t$,
$A = \{(r, \varphi, x_3) \mid r > 0, \varphi \in [0, 2\pi), x_3 \in \mathbf{R}\}$;

6) $\vec{f}(r, \varphi, \theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)^t$,
$A = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > 0, \varphi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \pi)\}$.

XII.2.2. Проверить, что отображение $\vec{f}$ задачи XII.1.6 не является взаимно однозначным на $\mathbf{R}^2$. Доказать, что его сужение на множество $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 - x_2 \leqslant 0, x_1 + x_2 \geqslant 0\}$ является взаимно однозначным отображением, и найти обратное к нему отображение $\vec{g}$.

XII.2.3. Проверить, что отображение $\vec{f}$ задачи XII.1.7 не является взаимно однозначным на $\mathbf{R}^2$. Доказать, что его сужение на каждое из множеств

$$A_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, |x_2| \leqslant x_1\},$$
$$A_2 = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leqslant -x_2, x_2 \leqslant 0\}$$

является взаимно однозначным отображением, и найти обратные отображения $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ соответственно.

XII.2.4. Доказать, что отображение

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}^\circ + \frac{\vec{x} - \vec{x}^\circ}{\sqrt{1 + \|\vec{x} - \vec{x}^\circ\|^2}}, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m,$$

для фиксированной точки $\vec{x}^\circ \in \mathbf{R}^m$ есть диффеоморфизм $\mathbf{R}^m$ на $B(\vec{x}^\circ, 1)$. Найти $\vec{f}^{-1}$.

XII.2.5. Доказать, что отображение

$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{2\vec{x}}{1 - \|\vec{x}\|^2}, \quad \vec{x} \in A = B(\vec{0}, 1) \subset \mathbf{R}^m,$$

есть диффеоморфизм A на $\vec{f}(A)$. Найти $\vec{f}(A)$ и $\vec{f}^{-1}$.

XII.2.6. Пусть $\vec{x}^\circ \in \mathbf{R}^m$ и $r > 0$ фиксированы. Отображение

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}^\circ + \frac{r}{\|\vec{x} - \vec{x}^\circ\|^2}(\vec{x} - \vec{x}^\circ), \quad \vec{x} \neq \vec{x}^\circ,$$

называется **инверсией** с центром в точке $\vec{x}^\circ$ и радиусом r. Доказать, что $\vec{f}$ есть диффеоморфизм и что

$$\vec{f}(\{\vec{x} \mid 0 < \|\vec{x} - \vec{x}^\circ\| \leqslant r\}) = \{\vec{x} \mid \|\vec{x} - \vec{x}^\circ\| \geqslant r\}.$$

XII.2.7*. Отображение $\vec{f}\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $\vec{f} \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^m)$ с положительным числом λ удовлетворяет условию

$$\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \mathbf{R}^m : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \geqslant \lambda \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Доказать, что

1) отображение $\vec{f}$ взаимно однозначно;

2) $\det \vec{f}'(\vec{x}) \neq 0$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$;

3) $\vec{f}(\mathbf{R}^m) = \mathbf{R}^m$.

XII.2.8. Проверить, что отображение

$$\vec{f}(x_1, x_2) = (e^{x_1}\cos x_2, e^{x_1}\sin x_2)^t, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

1) не является взаимно однозначным на $\mathbf{R}^2$;

2) $\vec{f} \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^2)$;

3) $\det \vec{f}' \neq 0$ на $\mathbf{R}^2$;

4) локально обратимо в окрестности каждой точки в $\mathbf{R}^2$. Найти обратное отображение для сужения $\vec{f}$ в окрестность точки $(0, 0)$, $(0, 2\pi)$.

XII.2.9. Проверить, что отображение

$$\vec{f}(x_1, x_2) = (x_2 \sin x_1, 1 + x_1 + x_2)^t, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

принадлежит классу $\mathbf{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Доказать, что $\vec{f}$ локально обратимо в окрестности точки $(0, 1)$. Для обратного отображения $\vec{g}$ вычислить $\vec{g}'((0, 2))$.

XII.2.10. Доказать, что отображение

$$\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)^t, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

локально обратимо в окрестности каждой точки $(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2) \neq (0, 0)$. Пусть $\mathring{x}_1 = \mathring{x}_2 = 1$ и $\vec{g}$ — соответствующее обратное отображение. Найти $\vec{g}'((0, 2))$.

XII.2.11. Доказать, что отображение

$$\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 \cos x_1, e^{2x_1}(x_2 + 1))^t, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

обратимо в некоторой окрестности точки (0, 0). Для обратного отображения $\vec{g}$ найти $\vec{g}'((0, 1))$.

XII.2.12. Проверить, что преобразование

$$\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2^3, x_1^3 - x_2^3)^t, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

обратимо на $\mathbf{R}^2$, и найти обратное отображение $\vec{g}$. Вычислить $\det \vec{f}'(0, 0)$.

XII.2.13. Доказать, что в некоторой окрестности $B(0, r)$ существует единственная функция $f \in \mathbf{C}^1(B(0, r))$, удовлетворяющая условиям

$$e^{2x \cos f(x)} + e^{f(x) \cos 2x} = 2, \quad x \in B(0, r);$$

$$f(0) = 0.$$

Вычислить $f'(0)$.

XII.2.14. Пусть $F(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1$, $(x_1, x_2, y) \in \mathbf{R}^3$. Доказать, что для любой точки $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2)$ такой, что $(\overset{\circ}{x}_1)^2 + (\overset{\circ}{x}_2)^2 < 1$ и значения $y^\circ = \sqrt{1 - (\overset{\circ}{x}_1)^2 - (\overset{\circ}{x}_2)^2}$, функция

$$f_+(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, \quad x_1^2 + x_2^2 < 1,$$

удовлетворяет условиям

$$F(x_1, x_2, f_+(x_1, x_2)) = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 < 1;$$

$$f_+(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2) = y^\circ.$$

Аналогично функция

$$f_-(x_1, x_2) = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, \quad x_1^2 + x_2^2 < 1$$

удовлетворяет условиям

$$F(x_1, x_2, f_-(x_1, x_2)) = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 < 1;$$

$$f_-(x_1^0, x_2^0) = -y^\circ.$$

XII.2.15. Пусть

$$\vec{F}(x, y_1, y_2) = (x - 3y_1 + y_2^2, 2x + y_1 - y_2)^t, \quad (x, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^3.$$

К отображению $\vec{F}$ в точке (0, 0, 0) применить теорему о существовании неявного отображения. Доказать также, что отображение

$$\vec{f}(x) = \left(\frac{3}{2} - 2x - \frac{1}{2}\sqrt{9 - 28x}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9 - 28x}\right)^t,$$

$$|x| < \frac{9}{28}$$

удовлетворяет соотношению

$$\vec{F}(x, \vec{f}(x)) = \vec{0}, \quad |x| < \frac{9}{28}$$

XII.2.16. Доказать, что в некоторой окрестности $B((0, 0), r)$ существует единственная функция $f \in C^1(B((0,0), r)$, удовлетворяющая условиям

$$x_1 + x_2 + f(x_1, x_2) - \sin(x_1 x_2 f(x_1, x_2)) = 0,$$
$$(x_1, x_2) \in B((0, 0), r);$$
$$f(0, 0) = 0.$$

Найти $f_1'(0, 0), f_2'(0, 0)$.

XII.2.17. Доказать, что в некоторой окрестности $B((1, 1), r)$ существует единственная функция $f \in C^1(B((1, 1), r))$, удовлетворяющая условиям

$$e^{x_1+x_2}\ln(x_1 + x_2 + f(x_1, x_2) - 2) - 2x_1 + x_2 + f(x_1, x_2) = 0,$$
$$(x_1, x_2) \in B((1, 1), r);$$
$$f(1, 1) = 1.$$

Вычислить $f_1'(1, 1)$ и $f_2'(1, 1)$.

XII.2.18. Доказать, что в некоторой окрестности $B(1, r)$ существует единственное отображение $\vec{f}: \; B(1, r) \to \mathbf{R}^2, \vec{f} \in C^1(B(1, r))$, $\vec{f} = (f_1, f_2)^t$, удовлетворяющее условиям

$$2xe^{2x+3f_1(x)-f_2(x)} - f_2(x)\cos f_1(x) = 0,$$
$$\ln(f_2(x) - x) + \sin f_1(x) + 2x + f_1(x) - f_2(x) = 0$$

для $x \in B(1, r)$ и

$$f_1(1) = 0, \quad f_2(1) = 2.$$

Вычислить $\vec{f}'(1)$.

XII.2.19. **Отображение** $\vec{f}: \; A \to \mathbf{R}^m$, A — открытое множество в $\mathbf{R}^m$, называется **регулярным**, если $\vec{f} \in C^1(A)$ и $\det \vec{f}'(\vec{x}) \neq 0$, $\vec{x} \in A$. Доказать, что

1) $\vec{f}(A)$ открыто;

2) для любой точки $\vec{x}^\circ$ существует окрестность $B(\vec{x}^\circ, r)$ такая, что $\vec{f}$ есть диффеоморфизм $B(\vec{x}^\circ, r)$ на $\vec{f}(B(\vec{x}^\circ, r))$.

§ 3. ЛОКАЛЬНЫЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

XII.3.1. Определить точки относительного экстремума функции

1) $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1;$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 2x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 2;$

3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1;$

4) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1;$

5) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \quad x_1x_2x_3 = 4;$

6) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad x_1^2 - x_2^2 - x_1 - x_2 - x_3 = 0;$

7) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2, \quad x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 0.$

XII.3.2. Определить минимальное расстояние от точки $(1, 4)$ до параболы $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_2^2 = 2x_1, \ x_1 \in \mathbf{R}\}$.

XII.3.3. Найти минимальное и максимальное расстояния от точки $(0, 0)$ до точки на эллипсе

$$5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8.$$

XII.3.4. Найти кратчайшее расстояние от точки $(0, 3, 3)$ до окружности

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}.$$

XII.3.5. Найти кратчайшее расстояние между кривыми

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 - x_2^2 = 3\}, \quad \Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 2x_1\}.$$

XII.3.6. Определить наибольшее и наименьшее на множестве A значения функции

1) $f(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\};$

2) $f(x_1, x_2) = (x_1 + 3)^2 + x_2^2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\};$

3) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid -2 \leqslant x_1 \leqslant 1, -1 \leqslant$ $\leqslant x_2 \leqslant 3\};$

4) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2)\, e^{1 - x_1^2 - x_2^2},$
$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\};$

5) $f(x_1, x_2) = (2x_1^2 + x_2^2)\, e^{1 - x_1^2 - x_2^2}$, где A — множество из 4;

6) $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2, \quad A = \left\{(x_1, \ldots, x_m) \mid \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^4 \leqslant 1\right\}.$

XII.3.7. В шар радиуса r вписать цилиндр наибольшего объема.

XII.3.8. В эллипс

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0,$$

вписать прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям и который имеет наибольшую площадь.

XII.3.9. Найти наименьшее значение функции

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^2$$

при условии $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$. Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — заданные положительные числа.

XII.3.10. Найти наибольшее значение функции

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$$

при условии $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 = 1$. Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — заданные положительные числа.

XII.3.11. Найти наибольшее значение произведения

$$x_1^2 x_2^2 \ldots x_m^2$$

при условии $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = 1$.

XII.3.12. Определить расстояние от точки $\vec{x}^0 \in \mathbf{R}^m$ до гиперплоскости

$$H = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^m \mid \vec{a}^t \vec{x} = b\},$$

где вектор $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$, $\|\vec{a}\| \neq 0$ и число $b \in \mathbf{R}$ — фиксированы.

XII.3.13. Пусть $x_k \in (0, 1)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, $m > 1$. Доказать неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - x_k} \geqslant \frac{m^2}{m-1}.$$

XII.3.14. Пусть $x_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $\sum_{k=1}^{m} x_k = 1$. Доказать неравенство

$$\prod_{k=1}^{m} x_k (1 - x_k) \leqslant \frac{(m-1)^m}{m^{2m}}.$$

XII.3.15. Пусть $x_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $\sum_{k=1}^{m} x_k = 1$, $a > 0$, $b > 0$. Доказать неравенство

$$\prod_{?=1}^{m} \left(a + \frac{b}{x_k}\right) \geqslant (a + nb)^n.$$

§ 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВАМ X—XII

XII.4.1. Для функции $f: [a, b] \to R$ положим

$$\|f\|_{BL} := \sup_{[a,b]} |f| + \sup_{\substack{\{x,y\} \subset [a,b], \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

и пусть

$$\mathbf{BL}([a, b]) := \{f: [a, b] \to \mathbf{R} \mid \|f\|_{BL} < +\infty\},$$
$$d(f, g) := \|f - g\|_{BL}, \quad \{f, g\} \subset \mathbf{BL}([a, b]).$$

Доказать следующие утверждения:

1) $(\mathbf{BL}([a, b]), d)$ — полное сепарабельное метрическое пространство;

2) множество $\mathbf{BL}([a, b])$ всюду плотно в $\mathbf{C}([a, b])$ с равномерной метрикой.

XII.4.2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, (Y, σ) — полное метрическое пространство и

$$\mathbf{B}(X, Y) := \{f: \ X \to Y \ \ | \ \sup_{\{x', x''\} \subset X} \sigma(f(x'), f(x'')) < +\infty\},$$

$$\tau(f, g) := \sup_{x \in X} \sigma(f(x), g(x)), \quad \{f, g\} \subset \mathbf{B}(X, Y).$$

Доказать, что $(\mathbf{B}(X, Y), \tau)$ — полное метрическое пространство.

XII.4.3. При условиях предыдущей задачи пусть

$$\mathbf{C}_b(X, Y) := \mathbf{B}(X, Y) \cap \mathbf{C}(X, Y).$$

Доказать, что $(\mathbf{C}_b(X, Y), \tau)$ — полное метрическое пространство.

XII.4.4*. Пусть в задаче XII.4.2 (X, ρ) — компактное метрическое пространство, а (Y, σ) — сепарабельное метрическое пространство. Доказать, что $(\mathbf{C}(X, Y), \tau)$ — сепарабельное метрическое пространство.

XII.4.5. Пусть $\mathbf{R}_+ := [0, +\infty)$ и

$$\rho(x, y) := \begin{cases} x + y, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Доказать следующие утверждения:

1) $(\mathbf{R}_+, \rho)$ — метрическое пространство;

2) $(\mathbf{R}_+, \rho)$ — полно;

3) $(\mathbf{R}_+, \rho)$ не является сепарабельным.

XII.4.6. Пусть для каждого $\alpha \in T$ множество K_α — компактное множество в метрическом пространстве, причем для любого конечного набора значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\bigcap_{k=1}^{n} K_{\alpha_k} \neq \varnothing.$$

Доказать, что

$$\bigcap_{\alpha \in T} K_\alpha \neq \varnothing.$$

XII.4.7*. Привести пример полного метрического пространства и последовательности замкнутых вложенных друг в друга шаров, имеющей пустое пересечение.

XII.4.8. Для отображения

$$\vec{F}(x) = \left(\int_0^{2\pi} x(t)\cos t\,dt, \int_0^{2\pi} x(t)\sin t\,dt\right)^t, \quad x \in \mathbf{C}([0, 2\pi]),$$

определить образ $\vec{F}(\mathbf{C}([0, 2\pi]))$.

XII.4.9. Для отображения

$$\vec{F}(x) = \left(\int_0^1 x(t)\,dt, \int_0^1 t x(t)\,dt, \int_0^1 t^2 x(t)\,dt\right)^t, \quad x \in \mathbf{C}([0, 1]),$$

определить образ $\vec{F}(\mathbf{C}([0, 1]))$.

XII.4.10. Отображение A : $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ имеет единственную неподвижную точку x^* и удовлетворяет условию: для любого компакта K существует число $\alpha = \alpha(K) < 1$ такое, что

$$\forall \{x, y\} \subset K \quad : \quad \|A\vec{x} - A\vec{y}\| \leqslant \alpha \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Доказать, что для любого $\vec{x}^\circ \in \mathbf{R}^m$ последовательность

$$\vec{x}^\circ, \ \vec{x}^{(1)} := A\vec{x}^\circ, \ \ldots, \ \vec{x}^{(n)} := A\vec{x}^{(n-1)}, \ \ldots$$

сходится к $\vec{x}^*$.

XII.4.11. Для функции $f \in \mathbf{C}([0, 1]^2)$ доказать соотношение

$$\max_{(x,y)\in[0,1]^2} \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}, y\right) x^k (1-x)^{n-k} - f(x, y) \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

XII.4.12. Функция f : $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ называется **выпуклой** на $\mathbf{R}^m$, если

$$\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \mathbf{R}^m \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad :$$

$$f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) \leqslant \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y}).$$

Доказать, что функция $f \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^m)$ выпукла на $\mathbf{R}^m$ тогда и только тогда, когда для любого $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$ матрица $f''(\vec{x})$ неотрицательно определена.

XII.4.13. Множество $V \subset \mathbf{R}^m$ называется **выпуклым**, если

$$\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset V \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad : \quad \alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y} \in V.$$

Для функции f : $V \to \mathbf{R}$, выпуклой на V, доказать неравенство

$$\forall n \geqslant 2 \quad \forall \{\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}\} \subset V$$

$$\forall \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, +\infty), \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1 \quad :$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}^{(k)}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(\vec{x}^{(k)}).$$

XII.4.14. Для функции $f \in \mathbf{C}^n(\mathbf{R}^2)$ доказать равенство для любых $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0) + f_1'(0, 0)\, x_1 + f_2'(0, 0)\, x_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(f_{11}''(0, 0)\, x_1^2 + 2 f_{12}''(0, 0)\, x_1 x_2 + f_{22}''(0, 0)\, x_2^2\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{2} f_{i_1\ldots i_n}^{(n)}(tx_1, tx_2)\, x_{i_1} \ldots x_{i_n} t^{n-1} dt.$$

XII.4.15. Для отображения

$$f(x_1, x_2, x_3) = (e^{2x_2} + e^{2x_3}, \ e^{2x_1} - e^{2x_3}, \ x_1 - x_2),$$

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ определить $\vec{f}(\mathbf{R}^3)$. Доказать также, что отображение $\vec{f}: \mathbf{R}^3 \to \vec{f}(\mathbf{R}^3)$ взаимно однозначно, дифференцируемо и имеет обратное дифференцируемое отображение.

XII.4.16. Пусть $\vec{f}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $\vec{f} \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^m)$, $A \subset \mathbf{R}^m$ — замкнутое ограниченное множество. Доказать, что

$$\exists L > 0 \quad \forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A \quad :$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \leqslant L \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

XII.4.17. Найти экстремальные значения функции $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, определяемой неявно уравнением

$$\int\limits_0^{f(x_1, x_2)} \exp(u^2)\, du = x_1^2 + x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Глава XIII ● НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА, ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ

XIII.1.1. С помощью определения доказать сходимость и найти значение несобственного интеграла

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$; 2) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^b}$, $a>0$, $b>1$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3}$;

5) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(x+1)^3\,dx}{x^5}$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}}dx$;

7) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{|1-x|}}$;

9) $\int\limits_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 10) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+8}$.

XIII.1.2. Доказать расходимость интеграла

1) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^b}$, $a>0$, $b\leqslant 1$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^a}$, $a\geqslant 1$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$; 4) $\int\limits_1^{+\infty} e^x\,\frac{dx}{x^a}$, $a>0$;

5) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^a}$, $a>0$; 6) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

XIII.1.3. Пусть функции $\{f, g\} \subset C^1([a, +\infty))$, один из интегралов

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g'(x)\, dx, \qquad \int_a^{+\infty} f'(x)\, g(x)\, dx$$

сходится и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)\, g(x)).$$

Доказать сходимость второго из интегралов и справедливость формулы

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g'(x)\, dx = \lim_{x\to+\infty} (f(x)\, g(x)) - f(a)\, g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)\, g(x)\, dx.$$

XIII.1.4. Найти интеграл

1) $\int_0^1 \ln x dx$; 2) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$;

3) $\int_0^1 x \ln x dx$; 4) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbf{N}$;

5) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$; 6) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} \sin x dx$

XIII.1.5. Доказать сходимость интеграла

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$; 2) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$;

3) $\int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$; 4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4} dx$;

5) $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx, \quad a > 0$; 6) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 (x+1)}$;

7) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{e^x - 1}$; 8) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\operatorname{sh} x}$;

9) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$; 10) $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx, \quad a > 0$;

11) $\int_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{1+x} dx$; 12) $\int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+x} dx$.

XIII.1.6. Пусть $f\colon\ [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ — монотонная на $[a, +\infty)$ функция, для которой сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Доказать, что

1) $f(x) \to 0, \quad x \to +\infty$;
2) $xf(x) \to 0, \quad x \to +\infty$.

XIII.1.7. Пусть $f\colon\ (0, 1] \to \mathbf{R}$ — монотонная на $(0, 1]$ функция, для которой при некотором $a \in \mathbf{R}$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^1 x^a f(x)\,dx. \tag{*}$$

Доказать, что $x^{a+1} f(x) \to 0$, $x \to 0+$.

Доказать также равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$$

для монотонной функции f, удовлетворяющей условию (*) при $a = 0$. Проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}.$$

XIII.1.8. Исследовать сходимость интеграла

1) $\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^a dx, \quad a \in \mathbf{R}$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^a \ln^b \frac{1}{x}}, \quad \{a, b\} \subset \mathbf{R}$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1 + x^a \sin^2 x}, \quad a > 0$;

4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x^a|}{x^b}\,dx, \quad \{a, b\} \subset \mathbf{R}$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \exp\{-x^4 \sin^2 x\}\,dx$;

6) $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \exp\{-x^8 \sin^2 x\}\,dx$;

7) $\int\limits_1^{+\infty} x\,|\sin x|^{x^s}\,dx$;

8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^a + 1} - \sqrt[3]{|xa - 1|}}{\sqrt{x}}\,dx.$

XIII.1.9*. Исследовать сходимость интеграла

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{b_1}\cdot|x-a_2|^{b_2}\,\ldots\,|x-a_n|^{b_n}}$,

где $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R}$, $a_j \neq a_k$, $j \neq k$, $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathbf{R}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{|\sin x|}}$.

XIII.1.10. Доказать условную сходимость интеграла

1) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$, $f(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, $x \in [n-1, n)$, $n \in \mathbf{N}$;

4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$; 5) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\operatorname{arctg} x\,dx$;

6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x(e^x+1)}\,dx$; 7) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x dx$;

8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\,dx$; 9) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \cos(x^3)\,dx$;

10) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} e^x \sin(e^{2x})\,dx$; 11) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x}\,dx$.

XIII.1.11. Исследовать сходимость интеграла

1) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x^a}\,dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}\,dx$.

3) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x+1}{x^a}\sin x\,dx$, $a \in \mathbf{R}$;

4) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} x^a \sin(x^b)\,dx$, $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$;

5) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} e^{\cos x}\frac{\sin x}{x+\sin x}\,dx$; 6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \cos(x+x^3)\,dx$;

7) $\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^3 + \sin 2x)\,dx$; 8) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2 + \sin x)\,dx$;

9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi^2 - x^2}\,dx$.

XIII.1.12. Пусть $a \in \mathbf{R}$,

$$\forall A > a \ : \ \{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, A])$$

и сходятся интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f^2(x)\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g^2(x)\,dx$. Доказать абсолютную сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$.

XIII.1.13. Предположим, что для функции $f \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R})$ сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,dx$. Доказать существование предела $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

XIII.1.14. Для функции $f \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R})$ сходятся интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,dx.$$

Доказать, что $f(x) \to 0$, $|x| \to +\infty$.

XIII.1.15. Пусть $f \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R})$ и сходятся интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f^{(i)}(x))^2\,dx, \quad i = 0, 1, 2; \quad f^{(0)} := f.$$

Доказать равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f'(x))^2\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f''(x)\,f(x)\,dx.$$

XIII.1.16. Для функции $f \in \mathbf{C}^2([a, +\infty))$ сходятся интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f^2(x)\,dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} (f''(x))^2\,dx$$

и

$$\exists L \in \mathbf{R} \quad \forall x \geqslant a \ : \ |f(x)\,f'(x)| \leqslant L.$$

Доказать сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} (f'(x))^2\,dx$.

XIII.1.17. Вычислить предел

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\int\limits_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u^2}\,du\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\int\limits_x^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^x\frac{\sin u}{u}\,du\right)^{\sqrt{x}}$.

§ 2. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

XIII.2.1. Вычислить предел

1) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int\limits_0^1\sqrt{x}\cos(\alpha x)\,dx$; 2) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$;

3) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

XIII.2.2. Вычислить предел

$$\lim_{\alpha\to0}\int\limits_0^1\frac{2x}{\alpha^2}\exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)dx.$$

Можно ли перейти к пределу под знаком интеграла для вычисления предела?

XIII.2.3. Пусть $f\in C(\mathbf{R})$. Доказать, что для любых $\{a,\ b\}\subset\mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\alpha}\int\limits_a^b(f(x+\alpha)-f(x))\,dx=f(b)-f(a).$$

XIII.2.4. Пусть функции $\{\varphi_n:\ n\geqslant1\}\subset R([-1,\ 1])$ удовлетворяют условиям:

1) $\forall n\in\mathbf{N}\quad\forall x\in[-1,\ 1]:\quad\varphi_n(x)\geqslant0$;

2) $\forall\varepsilon>0\ \sup\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}|\varphi_n(x)|\to0,\quad n\to\infty$;

3) $\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx\to1,\quad n\to\infty$.

Доказать, что для любой $f\in C([-1,\ 1])$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,\varphi_n(x)\,dx=f(0).$$

XIII.2.5. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{1+x^2}\,dx$.

XIII.2.6. Вычислить предел $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha\sin x}dx.$

XIII.2.7. Доказать непрерывность на множестве определения функции:

1) $\mathbf{R}\ni\alpha\mapsto\int\limits_0^1 (1+x)^{\alpha x}\,dx;$

2) $(0,\ +\infty)\ni\alpha\mapsto\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-x+\alpha};$

3) $(0,\ +\infty)\ni\alpha\mapsto\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha x-\sin x+1};$

4) $(0,\ +\infty)\ni\alpha\mapsto\int\limits_{\sqrt{\alpha}}^{\alpha} x^{\cos\alpha x}dx.$

XIII.2.8. Найти производную $\mathcal{I}'$ функции

1) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x}dx,\quad \alpha>0;$

2) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2\sin^2 x}dx,\quad \alpha\in(0,\ 1);$

3) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{\alpha^2} \exp(-\alpha(x+\alpha)^2)\,dx,\quad \alpha\in\mathbf{R};$

4) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \exp(\alpha\sqrt{1-x^2})\,dx,\quad \alpha\in\mathbf{R};$

5) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\left\{\int\limits_{-\alpha x}^{\alpha x} e^{\alpha x^3y^3}dy\right\}dx,\quad \alpha>0.$

XIII.2.9. Для функции $f\in\mathbf{C}([0,\ 1])$ положим

$$\mathcal{I}(\alpha):=\int\limits_0^1 f(x)\,|x-\alpha|\,dx,\quad \alpha\in\mathbf{R}.$$

Определить $\alpha\in\mathbf{R}$, в которых существует $\mathcal{I}''(\alpha)$, найти значение $\mathcal{I}''(\alpha)$ в этих точках.

XIII.2.10. Пусть $f \in C^1([0, 1])$ и

$$\mathcal{J}(\alpha) := \int_0^1 f(x)\operatorname{sign}(\sin(\alpha x))\,dx, \quad \alpha > 0.$$

Вычислить $\mathcal{J}'$ в точках существования.

XIII.2.11. С помощью функции

$$f(x) := \int_a^b x^\alpha d\alpha, \quad x \in (0, 1); \quad f(0) := 0, \quad f(1) := b - a,$$

где $0 < a < b$, вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx.$$

§ 3. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ПРИЗНАКИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛАМИ

XIII.3.1. Проверить, что $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 1$,

1) сходится равномерно на множестве $[2, +\infty)$;
2) не сходится равномерно на множестве $(1, +\infty)$.

XIII.3.2. Проверить, что интеграл $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$, $\alpha < 1$,

1) сходится равномерно на множестве $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$,
2) не сходится равномерно на множестве $(-\infty, 1)$.

XIII.3.3. Проверить, что интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|x-\alpha|}dx$, $\alpha \in \mathbf{R}$,

1) сходится равномерно на множестве $(-\infty, n]$ при любом $n > 0$,
2) не сходится равномерно на множестве $[0, +\infty)$.

XIII.3.4. Проверить, что интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1 + (x-\alpha)^6}$, $\alpha \in \mathbf{R}$,

1) сходится равномерно на множестве $(-\infty, n]$ при любом $n \in \mathbf{N}$;
2) не сходится равномерно на множестве $[0, +\infty)$.

XIII.3.5*. Пусть $f\colon [0, +\infty) \times [0, 1] \to [0, +\infty)$, $f \in C([0, +\infty) \times [0, 1])$, причем $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx = \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Доказать, что интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$ сходится равномерно на $[0, 1]$.

XIII.3.6. Доказать равномерную на множестве M сходимость интеграла

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2}\,dx, \quad M = \mathbf{R};$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\alpha^3 + x)\,e^{-\alpha x^2}dx, \quad M = [1,\ 10];$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x^\alpha}dx, \quad M = \left[\frac{1}{2},\ 2\right];$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\alpha\cos(\alpha^2 x)}{\alpha + x^\alpha}\,dx, \quad M = [2,\ 10];$

5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{(1 - x^2)^\alpha}\,dx, \quad M = \left[0,\ \frac{2}{3}\right];$

6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{|x - \alpha|^\alpha}, \quad M = \left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right];$

7) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{|\ln(\alpha x)|^\alpha}, \quad M = \left[\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right].$

XIII.3.7. Доказать равномерную на множестве M сходимость интеграла

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad M = \{\alpha \mid |\alpha| \geqslant \gamma\}, \quad \gamma > 0;$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha^2 x)}{x + \alpha}\,dx, \quad M = [1,\ +\infty);$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(\alpha x^3)\,dx, \quad M = \{\alpha \mid |\alpha| \geqslant 1\};$

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x^4)}{x}\,dx, \quad M = \left[\frac{1}{2},\ +\infty\right);$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\alpha e^x)\,dx, \quad M = \{\alpha \mid |\alpha| \geqslant 1\};$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,dx, \quad M = [\gamma, +\infty), \quad \gamma > 1;$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x \sin \frac{\alpha}{x}\,dx, \quad M = [0, 1].$

XIII.3.8. Пусть $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{R}([0, A])$ для любого $A > 0$ и для некоторого $\alpha_0 \in \mathbf{R}$

$$\sup_{A \geqslant 0} \left| \int\limits_0^A e^{-\alpha_0 x} f(x)\,dx \right| < +\infty.$$

Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx, \quad \alpha > \alpha_0,$$

сходится равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0 + \varepsilon, +\infty)$.

XIII.3.9. Доказать равномерную на множестве M сходимость интеграла

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\,dx, \quad M = [0, +\infty);$

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2}, \quad M = \mathbf{R};$

3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha^2 x)}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg}(\alpha x)\,dx, \quad M = \left\{\alpha \;\middle|\; |\alpha| \geqslant \frac{1}{2}\right\};$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2) \operatorname{arctg}(\alpha x)\,dx, M = \mathbf{R};$

5) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) 2^{\alpha x}\,dx, \quad M = (-\infty, 1].$

XIII.3.10. Пусть $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{R}([0, A])$ для любого $A > 0$ и для некоторого $\alpha_0 \in \mathbf{R}$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} f(x)\,dx.$$

Доказать, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx, \quad \alpha \geqslant \alpha_0,$$

сходится равномерно на $[\alpha_0, +\infty)$.

XIII.3.11. Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{\alpha\to0+}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx;$

2) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}=0;$

3) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)\operatorname{arctg}(\alpha x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx;$

5) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{\pi}{2};$

6) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^{\alpha}}dx=1;$

7) $\lim\limits_{\alpha\to0+}\int\limits_0^{+\infty}\alpha^2\sin x e^{-\alpha^2x^2}dx=0;$

8) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\alpha^2\sin x e^{-\alpha^2x^2}dx=\frac{1}{2}.$

XIII.3.12. Пусть $f\in C([0,+\infty))$, причем $f(0)=0$ и $\sup\{|f(x)|\mid |x|\geqslant0\}<+\infty$; g — абсолютно интегрируемая на $[0,+\infty)$ функция. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to0+}\int\limits_0^{+\infty}f\left(\frac{\alpha}{x}\right)g(x)\,dx=0.$$

XIII.3.13. Пусть $f\in C([0,+\infty))$ и абсолютно интегрируема на $[0,+\infty)$; $g\in C([0,+\infty))$ и ограничена на $[0,+\infty)$. Вычислить предел

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}f(x+\alpha)\,g(x)\,dx.$$

XIII.3.14. Доказать, что $\mathcal{J}\in C(M)$ в следующих случаях:

1) $\mathcal{J}(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\quad M=\mathbf{R};$

2) $\mathcal{J}(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin\sqrt{x}\,dx,\quad M=(0,+\infty);$

3) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx, \quad M=[0, +\infty);$

4) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\sin(\alpha x^2)\,dx, \quad M=[1, +\infty);$

5) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(x-\alpha)^2+1}\,dx, \quad M=\mathbf{R};$

6) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^{1}\ln^{\alpha}(1+x^2)\,dx, \quad M=\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right);$

7) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx, \quad M=[0, 1);$

8) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^{\alpha}x}, \quad M=[0, 1);$

9) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\sin\left(\frac{\alpha}{x^2}\right)\ln x\,dx, \quad M=\mathbf{R};$

10) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin(x^2)\,dx, \quad M=[0, +\infty);$

11) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^{1}\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{|x-\alpha|}}, \quad M=[0, 1];$

12) $\mathcal{I}(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}dx}{|\sin x|^{\alpha}}, \quad M=(0, 1).$

XIII.3.15. Пусть $\mathcal{I}(\alpha, \beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}e^{-\beta x}dx$, где $\alpha\in\mathbf{R}, \beta\geqslant 0$. Доказать следующие утверждения:

1) $\forall\alpha\in\mathbf{R}\ :\ \mathcal{I}(\alpha, \beta)\to\mathcal{I}(\alpha, 0), \quad \beta\to 0+;$

2) $\forall\beta>0\quad\forall\alpha\in\mathbf{R}\ :$

$$\frac{\partial\mathcal{I}(\alpha, \beta)}{\partial\alpha}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\beta x}\cos(\alpha x)\,dx=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2};$$

3) $\mathcal{I}(0, \beta)=0, \quad \beta\geqslant 0,$

$$\mathcal{I}(\alpha, \beta)=\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$$

для $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\beta > 0$;

4) $\forall \alpha > 0$: $\mathcal{J}(\alpha, 0) = \frac{\pi}{2}$, то есть

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

XIII.3.16. Пусть $f \in C^1([0, +\infty))$, причем f' монотонна на $[0, +\infty)$ и существует

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =: f(+\infty).$$

Доказать, что $\forall a > 0 \ \forall b > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = (f(+\infty) - f(0)) \ln \frac{b}{a}.$$

XIII.3.17. Вычислить следующие интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x^2} dx, \quad 0 < a < b;$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2} dx, \quad \alpha > 0;$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x^2} dx, \quad \alpha > 0;$

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0;$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(bx) - \operatorname{arctg}(ax)}{x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$

XIII.3.18. Пусть

$$\mathcal{J}(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x)\, dx, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Вычислить $\mathcal{J}'$ и доказать, что

$$\mathcal{J}'(\alpha) = -\frac{1}{2} \alpha \mathcal{J}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

С помощью значения интеграла

$$\mathcal{J}(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

вычислить $\mathcal{J}$.

XIII.3.19. Вычислить $\mathcal{J}'$ для функции

$$\mathcal{J}(\alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{1+x^3}\,dx, \quad \alpha \geqslant 0.$$

XIII.3.20. Предположим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_i(x)|^j\,dx < +\infty, \quad i, j = 1, 2;$$

$$\forall x \in \mathbf{R} \;\; : \;\; h(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u)\,f_2(u)\,du.$$

Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$.

§ 4. ГАММА- И БЕТА-ФУНКЦИИ

XIII.4.1. Для гамма-функции, определяемой равенством

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \quad \alpha > 0,$$

доказать следующие утверждения:

1) $\Gamma(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+\alpha)} + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \quad \alpha > 0;$

2) $\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x\,dx; \quad \alpha > 0;$

3) $\Gamma''(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}(\ln x)^2\,dx; \quad \alpha > 0;$

4) $\Gamma(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha \to 0+; \quad \Gamma(\alpha) \to +\infty, \quad \alpha \to +\infty;$

5) функция Γ строго выпукла вниз на $(0, +\infty)$;

6) функция Γ логарифмически выпукла вниз на $(0, +\infty)$ (то есть $\ln\Gamma$ — выпуклая вниз функция).

XIII.4.2. Выразить через значения Γ-функции интеграл

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^a}dx, \quad a > 0;$

2) $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx, \quad n \in \mathbf{N};$

3) $\int_0^{+\infty} x^a e^{-x^b}dx, \quad a > -1, \quad b > 0;$

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \exp\left(-\frac{a}{2x^2}\right) dx, \quad a > 0, \quad n \in \mathbf{N};$

5) $\int\limits_{0}^{1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^a dx, \quad a > -1.$

XIII.4.3. Выразить через значения B-функции интеграл

1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cos^b x dx, \quad a > -1, \quad b > -1;$

2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^a}}, \quad a > 0;$

3) $\int\limits_{0}^{1} x^a (1 - x^b)^c dx, \quad a > -1, \quad b > -1, \quad c > 0;$

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1} dx}{(1 + x)^{a+b}}, \quad a > 0, \quad b > 0;$

5) $\int\limits_{0}^{a} x^{b-1} (a - x)^{c-1} dx, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$

XIII.4.4. Доказать следующие равенства:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi};$

2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right) = \cos(\pi x), \quad x \in \mathbf{R};$

3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n - \frac{1}{4}\right)\left(n - \frac{3}{4}\right)}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2};$

4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\left(n - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\pi}};$

5) $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{1+n}\right)\left(1 - \frac{1}{5+n}\right) = 4.$

XIII.4.5. Вычислить предел

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\, \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x + 1)}$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} \mathrm{B}(\alpha, x), \quad \alpha > 0.$

Глава XIV ● КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ИНТЕГРАЛЫ ПО БРУСУ И ИХ СВОЙСТВА

XIV.1.1. Брус в пространстве $\mathbf{R}^m$ есть множество вида

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m],$$

где $\{a_i, b_i\} \subset \mathbf{R}$, $a_i < b_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$; $\times$ — знак декартового произведения множеств. Диаметр $d(Q)$ и мера (m-мерная) $\mathrm{m}(Q)$ бруса Q соответственно равны

$$d(Q) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^2}, \quad \mathrm{m}(Q) = \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k).$$

Пусть Q_1 и Q_2 — брусы в $\mathbf{R}^m$. В каких случаях множества

$$Q_1 \cap Q_2, \quad Q_1 \cup Q_2, \quad Q_1 \setminus Q_2$$

есть брусы $\mathbf{R}^m$? Рассмотреть случаи $m = 1, 2, 3$.

XIV.1.2. Пусть λ_n — разбиение бруса $Q = [0, 1] \times [0, 2]$, определяемое разбиениями отрезков $[0, 1]$ и $[0, 2]$ соответственно точками

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1;$$

$$0, \frac{2}{2^n}, \frac{2\cdot 2}{2^n}, \frac{2\cdot 3}{2^n}, \ldots, \frac{2(2^n-1)}{2^n}, 2; \quad n \in \mathbf{N}.$$

Определить

1) число элементов разбиения λ_n;
2) $|\lambda_n|$ — диаметр (мелкость) λ_n;
3) при каких m и n разбиение λ_n есть подразбиение λ_m.

XIV.1.3. Пусть λ_{mn} — разбиение бруса $Q = [0, 2] \times [0, 1]$, определяемое разбиениями λ_m и λ_n отрезков $[0, 2]$ и $[0, 1]$ соответственно точками

$$0, \frac{2}{m}, \frac{4}{m}, \ldots, \frac{2(m-1)}{m}, 2; \quad 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1,$$

где $\{m, n\} \subset \mathbf{N}$. Определить суммы Дарбу $L(f, \lambda_{mn})$, $U(f, \lambda_{mn})$, а также интегральную сумму $S(f, \lambda_{mn}, \{\vec{\xi}(\nu_1, \nu_2)\})$ для набора точек

$$\vec{\xi}(\nu_1, \nu_2) = \left(2\frac{\nu_1+1}{m}, \frac{\nu_2+1}{n}\right), \quad 0 \leqslant \nu_1 \leqslant m-1, \quad 0 \leqslant \nu_2 \leqslant n-1:$$

1) $f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$;

2) $f(x_1, x_2) = g(x_1) + h(x_2)$;

3) $f(x_1, x_2) = g(x_1) h(x_2)$; $(x_1, x_2) \in [0, 2] \times [0, 1]$,

где g и h — ограниченные на $[0, 2]$ и $[0, 1]$ соответственно функции, причем в случае 3) $g \geqslant 0$, $h \geqslant 0$.

XIV.1.4. Вычислить нижний и верхний интегралы по брусу $[0, 2] \times [0, 1]$ от функции

1) $f(x_1, x_2) = g(x_1) h(x_2)$, $(x_1, x_2) \in [0, 2] \times [0, 1]$,

где $g \in \mathbf{R}([0, 2])$, $h \in \mathbf{R}([0, 1])$ и g, h неотрицательны;

2) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 + x_2 \in \mathbf{Q}; \\ 0, & x_1 + x_2 \bar{\in} \mathbf{Q}. \end{cases}$

XIV.1.5. Пусть Q — брус, функция $f \in \mathbf{C}(Q)$ и $\forall \vec{x} \in Q :\ f(\vec{x}) \geqslant 0$. Доказать, что

$$\int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} \geqslant 0.$$

Если дополнительно $\exists \vec{x}^0 \in Q : f(\vec{x}^0) > 0$, то

$$\int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} > 0.$$

XIV.1.6*. Пусть Q — брус, функция f интегрируема по Q и равна 0 во всех точках непрерывности. Доказать, что

$$\int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} = 0.$$

XIV.1.7. Пусть $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ и для функции $f \in \mathbf{C}(Q)$ существует f_2' и $f_2' \in \mathbf{C}(Q)$. Доказать, что

$$\int_Q \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\, dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, b_2)\, dx_1 - \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, a_2)\, dx_1.$$

XIV.1.8. Пусть $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ и $f \in \mathbf{C}^2(Q)$. Вычислить интеграл

$$\int_Q \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\, dx_1 dx_2.$$

XIV.1.9. Пусть $Q = \prod_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$, $f \in \mathbf{C}(Q)$ и

$$Q(x_1, \ldots, x_m) := \prod_{i=1}^{m} [a_i, x_i], \quad (x_1, \ldots, x_m) \in Q.$$

Положим для $(x_1, \ldots, x_m) \in Q$

$$g(x_1, \ldots, x_m) := \int_{Q(x_1, \ldots, x_m)} f(\vec{u})\, d\vec{u}.$$

Вычислить для $k \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$\frac{\partial^k g(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_k}, \quad (x_1, \dots, x_m) \in Q.$$

XIV.1.10. Пусть $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $\{f, g\} \subset \mathbf{C}^2(Q)$, причем

$$f(x_1, a_2) = f(x_1, b_2) = 0, \quad x_1 \in [a_1, b_1];$$
$$g(a_1, x_2) = g(b_1, x_2) = 0, \quad x_2 \in [a_2, b_2].$$

Доказать равенство

$$\int_Q f(x_1, x_2) \frac{\partial^2 g(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_Q \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} g(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

XIV.1.11. Пусть $Q = [0, 1]^2$, $f \in \mathbf{C}(Q)$. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \int_Q f(x_1^n, x_2^n)\, dx_1 dx_2.$$

XIV.1.12. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1]^2)$ — положительная на $[0, 1]^2$ функция. При каждом $n \in \mathbf{N}$ пусть $\theta(n)$ — значение, при котором

$$\frac{1}{n} \int_{[0,1]^2} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{[0,\theta(n)]^2} f(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

Вычислить предел $\lim\limits_{n \to \infty} (n\theta^2(n))$.

XIV.1.13. Пусть $Q = [0, 1]^2$ и $f \in \mathbf{C}^1(Q)$. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} - \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)\right).$$

XIV.1.14*. Пусть $Q = [0, 1]^2$ и $f \in \mathbf{C}(Q)$. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\right)^2 \int_Q (x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2))^n f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

XIV.1.15*. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и $Q = [0, 1]^n$. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \int_Q f(x_1 x_2 \dots x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

XIV.1.16. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1]^2)$ и $Q(t) = [0, t]^2$ для $t \in [0, 1]$. Для функции

$$F(t) = \int_{Q(t)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2, \quad t \in [0, 1],$$

вычислить F'.

XIV.1.17. Пусть $Q(t) = [0, t]^2$, $t > 0$. Вычислить предел

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{Q(t)} \frac{dx_1 dx_2}{1 + \sqrt{x_1 + x_2}}.$$

XIV.1.18. Пусть $Q(t) = [0, t]^2$, $t > 0$. Вычислить предел

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\ln t} \int_{Q(t)} \frac{dx_1 dx_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

XIV.1.19. Для $Q = [0, 1]^m$ вычислить интеграл

$$\int\limits_Q \cos^2\left(\frac{\pi}{2m}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)\right) dx_1 \ldots dx_m.$$

XIV.1.20. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1])$, причем $f > 0$ на $[0, 1]$ и $Q = [0, 1]^m$. Вычислить интеграл

$$\int\limits_Q \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_k)}{f(x_1) + \cdots + f(x_m)} dx_1 \cdots dx_m$$

для $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

XIV.1.21. Вычислить интеграл

1) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]^2} \min(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$;

2) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]^2} \max(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$.

XIV.1.22. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 \in \mathbf{Q}; \\ 2x_2, & x_1 \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Проверить, что

1) интеграл $\displaystyle\int\limits_{[0,1]^2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ не существует;

2) $\displaystyle\int\limits_0^1 \left\{\int\limits_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_2\right\} dx_1 = 1$.

§ 2. МНОЖЕСТВА, ИЗМЕРИМЫЕ В СМЫСЛЕ ЖОРДАНА, И МЕРА ЖОРДАНА

XIV.2.1. С помощью определения доказать измеримость и найти меру множества

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1\}.$$

XIV.2.2. Для множества

$$A = \{(x_1, x_2) \mid \{x_1, x_2\} \subset \mathbf{Q} \cap [0, 1]\}$$

определить внутреннюю и внешнюю меру.

XIV.2.3. Доказать, что счетное объединение измеримых в смысле Жордана множеств не обязательно измеримо в смысле Жордана.

XIV.2.4. Для фиксированного $\alpha \in (0, 1)$ определим множество $K \subset [0, 1]$ следующим образом. Сначала удалим из $[0, 1]$ интервал $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha\right)$. Затем из двух оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha\right]$, $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha, 1\right]$ аналогичным образом удалим открытые

интервалы, каждый из которых имеет длину $\frac{1}{8}\alpha$. На следующем шаге из четырех оставшихся отрезков удалим аналогично интервалы, каждый из которых имеет длину $\frac{1}{32}\alpha$, и т. д. Множество K состоит из точек отрезка $[0, 1]$, оставшихся после бесконечной последовательности удалений **(канторово множество)**. Доказать, что

1) K компактно и несчетно,
2) K не измеримо по Жордану.

XIV.2.5. Пусть A — замкнутое счетное ограниченное подмножество $\mathbf{R}$. Доказать, что A измеримо в смысле Жордана и имеет меру 0.

XIV.2.6. Пусть A и B — измеримые в смысле Жордана подмножества $\mathbf{R}^m$. Доказать следующие утверждения:

1) $\mathbf{m}(A \cup B) = \mathbf{m}(A) + \mathbf{m}(B) - \mathbf{m}(A \cap B)$;
2) $\mathbf{m}(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^0 = \varnothing$;
3) $\mathbf{m}(A \cup B) = \mathbf{m}(A) \quad \Leftrightarrow \quad (B \setminus A)^0 = \varnothing$;
4) $\mathbf{m}(A \cup B) = 0$, если $\mathbf{m}(A) = 0$, $\mathbf{m}(B) = 0$.

XIV.2.7. Доказать измеримость следующих множеств:

1) $\{(x_1, x_2) \mid 1 \leqslant x_1 \leqslant 2, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant \ln x_1\}$;
2) $\{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant e^{x_2}, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$;
3) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in [1, 2] \times [0, 1], \ 0 \leqslant x_3 \leqslant \ln x_1\}$;
4) $\{(x_1, x_2) \mid 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\}$;
5)* $\left\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant \left|\sin \frac{1}{x_1}\right|\right\}$.

XIV.2.8. Для $f \in \mathbf{C}([a, b])$ пусть

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [a, b], \quad x_2 = f(x_1)\}.$$

Доказать, что множество Γ измеримо в смысле Жордана и имеет плоскую меру Жордана 0.

XIV.2.9. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subset \mathbf{C}^1([\alpha, \beta])$ и

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \quad (\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 > 0.$$

Регулярная кривая есть множество

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Доказать, что Γ измеримо и имеет плоскую меру Жордана 0.

XIV.2.10. Пусть $f \in \mathbf{C}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$. Доказать, что поверхность в $\mathbf{R}^3$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \quad x_3 = f(x_1, x_2)\}$$

есть измеримое множество и имеет объем 0.

XIV.2.11. Пусть $A = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$,

$$B_n = \left\{(x_1, x_2) \;\middle|\; \left(x_1 - \frac{1}{n}\right)^2 + x_2^2 \leqslant \frac{1}{4^{2n}}\right\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доказать измеримость множества $A \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

XIV.3.1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_A x_1 x_2^2 dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant a^2, \quad x_1 \geqslant 0\}, \quad a > 0.$$

XIV.3.2. Для функции $f \in \mathbf{C}([0, +\infty)^2)$ и $t \geqslant 0$ пусть

$$A(t) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \leqslant t\},$$

$$F(t) = \int\limits_{A(t)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

Вычислить F'.

XIV.3.3. Для функции $f \in \mathbf{C}([0, +\infty)^2)$ и $t \geqslant 0$ пусть

$$A(t) = \{(x_1, x_2) \mid t \leqslant x_1 \leqslant t + 1, \quad t \leqslant x_2 \leqslant t + (x_1 - t)(1 - x_1 + t)\},$$

$$F(t) = \int\limits_{A(t)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

Вычислить F'.

XIV.3.4. Пусть $f \in \mathbf{R}([0, 1])$. Доказать равенство

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^1 f(u)\, du \right) dx = \int\limits_0^1 u f(u)\, du.$$

XIV.3.5. Вычислить следующие интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x_1^2}} (1 - x_2^2)^{\frac{3}{2}}\, dx_2 \right) dx_1;$

2) $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x_2^{\frac{1}{2}}}^{x_2^{\frac{1}{5}}} \sqrt{1 - x_1^3}\, dx_1 \right) dx_2;$

3) $\displaystyle\int\limits_\pi^{2\pi} \left(\int\limits_{x_2 - \pi}^{\pi} \frac{\sin x_1}{x_1}\, dx_1 \right) dx_2;$

4) $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x_1}^1 x_1^3 \cos(x_2^3)\, dx_2 \right) dx_1;$

5) $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\arcsin x_2}^{\arcsin\sqrt{x_2}} \frac{x_1}{\sin x_1}\, dx_1 \right) dx_2.$

XIV.3.6. Изменить порядок интегрирования

1) $$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int\limits_{-1}^{\sin x_1} f(x_1, x_2)\,dx_2 \right) dx_1 + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \left(\int\limits_{\sin x_1}^{1} f(x_1, x_2)\,dx_2 \right) dx_1;$$

2) $$\int\limits_{-2}^{0} \left(\int\limits_{-\sqrt{4-x_1^2}}^{\sqrt{4-x_1^2}} f(x_1, x_2)\,dx_2 \right) dx_1 + \int\limits_{0}^{2} \left(\int\limits_{-\sqrt{4-x_1^2}}^{-\sqrt{2x_1-x_1^2}} f(x_1, x_2)\,dx_2 \right) dx_1 +$$

$$+ \int\limits_{0}^{2} \left(\int\limits_{\sqrt{2x_1-x_1^2}}^{\sqrt{4-x_1^2}} f(x_1, x_2)\,dx_2 \right) dx_1.$$

XIV.3.7. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2+a+b}} \sum_{\substack{j\geqslant 1,\,k\geqslant 1\\ j+k\leqslant n}} j^a k^b, \quad a>0, \quad b>0.$$

XIV.3.8. Вычислить следующие интегралы:

1) $$\int\limits_A x_1 x_2\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

$$A = \{(x_1,\ x_2,\ x_3) \mid x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_3 \leqslant 1\};$$

2) $$\int\limits_A (x_1 x_2 x_3)^2\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

$$A = \{(x_1,\ x_2,\ x_3) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant 1\};$$

3) $$\int\limits_A dx_1\,dx_2 \ldots dx_k,$$

$$A = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_k \leqslant 1\}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

XIV.3.9. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, +\infty))$ и $t > 0$. Доказать, что

1) $$\int\limits_0^t \left(\int\limits_{x_1}^t \left(\ldots \left(\int\limits_{x_{k-2}}^t \left(\int\limits_{x_{k-1}}^t f(x_k)\,dx_k \right) dx_{k-1} \right) \ldots \right) dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int\limits_0^t f(u) \frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\,du, \quad k \geqslant 2;$$

2) $$\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{x_1} \left(\int\limits_0^{x_2} \left(\ldots \left(\int\limits_0^{x_{k-1}} \prod_{i=1}^{k} f(x_i)\,dx_k \right) dx_{k-1} \right) \ldots \right) \right) dx_1 = \frac{1}{k!} \left(\int\limits_0^t f(u)\,du \right)^k,$$

$k \geqslant 2$.

XIV.3.10. Пусть A — измеримое компактное подмножество $\mathbf{R}^k$, обладающее следующим свойством линейной связности: для любых

точек $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A$ существуют точки $\{\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}\} \subset A$ такие, что отрезки, соединяющие точки $\vec{x}^{(i)}$ и $\vec{x}^{(i+1)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $\vec{x}^0 = \vec{x}$, $\vec{x}^{(n+1)} = \vec{y}$, лежат в A. Для функции $f \in \mathbf{C}(A)$ доказать теорему о среднем значении:

$$\exists \vec{\theta} \in A \quad : \quad \int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} = f(\vec{\theta})\, \mathrm{m}(A).$$

XIV.3.11. Вычислить интеграл

$$\int\limits_A \operatorname{sign}(x_1^2 - x_2^2 + 2)\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\}.$$

§ 4. ФОРМУЛА ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

XIV.4.1. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int\limits_A x_1 x_2^2\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4, \quad x_1 \geqslant 0\};$

2) $\int\limits_A \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2x_1\};$

3) $\int\limits_A \arcsin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2\pi}\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid \pi^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\pi^2\}.$

XIV.4.2. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{i \geqslant 0,\, j \geqslant 0 \\ i^2 + j^2 \leqslant n^2}} \frac{1}{n^2 + i^2 + j^2}.$$

XIV.4.3. Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{\ln t} \int\limits_{A(t)} \frac{dx_1 dx_2}{1 + x_1^2 + x_2^2},$

$A(t) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant t^2\};$

2) $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{2-2a}} \int\limits_{A(t)} \frac{dx_1 dx_2}{1 + (x_1^2 + x_2^2)^a}, \quad a \in (0, 1).$

XIV.4.4. Пусть

$$F(t) = \int\limits_{A(t)} |x_1 x_2|\, dx_1 dx_2,$$

$$A(t) = \{(x_1, x_2) \mid t^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4t^2\}, \quad t \geqslant 0.$$

Вычислить F'.

XIV.4.5. Пусть функция $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^2)$ и

$$F(t) = \int\limits_{A(t)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2,$$

$$A(t) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant t^2\}, \quad t \geqslant 0.$$

Вычислить F'.

XIV.4.6. Проверить, что при каждом $t \geqslant 1$ множество

$$A(t) = \{(x_1, x_2) \mid t^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant t^4, \quad tx_1 \leqslant x_2 \leqslant 2tx_1\}$$

измеримо и для функции

$$F(t) = \mathbf{m}(A(t)), \quad t \geqslant 1,$$

найти F'.

XIV.4.7. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{A(t)} x_1 x_2\, dx_1 dx_2,$$

$$A(t) = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - t)^2 + (x_2 - t)^2 \leqslant t^3\}, \quad t \geqslant 0.$$

XIV.4.8. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int\limits_A e^{a(x_1+x_2)^2} dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 \leqslant 1\};$

2) $\int\limits_A x_2^2\, dx_1 dx_2,$

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad 1 \leqslant x_1 x_2 \leqslant 3, \quad x_1 \leqslant x_2 \leqslant 3x_1\};$$

3) $\int\limits_A x_1\, dx_1 dx_2,$

$$A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2, \quad x_1^2 - x_2^2 \leqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0\};$$

4) $\int\limits_A (x_1^2 + x_2^2)^2\, dx_1 dx_2,$

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad 1 \leqslant x_1^2 - x_2^2 \leqslant 2, \quad 1 \leqslant x_1 x_2 \leqslant 2\}.$$

XIV.4.9. В интеграле

$$\int\limits_1^2 \left(\int\limits_{x_1^2}^{4x_1^2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1$$

перейти к новым переменным $u_1 = x_1, \quad u_2 = \dfrac{x_2}{x_1^2}$.

XIV.4.10. Вычислить интеграл

$$\int\limits_A x_1^2\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \quad x_3^2 + x_4^2 \leqslant 1\}.$$

$$F(t) = \int\limits_{A(t)} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$A(t) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid t^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant (t+1)^2\}, \quad t \geqslant 0.$$

Найти F'.

XIV.4.12. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int\limits_A dx_1 dx_2 \ldots dx_k,$

$$A = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad x_1 + \cdots + x_k \leqslant 1\}$$

(объем k-мерного симплекса);

2) $\int\limits_A (x_1 + \cdots + x_k)^a\, dx_1 \ldots dx_k,$ где $a > 0$ и множество A из 1).

XIV.4.13. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и A — множество, введенное в задаче XIV.4.12. Доказать равенство

$$\int\limits_A f(x_1 + \cdots + x_k)\, dx_1 \ldots dx_k = \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_0^1 f(u)\, u^{k-1} du.$$

§ 5. НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

XIV.5.1. Пусть $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1\}$, $f \in \mathbf{C}(A)$, причем

$$\inf_A |f| > 0, \quad \sup_A |f| < +\infty.$$

Определить, при каких значениях $a \in \mathbf{R}$ сходится интеграл

$$\int\limits_A \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^a}\, dx_1 dx_2.$$

XIV.5.2. Пусть $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, $f \in \mathbf{C}(A)$, причем

$$\inf_A |f| > 0, \quad \sup_A |f| < +\infty.$$

Определить, при каких значениях $a \in \mathbf{R}$ сходится интеграл

$$\int\limits_A \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^a}\, dx_1 dx_2.$$

XIV.5.3. Определить, при каких значениях a и b из $\mathbf{R}$ сходится интеграл

1) $\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{dx_1 dx_2}{(1 + |x_1|^a)(1 + |x_2|^b)}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{dx_1dx_2}{(1+x_1^2+x_1x_2+x_2^2)^a}$;

3) $\displaystyle\int\limits_{A} \frac{dx_1dx_2}{x_1^a x_2^b}$, $\quad A = \{(x_1,\ x_2) \mid x_1 \geqslant 1, \quad x_1x_2 \geqslant 1\}$;

4) $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{dx_1dx_2}{(1+x_1^4+x_2^4)^a}$.

XIV.5.4. Сходится ли интеграл

1) $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^2} \sin(x_1^2+x_2^2)\, dx_1dx_2$;

2) $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^2} \sin(x_1^4+x_2^4)\, dx_1dx_2$?

XIV.5.5. Вычислить следующие интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{|x_1|\, dx_1dx_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)} dx_1dx_2$.

XIV.5.6. Выразить через значения гамма-функции величину интеграла

1) $\displaystyle\int\limits_{A} (x_1^2+x_2^2)^a e^{-x_1^2-x_2^2} dx_1dx_2$, $\quad A = [0,\ +\infty)^2$, $\quad a > -1$;

2) $\displaystyle\int\limits_{A} \exp(-(x_1^2+x_2^2)^a)\, dx_1dx_2$, $\quad A = [0,\ +\infty)^2$, $\quad a > 0$;

3) $\displaystyle\int\limits_{A} \exp(-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^a)\, dx_1dx_2dx_3$, $\quad A = [0,\ +\infty)^3$, $\quad a > 0$;

4) $\displaystyle\int\limits_{A} (x_1^2+x_2^2)^a (1-x_1^2-x_2^2)^b\, dx_1dx_2$, $\quad a > -1$, $\quad b > -1$,

$$A = \{(x_1,\ x_2) \mid x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1^2+x_2^2 \leqslant 1\};$$

5) $\displaystyle\int\limits_{A} e^{-x_1} x_2^a dx_1dx_2$, $\quad A = \{(x_1,\ x_2) \mid 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1\}$, $\quad a > 0$;

6) $\displaystyle\int\limits_{A} (x_1+x_2)^a e^{-x_1-x_2} dx_1dx_2$, $\quad A = [0,\ +\infty)^2$, $\quad a > 0$;

7) $\int\limits_{A} (1-x_1)^a x_2^b dx_1 dx_2$, $A=\{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant 1\}$, $a>-1$, $b>-1$;

8) $\int\limits_{A} x_1^a x_2^b dx_1 dx_2$, $a>-1$, $b>-1$,

$$A=\{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1-x_1\};$$

9) $\int\limits_{A} x_1^{a-1} x_2^{b-1} (1-x_1-x_2)^{c-1} dx_1 dx_2$, $a>0$, $b>0$, $c>0$,

$$A=\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_1+x_2 \leqslant 1\};$$

10) $\int\limits_{A} x_3^a dx_1 dx_2 dx_3$, $a>-1$,

$$A=\{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leqslant x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant 1\}.$$

Глава XV • ИНТЕГРАЛЫ ПО МНОГООБРАЗИЯМ И ТЕОРЕМА СТОКСА

§ 1. ДОПУСТИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

XV.1.1. Пусть G — открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^p$ с евклидовым расстоянием и отображение $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_p) : G \to \mathbf{R}^p$ удовлетворяет условиям:

1) $\vec{g} \in \mathbf{C}^1(G)$;
2) $\vec{g}$ взаимно однозначно на G;
3) либо

$$\forall \vec{x} \in G \quad : \quad \frac{\partial(g_1, \ldots, g_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)}(\vec{x}) > 0,$$

либо

$$\forall \vec{x} \in G \quad : \quad \frac{\partial(g_1, \ldots, g_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)}(\vec{x}) < 0.$$

Такое **отображение** называется **регулярным или диффеоморфизмом.** Доказать, что регулярное отображение имеет обратное, которое также регулярно, и что суперпозиция регулярных отображений есть регулярное отображение.

XV.1.2. Пусть G — множество в положительном x-пространстве. Доказать регулярность отображения $\vec{g} : G \to \mathbf{R}^2$ и определить знак y-пространства, в котором лежит $\vec{g}(G)$, если

1) $G = \mathbf{R}^2, \quad \vec{y} = \vec{g}(x_1, x_2) = (x_1 + 1, 2x_2 - 1)$;

2) $G = \mathbf{R}^2, \quad \vec{y} = \vec{g}(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$;

3) $G = \mathbf{R}^2, \quad \vec{y} = \vec{g}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$;

4) $G = (0, +\infty)^2, \quad \vec{y} = \vec{g}(x_1, x_2) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \ \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}\right)$;

5) $G = (0, +\infty)^2, \quad \vec{y} = \vec{g}(x_1, x_2) = \left(x_1 x_2, \ \frac{x_1}{x_2}\right)$.

XV.1.3. Пусть G — множество в положительном y-пространстве $\mathbf{R}^2$ и ω — дифференциальная форма на G. Определить вид формы ω

в координатах x_1, x_2, если

1) $\omega = f(y_1, y_2)\,dy_1 \wedge dy_2$, $f \in \mathbf{C}(G)$,

$$y_i = g_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2;$$

2) $\omega = dy_1 + (y_1 + y_2)\,dy_2$,

$$G = \{(y_1, y_2) \mid y_1 > 0, \quad y_2 > 0, \quad y_1y_2 = 1\}, \quad x_1 = y_1y_2, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_1};$$

3) $\omega = (y_1 + y_2)\,dy_1 + (y_1 - y_2)\,dy_2$,

$$G = \{(y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 = 1\}, \quad x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2.$$

XV.1.4. Пусть Γ — ориентированная граница квадрата $[0, 1]^2$. Доказать, что на Γ справедливо равенство

$$x_2(1 - x_2)\,dx_1 + x_1x_2dx_2 = x_2dx_2.$$

XV.1.5. Пусть $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1x_2 = 1\}$ — ориентированная кривая. Доказать, что на Γ справедливо равенство

$$2x_1x_2dx_1 + x_1^2(x_1^2 + x_2^2)\,dx_2 = -(x_1 - x_2)^2\,dx_1.$$

XV.1.6. Пусть Γ — ориентированная граница треугольника с вершинами в точках $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Доказать, что на Γ справедливо равенство

$$(x_1x_2 + x_3)\,dx_1 + (x_1x_2 + x_3^2)\,dx_2 + x_3dx_3 = -x_2x_3dx_2.$$

XV.1.7. Пусть

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t, \quad x_3 = t, \quad t \in \mathbf{R}\}$$

— ориентированная винтовая линия. Доказать, что на Γ справедливо равенство

$$x_1dx_1 + x_2dx_2 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3)\,dx_3 = (1 + x_3)\,dx_3.$$

XV.1.8. Пусть S — ориентированная граница куба $[0, 1]^3$. Доказать, что на S справедливо равенство

$$x_2x_3dx_2 \wedge dx_3 + x_3x_1dx_3 \wedge dx_1 + (x_1x_2 + x_3)\,dx_1 \wedge dx_2 = x_3dx_1 \wedge dx_2.$$

XV.1.9. Пусть S — ориентированная граница симплекса с вершинами $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Доказать, что на S справедливо равенство

$$x_1x_2x_3(dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_2) =$$
$$= 3x_1x_2(1 - x_1 - x_2)\,dx_1 \wedge dx_2.$$

XV.1.10. Пусть S — ориентированная поверхность цилиндра $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$. Доказать, что на S $x_1x_2dx_2 \wedge dx_3 + x_2^2dx_3 \wedge dx_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^4}\,dx_1 \wedge dx_2 = dx_3 \wedge dx_1$.

XV.1.11. Вычислить внешний дифференциал формы (предполагается, что коэффициенты имеют непрерывные производные первого порядка)

1) $\omega = P(x_1, x_2)\,dx_1 + Q(x_1, x_2)\,dx_2$;

2) $\omega = P(\vec{x})\,dx_1 + Q(\vec{x})\,dx_2 + R(\vec{x})\,dx_3, \quad \vec{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3);$

3) $\omega = P(\vec{x})\,dx_2 \wedge dx_3 + Q(\vec{x})\,dx_3 \wedge dx_1 + R(\vec{x})\,dx_1 \wedge dx_2,$

$\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3);$

4) $\omega = \sum_{j=1}^{m} f_j(x_j)\,dx_j;$

5) $\omega = \sum_{j=1}^{m} f_j dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1};$

6) $\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1}\left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_j} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots$

$\cdots \wedge dx_m.$

XV.1.12. Пусть ω — дифференциальная форма на G с коэффициентами, принадлежащими классу $C^2(G)$. Доказать, что $d(d\omega) = 0$.

§ 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА. ФОРМУЛЫ ГРИНА, ГАУССА—ОСТРОГРАДСКОГО И СТОКСА

XV.2.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$ от формы ω по ориентированной кривой Γ:

1) $\omega = x_1x_2dx_1 - x_1^2dx_2$, Γ — пробегаемая по часовой стрелке граница треугольника с вершинами $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$;

2) $\omega = x_1x_2dx_1 - x_1^2x_2dx_2$, Γ — пробегаемая против часовой стрелки граница множества, ограниченного кривыми $x_2 = x_1^2$, $x_2 = x_1 + 2$;

3) $\omega = \sqrt{x_1}\,dx_2 + (x_2 + 1)\,dx_1$, Γ — пробегаемая по часовой стрелке граница множества, ограниченного кривыми $x_2 = \sqrt{x_1}$, $x_2 = 0$, $x_1 = 1$;

4) $\omega = x_1^3dx_2 - x_2dx_1$, Γ — пробегаемая по часовой стрелке граница множества, ограниченного кривыми $x_2 = x_1^3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;

5) $\omega = (x_1x_2 - x_2)\,dx_1 + (x_1x_2 + x_1)\,dx_2$, Γ — пробегаемая по часовой стрелке граница множества

$$\left\{(x_1,\ x_2) \ \middle|\ x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} \leqslant 1, \quad x_2 \geqslant 0\right\};$$

6) $\omega = x_1x_3dx_1 + x_1x_2dx_2 + x_1x_3dx_3$, Γ — граница треугольника с вершинами $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, пробегаемая в направлении $(1,0,0) \to (0,0,1) \to (0,1,0) \to (1,0,0)$.

XV.2.2. Для $t > 0$ пусть

$$f(t) = \int\limits_{\Gamma(t)} (x_1x_2dx_1 + x_2dx_2),$$

где $\Gamma(t)=\{(x_1, x_2)\mid x_1^2+x_2^2=t^2, \quad x_1\geqslant 0\}$ с началом в точке $(0, t)$. Найти f'.

XV.2.3. Вычислить поверхностный интеграл $\int\limits_S \omega$ от формы ω по ориентированной поверхности S:

1) $\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_2 dx_1 \wedge dx_3$, S — внешняя сторона поверхности куба $[0, 1]^3$;

2) $\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_2 dx_2 \wedge dx_3 + x_2x_3 dx_1 \wedge dx_3$, S — внешняя сторона поверхности симплекса

$$\{(x_1, x_2, x_3)\mid x_i\geqslant 0, \quad 1\leqslant i\leqslant 3; \quad x_1+x_2+x_3\leqslant 1\};$$

3) $\omega = x_3^2 dx_2 \wedge dx_3$, S — верхняя сторона следующей части поверхности конуса

$$\{(x_1, x_2, x_3)\mid x_1^2+x_2^2=x_3^2, \quad 0<x_3<1\};$$

4) $\omega = x_3 dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1$, S — внешняя сторона поверхности полушара

$$\{(x_1, x_2, x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 1, \quad x_3\geqslant 0\};$$

5) $\omega = x_1x_3 dx_1 \wedge dx_2$, S — внешняя сторона поверхности цилиндра $\{(x_1, x_2\ x_3)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1, \quad 0\leqslant x_3\leqslant 4\}$;

6) $\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1$, S — верхняя сторона поверхности $\{(x_1, x_2, x_3)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1, \quad x_3=x_1^2+x_2^2\}$.

XV.2.4. Для $t>0$ пусть

$$f(t)=\int\limits_{S(t)}(x_1x_2x_3 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1),$$

где $S(t)$ — верхняя сторона полусферы

$$\{(x_1, x_2, x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=t^2, \quad x_3\geqslant 0\}.$$

Вычислить f'.

XV.2.5. Пусть G — множество точек в плоскости, для которого ∂G — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, пробегаемая против часовой стрелки. С помощью формулы Грина доказать, что

1) $\mathrm{m}(G)=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\partial G}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$;

2) $\int\limits_G (x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2 = \dfrac{1}{3}\int\limits_{\partial G}(x_1^3 dx_2 - x_2^3 dx_1)$;

3) $\int\limits_G \varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1dx_2 = -\int\limits_G \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1dx_2 + \int\limits_{\partial G}\varphi\psi dx_2$;

$\int\limits_G \varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_1dx_2 = -\int\limits_G \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_1dx_2 - \int\limits_{\partial G}\varphi\psi dx_1$

для функций $\{\varphi, \psi\}\subset C^1(G)$.

XV.2.6. Пусть $G = \{(x_1, x_2) \mid (x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ и

$$\omega = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_1^2 + x_2^2 \neq 0.$$

Доказать, что

1) $d\omega = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 \neq 0;$

2) $\int\limits_{\partial G} \omega = 2\pi$ (∂G пробегается против часовой стрелки).

Объяснить, почему полученный результат не противоречит формуле Грина.

XV.2.7. Пусть Γ — эллипс

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0,$$

пробегаемый против часовой стрелки. С помощью формулы Грина вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$, где

1) $\omega = x_1^2 x_2^2 dx_1$; 2) $\omega = x_2 dx_1 - x_1 dx_2$;

3) $\omega = x_2 \cos x_1 dx_1 + (\cos x_2 + \sin x_1) dx_2$.

XV.2.8. С помощью формулы Гаусса — Остроградского вычислить интеграл $\int\limits_{S} \omega$, где

1) $\omega = (x_2 + x_3) dx_2 \wedge dx_3 + (x_3 + x_1) dx_3 \wedge dx_1 + (x_1 + x_2) dx_1 \wedge dx_2$.

S — внешняя сторона симплекса

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1\};$$

2) $$\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2,$$

где $\{P, Q, R\} \subset \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^3)$, S — из 1);

3) $\omega = x_3 dx_1 \wedge dx_2$, S — внешняя сторона поверхности тела

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4\}.$$

XV.2.9. Пусть G — множество в $\mathbf{R}^3$, S — внешняя сторона поверхности G, к которым применима формула Гаусса — Остроградского, и $\{\varphi, \psi\} \subset \mathbf{C}^1(G)$. Доказать равенство

$$\int\limits_{G} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \int\limits_{S} \varphi\psi dx_2 \wedge dx_3 - \int\limits_{G} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

XV.2.10. С помощью формулы Ньютона — Лейбница доказать формулу Гаусса — Остроградского в следующих случаях:

1) $G = \prod_{i=1}^{3} [a_i, b_i]$, $\{P, Q, R\} \subset \mathbf{C}^1(G)$;

2) $G = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1\}$, $\{P, Q, R\} \subset \mathbf{C}^1(G)$.

XV.2.11. Пусть $\omega = x_2x_3dx_1 + x_1dx_2 + dx_3$ и S — внешняя сторона поверхности шара с центром в точке $(0, 0, 0)$ и радиусом 1. Вычислить интеграл $\int\limits_S d\omega$.

XV.2.13. Пусть

$\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = \cos\varphi, \quad x_2 = \sin\varphi, \quad x_3 = \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]\}$

—часть винтовой линии, пробегаемой в направлении возрастания параметра φ, и

$$\omega = 2x_1x_2e^{x_3}dx_1 + x_1^2e^{x_3}dx_2 + x_1^2x_2e^{x_3}dx_3.$$

Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma \omega$.

XV.2.14. Определить, является ли замкнутой в G форма ω

1) $\omega = x_2dx_1, \quad G = \mathbf{R}^2$;

2) $\omega = x_1x_2dx_1 + \frac{1}{2}x_1^2dx_2, \quad G = \mathbf{R}^2$;

3) $\omega = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}dx_2, \quad G = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

4) $\omega = 2dx_1 + dx_3, \quad G = \mathbf{R}^3$;

5) $\omega = x_1dx_1 - x_2x_3dx_2, \quad G = \mathbf{R}^3$;

6) $\omega = dx_1 + dx_2 + x_3dx_3, \quad G = \mathbf{R}^3$;

7) $\omega = x_1dx_1 + x_1x_3dx_2 + x_1x_2dx_3, \quad G = \mathbf{R}^3$;

8) $\omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{3}{2}}(x_1dx_2 \wedge dx_3 + x_2dx_3 \wedge dx_1 + x_3dx_1 \wedge dx_2)$, $G = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

XV.2.15. Доказать, что форма ω из задачи XV.2.14, 2), 4), 6) точна в G. Доказать также, что форма ω (XV.2.14, 3)) точна в $G_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}$, а форма ω (XV.2.14, 8)) точна в $G_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 > 0\}$. Определить все функции f, для которых $\omega = df$ в G или G_1.

XV.2.16. Пусть Γ — окружность в $\mathbf{R}^2$ с центром в точке $(0, 0)$, пробегаемая против часовой стрелки. Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma \omega$ для формы ω из задачи XV.2.14, 3). С помощью полученного результата

доказать, что множество

$$\{(x_1,\ x_2)\ \mid\ 0 < x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$$

не является односвязным.

XV.2.17. Пусть S — внешняя сторона поверхности сферы в $\mathbf{R}^3$ с центром в точке $(0, 0, 0)$. Вычислить интеграл $\int_S \omega$ для формы ω из задачи XV.2.14, 8). Доказать, что множество

$$\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\ \mid\ 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4\}$$

не является односвязным.

XV.2.18. Доказать, что форма

$$\omega = \sin(x_2^2)\,dx_1 + 2x_1x_2\cos(x_2^2)\,dx_2$$

является точной в $\mathbf{R}^2$, и найти функцию f, для которой $\omega = df$.

XV.2.19. Пусть функции $\{f_1,\ f_2,\ f_3\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{R})$ и

$$\omega = f_1(x_1)\,dx_1 + f_2(x_2)\,dx_2 + f_3(x_3)\,dx_3.$$

Доказать, что форма ω точна в $\mathbf{R}^3$, и найти функцию f, для которой $\omega = df$.

XV.2.20. При каком условии на функцию $f \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^3)$ форма

$$\omega = f(x_1,\ x_2,\ x_3)\,dx_1$$

точна в $\mathbf{R}^3$?

§ 3. ДЛИНА ДУГИ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

XV.3.1. Вычислить длину дуги Γ, если

1) $\Gamma = \left\{(x_1,\ x_2)\ \mid\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\quad x_2 = \frac{1}{2}x_1^2\right\}$;

2) $\Gamma = \{(x_1,\ x_2)\ \mid\ x_1 = \varphi\cos\varphi,\quad x_2 = \varphi\sin\varphi,\quad \varphi \in [0,\ 2\pi]\}$;

3) $\Gamma = \{(x_1,\ x_2,\ x_3)\ \mid\ x_1 = a\cos\varphi,\quad x_2 = a\sin\varphi,\quad x_3 = b\varphi;$
$\varphi \in [0,\ 2\pi]\},\quad \{a,\ b\} \subset (0,\ +\infty)$.

XV.3.2. Вычислить площадь поверхности S, если

1) $S = \{(x_1,\ x_2,\ x_3)\ \mid\ x_3 = x_1x_2,\quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$;

2) $S = \{(x_1,\ x_2,\ x_3)\ \mid\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,\quad x_3 \geqslant r_0\};\quad 0 \leqslant r_0 \leqslant r$;

3) $S = \{(x_1,\ x_2,\ x_3)\ \mid\ x_1 = r\cos\varphi,\quad x_2 = r\sin\varphi,\quad x_3 = \varphi,\quad r \in [0,\ 1],$ $\varphi \in [0,\ 2\pi]$.

XV.3.3. Вычислить интеграл $\int_\Gamma f\,d\,l$, где

1) $f(x_1,\ x_2) = x_1^2x_2$, Γ — граница треугольника с вершинами $(0,\ 0)$, $(2,\ 1)$ и $(1,\ 2)$;

2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$;

3) $f(x_1, x_2) = x_1$, Γ — граница множества $\{(x_1, x_2) \mid x_2 \geqslant x_1^2,$ $x_2 \leqslant x_1 + 2\}$;

4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^3$, Γ — граница треугольника с вершинами $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$;

5) $f(x_1, x_2) = x_1$, Γ — кривая, заданная в задаче XV.3.1, 1);

6) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, Γ — кривая, заданная в задаче XV.3.1, 2);

7) $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$, Γ — кривая, заданная в задаче XV.3.1, 3).

XV.3.4. Вычислить интеграл $\int\limits_S f d\sigma$, если

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$, S — поверхность симплекса

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1\};$$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = |x_1| x_3$, S — поверхность цилиндра

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_3 \leqslant 2\};$$

3) $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$, S — поверхность, определенная в задаче XV.3.2, 1);

4) $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, S — поверхность, определенная в задаче XV.3.2, 3).

Глава XVI • ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РЯДОВ И ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

XVI.1.1. Скалярное произведение функций $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$ равно

$$(f, g) := \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt.$$

1) Определить значения $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$, при которых функции

$$f(t) = 1 + \alpha t, \quad g(t) = 1 + \beta t, \quad t \in [0, 1],$$

ортогональны в $\mathbf{R}([0, 1])$;

2) при каких значениях $\{m, n\} \subset \mathbf{N}$ функции $f(t) = \sin mt$, $g(t) = \cos nt$, $t \in [0, 2\pi]$, ортогональны в $\mathbf{R}([0, 2\pi])$;

3) при каких значениях $\{m, n\} \subset \mathbf{N}$, $m \geqslant n$, функции $f(t) = \sin mt$, $g(t) = \cos nt$, $t \in \left[0, \frac{5}{2}\pi\right]$ ортогональны в $\mathbf{R}\left(\left[0, \frac{5}{2}\pi\right]\right)$;

4) при $n \geqslant 2$ пусть для $t \in [0, 1]$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)}(t), \quad g(t) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)}(t).$$

Какому условию должны удовлетворять числа $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, чтобы функции f и g были ортогональны?

XVI.1.2. Доказать, что функция $f \in \mathbf{R}([a, b])$ ортогональна на $[a, b]$ к любому многочлену степени не выше $n \in \mathbf{N}$ тогда и только тогда, когда f ортогональна к каждой из функций $[a, b] \ni t \to t^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

XVI.1.3. Доказать, что функция $f \in \mathbf{R}([0, 2\pi])$ ортогональна на $[0, 2\pi]$ к любому тригонометрическому многочлену

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \cos jt + \beta_j \sin jt)$$

степени не выше $n \in \mathbf{N}$ с $\{\alpha_j, \beta_j\} \subset \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда f ортогональна на $[0, 2\pi]$ к каждой из функций

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto \cos kt, \quad [0, 2\pi] \ni t \mapsto \sin kt; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

XVI.1.4. Определить функцию $f \in \mathbf{C}([a, b])$, ортогональную на $[a, b]$ к каждой из функций

$$[a, b] \ni t \mapsto t^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

XVI.1.5. Определить функцию $f \in \mathbf{C}([0, 2\pi])$, ортогональную на $[0, 2\pi]$ к каждой из функций

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto \sin nt, \quad [0, 2\pi] \ni t \mapsto \cos nt; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

XVI.1.6. Доказать линейную независимость на $[a, b]$ функции

1) $[a, b] \ni t \mapsto t^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n;$

2) $[a, b] \ni t \mapsto t^{\alpha_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$ где $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset (0, +\infty)$, $\alpha_i \neq \alpha_j, \quad i \neq j, \quad a > 0;$

3) $[a, b] \ni t \mapsto e^{t\alpha_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$ где $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbf{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j, \quad i \neq j;$

4) $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \cos kt, \quad [0, 2\pi] \ni t \mapsto \sin kt, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

XVI.1.7. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — набор линейно независимых на $[a, b]$ функций. Доказать, что

$$\det\left(\left(f_k, f_j\right)_{k, j=1}^{n}\right) \neq 0.$$

XVI.1.8. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — набор линейно независимых на $[a, b]$ функций. Доказать, что для любых действительных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ существует функция $f \in \mathbf{R}([a, b])$ такая, что

$$(f, f_k) = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

XVI.1.9. Для функций $[a, b] \ni t \mapsto t^k, \quad k = 0, 1, 2$ провести процесс ортогонализации:
1) $[a, b] = [-1, 1];$
2) $[a, b] = [0, 1].$

XVI.1.10. Доказать, что любой набор ортогональных на $[a, b]$ и нормированных функций есть набор линейно независимых на $[a, b]$ функций.

XVI.1.11. Для функций $\{f, g\} \subset \mathbf{R}([a, b])$ положим $\rho(f, g) := \sqrt{(f - g, f - g)}$. Доказать, что $(\mathbf{R}([a, b]), \rho)$ есть неполное метрическое пространство.

XVI.1.12. Функция $f \in \mathbf{R}([0, 2\pi])$ такова, что

$\forall n \geqslant 1 \quad \exists \{a_n, b_n, c_n\} \subset \mathbf{R}:$

$$\int_0^{2\pi} (f(t) - a_n - b_n \cos t - c_n \sin t)^2 \, dt \leqslant \frac{1}{n}.$$

Определить функцию f.

XVI.1.13. Функция $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ такова, что $\forall n \geqslant 1 \quad \exists \{a_n, b_n\} \subset \mathbf{R}: \int_0^1 (f(t) - a_n - b_n t)^2 \, dt \leqslant \frac{1}{n}.$

Определить функцию f.

XVI.1.14. Для функции $f(t)=\frac{1}{2}(\pi-t)$, $t\in[0, 2\pi]$ и заданного $n\in\mathbf{N}$ определить тригонометрический многочлен вида

$$T_n(t)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt),$$
$$t\in[0, 2\pi], \quad \{\alpha_i, \beta_i\}\subset\mathbf{R},$$

минимизирующий расстояние $\|f-T_n\|:=\sqrt{(f-T_n, f-T_n)}$.

XVI.1.15. Для функции $f\in\mathbf{R}([0, 3\pi])$ определить тригонометрический многочлен вида

$$T(t)=\alpha_0+\alpha_1\cos \quad +\alpha_2\cos 2t, \quad t\in\mathbf{R},$$

минимизирующий расстояние

$$\|f-T\|:=\left(\int_0^{3\pi}(f(t)-T(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

XVI.1.16. Для функции $[0, \pi]\ni t\mapsto t$ и заданного $n\in\mathbf{N}$ определить тригонометрический многочлен вида

$$T(t)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\sin kt, \quad t\in\mathbf{R},$$

минимизирующий расстояние

$$\left(\int_0^{\pi}(t-T(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

XVI.1.17. Доказать, что последовательность

$$[a, b]\ni t\mapsto t^n, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

1) замкнута в $\mathbf{C}([a, b])$ с равномерной метрикой;
2) замкнута в $\mathbf{R}([a, b])$ со среднеквадратическим расстоянием.

XVI.1.18. Доказать, что последовательность функций

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots, t\in[0, 2\pi]$$

1) замкнута в пространстве

$$\{f\in\mathbf{C}([0, 2\pi]) \mid f(0)=f(2\pi)\}$$

с равномерной метрикой;
2) замкнута в пространстве $\mathbf{R}([0, 2\pi])$ со среднеквадратическим расстоянием.

XVI.1.19. Доказать, что тригонометрическая последовательность функций (см. задачу XVI.1.18) замкнута в $\mathbf{R}([a, b])$ со среднеквадратическим расстоянием для любого отрезка $[a, b]$, где $b-a\leqslant 2\pi$.

XVI.1.20. Доказать, что замкнутая в пространстве $\mathbf{R}([a, b])$ со среднеквадратическим расстоянием последовательность функций полна в этом пространстве.

XVI.1.21. Доказать, что следующие последовательности $\{f_n : n \geqslant 1\}$ замкнуты в $R([a, b])$ со среднеквадратическим расстоянием:

1) $f_n(t) = t^{2n}$, $t \in [a, b]$; $n = 0, 1, 2, \ldots, a \geqslant 0$;

2) $f_n(t) = t^{3+n}$, $t \in [a, b]$; $n = 0, 1, 2, \ldots, a > 0$;

3) $f_n(t) = t^{3n}$, $t \in [a, b]$; $n = 1, 2, \ldots, a \geqslant 0$;

4) $f_n(t) = \ln^n t$, $t \in [e, e^2]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

5) $f_n(t) = e^{-nt^2}$, $t \in [a, b]$, $n = 0, 1, 2, \ldots, a > 0$;

6) $f_n(t) = \sin nt$, $t \in [0, \pi]$, $n = 1, 2, \ldots$;

7) $f_n(t) = \cos nt$, $t \in [0, \pi]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

8) $f_n(t) = \sin(2nt)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$

XVI.1.22. Доказать, что последовательность функций $\{f_n : n \geqslant 1\}$ не является полной в пространстве $R([a, b])$:

1) $f_n(t) = t^{2n}$, $t \in [-1, 1]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

2) $f_n(t) = t^{2n+1}$, $t \in [-1, 1]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

3) $1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots$, $t \in [0, 3\pi]$; $n = 1, 2, \ldots$

XVI.1.23. Проверить, что функции из XVI.1.21, 6) попарно ортогональны на $[0, \pi]$, и доказать равенство

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

XVI.1.24. Проверить, что функции из XVI.1.21, 7) попарно ортогональны на $[0, \pi]$, и доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

§ 2. РЯД ФУРЬЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ

XVI.2.1. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & x \in [-\pi, 0); \\ \frac{\pi}{4}, & x \in [0, \pi), \end{cases}$$

найти ряд Фурье и его сумму s. Записать равенство Парсеваля и доказать, что

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

XVI.2.2. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0); \\ 1, & x \in [0, \pi), \end{cases}$$

найти ряд Фурье и его сумму s. Записать равенство Парсеваля.

XVI.2.3. Пусть $\alpha \in (0, \pi)$. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\alpha, \alpha]; \\ 0, & x \in [-\pi, -\alpha) \cup (\alpha, \pi], \end{cases}$$

найти ряд Фурье и его сумму s. Доказать, что

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}; \qquad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}.$$

XVI.2.4. Для функции $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi)$ найти ряд Фурье и его сумму s. Записать равенство Парсеваля.

XVI.2.5. Найти ряд Фурье для функции $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi)$.

XVI.2.6. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0); \\ x, & x \in [0, \pi), \end{cases}$$

найти ряд Фурье, его сумму и записать равенство Парсеваля.

XVI.2.7. Вычислить следующие суммы:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4}.$$

XVI.2.8. Пусть f — периодическая с периодом 2π функция, $f \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R})$,

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx; \quad n \geqslant 0;$$

$$b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n \geqslant 1;$$

$$s_n(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \quad n \geqslant 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что

$$na_n(f) \to 0, \quad nb_n(f) \to 0, \quad n \to \infty.$$

XVI.2.9. Пусть $f \in \mathbf{R}([-\pi, \pi])$. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n(f)| + |b_n(f)|}{n}.$$

XVI.2.10. Функция f периодична с периодом 2π и $f \in \mathbf{C}^r(\mathbf{R})$ для $r \geqslant 1$. Доказать, что

$$|a_n(f)| + |b_n(f)| \leqslant \frac{1}{n^r} (|a_n(f^{(r)})| + |b_n(f^{(r)})|), \quad n \geqslant 1.$$

XVI.2.11. Функция f периодична с периодом 2π и $f \in C^1(\mathbf{R})$. Доказать, что

$$\max_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - s_n(x)| = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1,$$

причем $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$.

XVI.2.12. Функция f периодична с периодом 2π и $f \in C^r(\mathbf{R})$, $r \geqslant 1$. Доказать, что

$$\max_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - s_n(x)| = \frac{\varepsilon_n}{n^{r-\frac{1}{2}}}, \quad n \geqslant 1,$$

причем $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$.

XVI.2.13*. Функция $f \in \mathbf{R}([-\pi, \pi])$ четна на $[-\pi, \pi]$ и такова, что $a_n(f) \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Доказать, что

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f)$ сходится;

2) ряд Фурье функции f сходится равномерно на $\mathbf{R}$;
3) $f \in C(\mathbf{R})$.

XVI.2.14. С помощью ряда Фурье, полученного в задаче XVI.2.4, и теоремы об интегрировании ряда Фурье получить разложение в ряд Фурье функции

1) $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$;

2) $f(x) = x^3$, $x \in (-\pi, \pi)$.

XVI.2.15. Коэффициенты ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbf{R}, \qquad (*)$$

удовлетворяют условиям

$$\exists L \in \mathbf{R} \quad \forall n \geqslant 1 \ : \ n^3 |a_n| \leqslant L, \ n^3 |b_n| \leqslant L.$$

Доказать, что
1) сумма s этого ряда периодична с периодом 2π и $s \in C^1(\mathbf{R})$;
2) ряд (*) есть ряд Фурье для s;
3) ряд, полученный почленным дифференцированием ряда (*), есть ряд Фурье для s'.

XVI.2.16. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что $f \in C^1(\mathbf{R})$, причем ряд для f' можно получить почленным дифференцированием. Доказать также, что

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Из последнего равенства с помощью результатов задач XVI.2.5 и XVI.2.7 определить f.

XVI.2.17*. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+1} \sin nx, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что $f \in \mathbf{C}^{\infty}((0, 2\pi))$.

XVI.2.18. Доказать, что сходящийся на $\mathbf{R}$ ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}, \quad x \in \mathbf{R},$$

не есть ряд Фурье функции из $\mathbf{R}([-\pi, \pi])$.

XVI.2.19. Функция f периодична с периодом 2π и $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$. Предположим, что ряд Фурье функции f

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx), \quad x \in \mathbf{R},$$

равномерно сходится на $\mathbf{R}$. Доказать, что

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx), \quad x \in \mathbf{R}.$$

XVI.2.20. Пусть $f \in \mathbf{R}([a, b])$, φ — 2π-периодическая функция и $\varphi \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R})$. Найти предел

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \cos^2 nx dx$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \cos^3 nx dx$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \varphi(nx)\, dx$.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

XVI.3.1. Для функции f вычислить преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & x \in [-a, a], \\ 0, & x \bar{\in} [-a, a], \quad a > 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}; & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad a > 0;$

4) $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R};$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbf{R}, \quad a \in \mathbf{R}, \quad \sigma > 0.$

XVI.3.2. Доказать следующие равенства:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{a^2 + \lambda^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad a > 0;$

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda} \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R};$

3) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2} \cos \lambda x dx = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad \sigma > 0;$

4) $\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos(2zx)\, dz = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

XVI.3.3. Определить функцию $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$, для которой

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \frac{1}{1+\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

XVI.3.4. Определить функцию $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$, для которой

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

XVI.3.5. С помощью преобразования Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1], \end{cases}$$

вычислить значение интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

XVI.3.6. Доказать равенство

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \cos \lambda x \ln \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} d\lambda = \frac{1 - e^{-x}}{x}, \quad x > 0.$$

XVI.3.7. Доказать, что преобразование Фурье абсолютно интегрируемой на $\mathbf{R}$ функции есть равномерно непрерывная на $\mathbf{R}$ функция.

XVI.3.8. Для функции f при некотором $n \in \mathbf{N}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^n)\,|f(x)|\,dx < +\infty.$$

Доказать, что $\hat{f} \in C^n(\mathbf{R})$, причем

$$\hat{f}^{(k)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} (ix)^k f(x)\,dx, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\hat{f}^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

XVI.3.9. Функция $f \in C^n(\mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяет условиям:

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \;:\; f^{(k)}(x) \to 0, \quad |x| \to +\infty;$$

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\} \;:\; \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)|\,dx < +\infty.$$

Доказать, что

$$\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{i}\right)^n \hat{f}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

XVI.3.10. Функция f абсолютно интегрируема на $\mathbf{R}$. Выразить через $\hat{f}$ преобразование Фурье функции

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\,\frac{1-\cos u}{u^2}\,du, \quad x \in \mathbf{R}.$$

XVI.3.11*. Функция f абсолютно интегрируема по $\mathbf{R}$, $f \in C(\mathbf{R}$, Пусть

$$K(\lambda) = \begin{cases} 1 - |\lambda|, & \lambda \in [-1, 1]; \\ 0, & \lambda \,\bar{\in}\, [-1, 1]. \end{cases}$$

Вычислить для $x \in \mathbf{R}$ предел

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{-i\lambda x} K\left(\frac{\lambda}{A}\right) d\lambda.$$

XVI.4.1. Пусть

$$X = \left\{ x \in \mathbf{C}([0, +\infty)) \mid \int_0^{+\infty} |x(t)|\,dt < +\infty \right\},$$

$$\rho(x, y) := \int_0^{+\infty} |x(t) - y(t)|\,dt, \quad \{x, y\} \subset X.$$

Проверить, что (X, ρ) есть метрическое пространство. Является ли оно полным? сепарабельным?

XVI.4.2. Последовательность функций $\{f_n : \ n \geqslant 1\} \subset \mathbf{C}([0, +\infty))$ такова, что

(i) для любого $r > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ сходится равномерно на $[0, r]$;

(ii) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$ сходится.

Доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt.$$

XVI.4.3. Пусть

$$F(\alpha) := \int_0^1 e^{-\alpha^3 x^2} \sin \alpha x\,dx, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Проверить, что $F \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbf{R})$.

XVI.4.4. Функция $f \in \mathbf{C}([0, +\infty))$, $f(0) = 0$, $\sup_{x \geqslant 0} |f(x)| < +\infty$, а для функции $g: \ [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} |g(x)|\,dx.$$

Доказать, что

$$\lim_{\alpha \to 0+} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{\alpha}{x}\right) g(x)\,dx = 0.$$

XVI.4.5. Для функции $f \in \mathbf{C}([0, +\infty))$ сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx,$$

а функция $g \in \mathbf{C}([0, +\infty))$ и ограничена на $[0, +\infty)$. Доказать, что

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(x + \lambda)\,g(x)\,dx = 0.$$

XVI.4.6. Для функции $f: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

и при каждом $\lambda > 0$ отрезок $[a(\lambda), b(\lambda)] \subset [0, +\infty)$. Доказать, что

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x) \cdot \cos \lambda x dx = 0.$$

XVI.4.7. Функция $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ограничена и равномерно непрерывна $\mathbf{R}$. Доказать, что равномерно по $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{(x-y)^2 + \alpha^2} f(y)\, dy = f(x).$$

XVI.4.8. Функция $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ и положительна на $[0, 1]$. Пусть

$$F(\alpha) := \int_0^1 f(x)^\alpha\, dx.$$

Вычислить предел

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{1}{\alpha} \ln F(\alpha) \right).$$

XVI.4.9*. Доказать, что при $\alpha > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \left(n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^1 (1 - x^\alpha \cos x)^n\, dx \right) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

XVI.4.10. Для функции $f \in \mathbf{C}([0, 1])$ вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{h^2} \sum_{\substack{(j,k) \in \mathbf{Z}^2 \\ j^2 + k \leqslant n^2}} f\left(\frac{j^2 + k^2}{n^2}\right).$$

XVI.4.11. Для функции $f \in \mathbf{C}^1([0, 1])^2$ вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\int_{[0,1]^2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 - \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) \right).$$

XVI.4.12. Пусть функция $f \in \mathbf{C}([0, 1]^2)$ и положительна на $[0, 1]^2$. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ определим $\theta(n) \in [0, 1]$ как значение, для которого

$$\frac{1}{n} \int_{[0,1]^2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{A(n)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2,$$

где

$$A(n) = \left\{ (x_1, x_2) \in [0, 1]^2 \mid \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \theta(n)^2 \right\}.$$

Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}\,\theta(n)).$$

XVI.4.13. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1])$. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{[0,1]^n} \frac{x_1+\cdots+x_k}{x_1+\cdots+x_n} \prod_{j=1}^{n} f(x_j)\,dx_j, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

XVI.4.14. Пусть $f \in \mathbf{C}([0,1])$. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{[0,1]^n} \min(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{n} f(x_j)\,dx_j.$$

XVI.4.15. Пусть $f \in \mathbf{C}([0, 1])$. Доказать равенство

$$\int\limits_{[0,1]^n} \max(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^{n} f(x_j)\,dx_j = n\int\limits_0^1 u\left(\int\limits_0^u f(v)\,dv\right)^{n-1} f(u)\,du.$$

XVI.4.16. Доказать равенство

$$\int\limits_{[0,1]^n} (x_1x_2\ldots x_n)^{x_1x_2\ldots x_n}\,dx_1dx_2\ldots dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 x^x \ln^{n-1}\frac{1}{x}\,dx, \quad n \geqslant 1.$$

XVI.4.17. Для функции $f \in \mathbf{C}([0, +\infty))$ сходится интеграл

$$\int\limits_{[0,+\infty)^2} f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)dx_1dx_2 =: \mathcal{J}.$$

Доказать, что существует последовательность $\{x_n : \ n \geqslant 1\}$ такая, что

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots;$$

$$x_n \to +\infty, \ n \to \infty;$$

$$\mathcal{J} = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty} x_n f(x_n).$$

XVI.4.18. Вычислить интеграл

$$\int\limits_A \frac{e^z}{2-\bar{z}}\,dx_1dx_2,$$

где $z = x_1 + ix_2$, $A = \{z \mid |z| \leqslant 1\}$.

XVI.4.19. Пусть

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ x_1 + x_2 \leqslant 1\}.$$

Доказать, что

$$\exists\,\theta \in [0, 1] : \int\limits_A f(x_1, x_2)\,dx_1dx_2 = \int\limits_0^\theta f(u, \ \theta-u)\,du.$$

XVI.4.20. Доказать, что при любом $\alpha > 0$ сходится интеграл

$$\int\limits_{[1,+\infty)^n} \frac{dx_1dx_2\ldots dx_n}{x_1x_2\ldots x_n(\max(x_1, x_2, \ldots, x_n))^\alpha}.$$

XVI.4.21. Пусть $A=(a_{jk})_{j,k=1}^{n}$ — симметричная и положительно определенная матрица. Доказать, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k\right)dx_1\dots dx_n=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

XVI.4.22*. Функция $f:\ [0,1]\to\mathbf{R}$ неотрицательна на $[0,1]$ и такова, что

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{f(t)}\leqslant 1.$$

Доказать, что

$$\int\limits_{(0\leqslant x_1\leqslant\dots\leqslant x_n\leqslant 1)} \frac{dx_1dx_2\dots dx_n}{f(x_1)^n+f(x_2)^n+\dots+f(x_n)^n}=O\left(\frac{1}{(n+1)!}\right),\quad n\to\infty.$$

XVI.4.23*. Пусть $\{f,\ g\}\subset \mathbf{C}([0,1])$, причем $0\leqslant f(x)<g(x)$, $x\in(0,1)$. Доказать, что существует число $\lambda\in(0,1)$ такое, для которого

$$\int\limits_{(0\leqslant x_1\leqslant\dots\leqslant x_n\leqslant 1)} \frac{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)}{g(x_1)^n+g(x_2)^n+\dots+g(x_n)^n}\,dx_1\dots dx_n=$$

$$=O\left(\frac{\lambda^n}{(n+1)!}\right),\quad n\to\infty.$$

XVI.4.24. Определить функцию $f\in\mathbf{R}([0,3\pi])$, если

(i) $f(x)=x^2,\ x\in[0,\pi)$;

(ii) $\forall\, n\geqslant 0$:

$$\int\limits_0^{3\pi} f(x)\cos nx\,dx=\int\limits_0^{3\pi} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

XVI.4.25. Доказать следующие равенства:

1) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\frac{\pi^2}{12}$;

2) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}\,dx=\frac{\pi^2}{6}$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx=\frac{\pi^2}{4}$.

XVI.4.26. Найти для $x\in\mathbf{R}$ сумму ряда

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n\sin nx,\quad |a|<1$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$; 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n\frac{\sin nx}{n!},\quad a\in\mathbf{R}$.

XVI.4.27. Найти для $x \in [0, 2\pi]$ сумму ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$

XVI.4.28. Доказать равенство

$$xy + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = \pi \min(x, y), \quad (x, y) \in [0, \pi]^2.$$

XVI.4.29. Пусть R_0 — множество всех 2π-периодических функций таких, что их сужения на $[0, 2\pi]$ лежат в $R([0, 2\pi])$. Предположим, что функция $K \in R_0$ и четна. Пусть

$$M := \left\{ n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \quad \middle| \quad A_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(y) \cos ny\,dy \neq 0 \right\}.$$

Доказать, что

$$\cos nx = \lambda_n \int_{-\pi}^{\pi} K(x - y) \cos ny\,dy, \quad x \in \mathbf{R}; \quad n \in M;$$

$$\sin nx = \lambda_n \int_{-\pi}^{\pi} K(x - y) \sin ny\,dy, \quad x \in \mathbf{R}; \quad n \in M \setminus \{0\},$$

где $\lambda_n = (\pi A_n)^{-1}$ для $n \in M$.

XVI.4.30. Предположим, что функция $K \in R_0$ четна. Доказать, что для любой функции $f \in R_0$ справедливо равенство для любого $x \in \mathbf{R}$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x - y) f(y)\,dy = \frac{1}{2} A_0 a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k a_k(f) \cos kx + $$
$$+ A_k b_k(f) \sin kx),$$

где $\{A_n\}$ и $\{a_n(f), b_m(f)\}$ — коэффициенты Фурье функций K и f соответственно. При этом функция

$$x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} K(x - y) f(y)\,dy$$

принадлежит R_0, а ряд в правой части сходится поточечно на $\mathbf{R}$.

Указание. Воспользоваться обобщенным равенством Парсеваля.

XVI.4.31. При условиях предыдущей задачи доказать равенство

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{[-\pi,\pi]^2} K(x-y)f(x)f(y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}A_0a_0^2(f) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(a_k^2(f)+b_k^2(f)).$$

XVI.4.32. Пусть

$$\mathscr{D} = \left\{ f\in \mathbf{R}_0 \;\middle|\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \leqslant 1\right\}.$$

При условиях задачи XVI.4.30 найти

$$\max_{f\in\mathscr{D}}\left|\int\limits_{[-\pi,\pi]^2} K(x-y)f(x)f(y)\,dx\,dy\right|.$$

XVI.4.33. Пусть $\mathscr{D}$ — множество функций из $C^1(\mathbf{R})$, периодических с периодом 2π на $\mathbf{R}$, а $\lambda>0$ — фиксированное число. Для фиксированной функции $g\in\mathbf{R}_0$ найти

$$\min_{f\in\mathscr{D}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\,dx + \lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,dx\right)$$

и определить функцию, доставляющую минимум.

XVI.4.34. Пусть $f\in\mathbf{R}_0$. Используя формулы Эйлера, доказать, что ряд Фурье для функции

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

может быть записан в виде

$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{inx},$$

где

$$c_n(f):=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2}\begin{cases} a_n(f)-ib_n(f), & n\geqslant 0;\\ a_{-n}(f)+ib_{-n}(f), & n<0.\end{cases}$$

Проверить также, что

$$2\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2}a_0^2(f)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2(f)+b_n^2(f)),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n(f)|^2.$$

XVI.4.35. Пусть функция $f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ периодична с периодом 1 на $\mathbf{R}$ и $f\in R([0,1])$. Проверить, что коэффициенты и ряд Фурье для

f имеют вид

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x} dx, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f)\, e^{2\pi i n x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

При этом равенство Парсеваля записывается в виде

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2.$$

XVI.4.36. Пусть функция $g \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R})$ и периодична с периодом 1. Определить функцию $f \in \mathbf{C}^1([0, 1])$, удовлетворяющую уравнению

$$f''(x) - f(x) + g(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

и условиям

$$f(0) = f(1), \quad f'_+(0) = f'_-(1).$$

XVI.4.37. Пусть $\mathcal{D}$ множество всех тех функций f из $\mathbf{R}([0, 2])$, для которых

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad : \quad \int_0^2 f(x)\, e^{-2\pi i n x} dx = 0.$$

Найти

$$\min_{f \in \mathcal{D}} \int_0^2 (f(x) + x - 2)^2\, dx$$

и функцию f^*, доставляющую минимум.

XVI.4.38. Пусть $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Доказать, что множество

$$\{e^{2\pi i n x} \quad | \quad n \in \mathbf{Z}\}$$

всюду плотно в множестве $\{z \in \mathbf{C} \quad | \quad |z| = 1\}$.

XVI.4.39. Предположим, что последовательность функций $\{K_n \quad | \quad n \geqslant 1\} \subset \mathbf{R}_0$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\displaystyle\sup_{n \geqslant 1} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|\, dx < +\infty;$

2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx \to 1, \quad n \to \infty;$

3) $\displaystyle\forall \delta \in (0, \pi) \quad : \quad \int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} |K_n(x)|\, dx \to 0, \quad n \to \infty.$

Доказать, что

(i) для любой функции $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, периодической с периодом 2π

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x - y)\, f(y)\, dy - f(x) \right| \to 0, \quad n \to \infty;$$

(II) для любой функции $f \in C^r(\mathbf{R})$, периодической с периодом 2π, любого $m \leqslant r$

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{d^m}{dx^m} \left(\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-y) f(y)\, dy \right) - f^{(m)}(x) \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

XVI.4.40. Предположим, что $\{K_n : n \geqslant 1\} \subset R_0$ — последовательность на $\mathbf{R}$ функций таких, что

$$\forall m \in \mathbf{Z} : c_m(K_n) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Доказать, что последовательность K_n, $n \geqslant 1$, удовлетворяет условиям 1) — 3) задачи XVI.4.39.

XVI.4.41. Формальный вывод формулы Пуассона. Пусть для функции $f \in C(\mathbf{R})$ сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

и

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Функция

$$\varphi(x) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x+n), \quad x \in \mathbf{R},$$

периодична с периодом 1. Для $m \in \mathbf{Z}$ имеем

$$\hat{f}(2\pi m) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i m x} f(x)\, dx = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{n}^{n+1} e^{2\pi i m x} f(x)\, dx =$$

$$= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{0}^{1} e^{2\pi i m x} f(n+x)\, dx = c_{-m}(\varphi).$$

Поскольку

$$\varphi(0) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} c_m(\varphi)\, e^{2\pi i 0 m} = \sum_{m \in \mathbf{Z}} c_m(\varphi),$$

то

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(2\pi n) \text{ **(формула Пуассона)**.}$$

XVI.4.42. Пусть $f(x) = (1+x^2)^{-1}$, $x \in \mathbf{R}$. Проверить, что все преобразования задачи XVI.4.41 справедливы. Доказать равенство

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \pi\, \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава I

§ 1

1.1.1. 1) A есть подмножество множества четных чисел;
2) $A \subset \mathbf{Q}$; 3) $A \subset [0, +\infty)$; 4) $A \subset (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$; 5) $A \subset (-\infty, -3] \cup \cup [0, +\infty)$; 6) $A \subset (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

1.1.2. 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да; 6) нет; 7) да.

1.1.4. 1) $(m, +\infty)$; 2) $(m, m+1)$; 3) $(0, +\infty)$;
4) $\varnothing$; 5) $(1, +\infty) \setminus \mathbf{N}$; 6) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

1.1.5. 1) $\{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \mid xy > 0\}$, $\{(0, 0)\}$ и $\{(x, y) \mid (x-y)(x+y) \leqslant 0\}$, $\{(0, 0)\}$;
2) $\{(0,0)\} \cup \{(x, y) \mid x \neq 0,\ y > 0\}$, $\{(0, 0)\}$.

1.1.9. $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

1.1.13. $\varnothing$ и множество всех простых чисел.

§ 2

1.2.1. 1) $\{1\}$; 2) $\{2\}$; 3) $\{0\}$; 4) $\{-1, 1\}$.

1.2.2. 1) $\{(0, 0)\}$; 2) $\mathbf{Z}$; 3) $\{(m, n) \mid m \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{Z}\}$; 4) $\mathbf{Z}^2$.

1.2.3. 1) $\varnothing$; 2) $\{-2, 1\}$; 3) $\mathbf{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$; 4) $\{-1, 0\}$.

1.2.4. 1) Биекция; 2) биекция; 3) биекция; 4) нет; 5) биекция; 6) биекция; 7) инъекция, но не сюръекция; 8) биекция; 9) биекция.

1.2.5. 1) Например, $f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$, $\{m, n\} \subset \mathbf{N}$. 2) Например,

$$f(m, n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(3n^2 + n) + m, & -n \leqslant m \leqslant 0; \\ \dfrac{3}{2}((m+n)^2 + m) + \dfrac{1}{2}n, & m \geqslant 0, \quad n \geqslant 1; \\ \dfrac{1}{2}(3m^2 + 5m) + n, & -m \leqslant n \leqslant 0, \end{cases}$$

$$f(m, n) = -f(-m-1, -n) - 1.$$

1.2.6. 1) n^m; 2) $m!\, C_n^m$ при $n \geqslant m$, инъекций нет при $n < m$; 3) $m!$ при $m = n$ биекций нет при $m \neq n$.

1.2.8. $X = \mathbf{N}$, f переводит все нечетные числа в 1, а четным n ставит в соответствие $\frac{n}{2}$. Не существует.

1.2.9. Да. Нет.

§ 3

1.3.19. Использовать метод математической индукции и неравенство Я. Бернулли.

I.4.14. Наибольшим является элемент $a_8 = \frac{9}{8}$, наименьшего элемента заданное множество не имеет. Проверить, что 1) $a_7 < a_k$ для $k = 1, 2, \dots, 6$; 2) $a_{n+1} < a_n$ для любого $n \geqslant 7$.

I.4.15. $a_2 = a_3$, наименьшего элемента множество не имеет.

I.4.17. -1, 1. **I.4.18.** $\frac{1}{4}$, 3.

I.4.20. $\inf A = \min A = 4$.

I.4.21. $\inf A = \min A = -\frac{1}{4}$, $\sup A = \max A = \frac{1}{4}$.

I.4.22. $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$, $\sup A = 1$.

I.4.23. $\inf A = -1$, $\sup A = 1$.

I.4.28. 1. **I.4.30.** 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 1.

I.4.31. 1) $\sup B = -\inf A$, $\inf B = -\sup A$; 2) $\inf B = (\inf A)^3$, $\sup B = (\sup A)^3$; 3) определенной связи нет, рассмотреть примеры множеств: $A = \{1, 2\}$, $A = \{-1, 1\}$, $A = \{-2, 1\}$, $A = \{-1, 2\}$; 4) $\inf B = \inf A + a$, $\sup B = \sup A + a$; 5) $\inf B = a \sup A$ и $\sup B = a \inf A$ при $a < 0$; $\inf B = a \inf A$, $\sup B = a \sup A$ при $a > 0$; $\inf B = \sup B = 0$ при $a = 0$.

I.4.34. Например, многочлен $P(x) = 2x^3 - x$, $x \in \mathbf{R}$. Заметим, что $P : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ не есть биекция.

I.4.38. Пусть A и B — любые точки такие, что $|AB| = 2^{\frac{1}{4}}$, а C — середина отрезка AB. Для любой точки P, согласно равенству параллелограмма, имеем

$$|AB|^2 + 4|CP|^2 = 2|AP|^2 + 2|BP|^2.$$

I.4.39. При $|b| \neq |c|$ домножить сначала левую часть на сумму корней, а затем использовать неравенства

$$|b^2 - c^2| \leqslant |b - c|(|b| + |c|),$$
$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} \geqslant |b| + |c| > 0.$$

I.4.43. $b = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{-1}$ при $x_k = ba_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

I.4.45. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a \in \mathbf{R}$.

I.4.46. Это доказательство предложил Kong — Ming Chong. Другие доказательства неравенства Коши содержатся в приведенных во введении книгах, а также в кн.: Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.— М.: Мир, 1965.— 276 с.

I.4.47. Применить неравенство предыдущей задачи к числам $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}$.

I.4.48. Применить неравенства двух предыдущих задач к n числам $a, 1, 1, \dots, 1$.

I.4.49. Левая часть неравенства очевидна. Для доказательства правой применить неравенство Коши к n числам $\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \dots, 1$.

Глава II

§ 1

II.1.1. Нет. Нет.

II.1.5. 1) 0; 2) $3a$; 3) $|a|$; 4) a^2; 5) 0; 6) a; 7) последовательность может не иметь предела, рассмотреть примеры: (i) $\left\{a_n = \frac{1}{n} : n \geqslant 1\right\}$, (ii) $\left\{a_n = 1 +\right.$

$+ (-1)^n \frac{1}{n} \ : \ n \geqslant 1 \Big\}$; 8) последовательность может не иметь предела, рассмотреть примеры: (i) $\left\{a_n = \frac{1}{n} \ : \ n \geqslant 1\right\}$, (ii) $\left\{a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ : \ n \geqslant 1\right\}$.

II.1.7. 1) Не обязательно сходится, рассмотреть примеры: (i) $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, (ii) $a_n = 1$, $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$; $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$; 2) не обязательно сходится; 3) сходится к a.

II.1.8. Сначала доказать ограниченность последовательности, а затем использовать неравенство

$$a_n + \frac{1}{a_n} - 2 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (a_n - 1)^2 < \varepsilon C,$$

где $C = \sup\limits_{n \geqslant 1} a_n$, $\varepsilon > 0$.

II.1.9. Воспользоваться тем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$|a_n^2 - a_n - 2| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad (a_n + 1)\,|a_n - 2| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - 2| < \varepsilon.$$

II.1.11. $a = -1$.

II.1.12. 1) 2; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 2; 4) 4; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{2}$. Определить общий член последовательности.

II.1.14. Вычислить значение a_n. При этом 1) воспользоваться представлением

$$\frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geqslant 1;$$

2) воспользоваться равенствами

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right), \quad n \geqslant 1;$$

3) воспользоваться равенствами

$$\frac{n}{2^n} = 2\left(\frac{n+1}{2^n} - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right), \quad n \geqslant 1;$$

4) воспользоваться равенствами

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}, \quad n \geqslant 1;$$

5) аналогично 2);
6) воспользоваться равенствами

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)} =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\right), \quad n \geqslant 1;$$

7) доказать для $n > m$ тождество

$$a_n = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m}\right);$$

8) воспользоваться представлением

$$\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}, \quad n \geqslant 1, \quad 0! = 1;$$

9) с помощью тождества

$$n(n+1)=\frac{1}{3}((n+1)^3-n^3)-\frac{1}{3}$$

упростить числитель для a_n;
10) сначала упростить числитель;
11) воспользоваться тождествами

$$n^3-1=(n-1)(n^2+n+1),\quad n^3+1=(n+1)(n^2-n+1);$$

12) воспользоваться разложением слагаемых, аналогичным 6), а также неравенством

$$a(a+1)(ax+1)\ldots(ax^{n-1}+1)\geqslant a(a+1)^n,\quad n\geqslant 1.$$

Ответ. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{8}$; 6) $\frac{1}{m!\,m}$; 7) $\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{1}{m}\right)$; 8) 1; 9) $\frac{1}{3}$; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{2}{3}$; 12) $\frac{1}{a}$.

II.1.15. Например, $a_n=\sin\sqrt{n}$, $n\geqslant 1$. Другие примеры и решения этой и последующей задач содержатся в кн.: **Дороговцев А. Я.** Избранные задачи по математическому анализу.— К. : Вища шк., 1982.— 104 с.

II.1.17. Воспользоваться неравенствами для $n\geqslant 3$

$$\frac{n}{\frac{1}{a}+n-1}\leqslant\sqrt[n]{a}\leqslant\frac{(a+(n-1)}{n},$$

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}\leqslant\frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n}.$$

II.1.18. 1) 0 при $a\neq 0$, 1 при $a=0$; 2) $a-\frac{b}{2}$; 3) $\frac{a}{2}$; 4) $\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-$ $-\frac{5}{6}$; 5) a; 6) 1; 7) 1; 8) 5; 9) 3; 10) $\max(a_1, a_2, \ldots, a_m)$; 11) 1. Сначала проверить, что n-й член последовательности не превосходит $\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}$; 12) 1. Можно воспользоваться неравенством Коши

$$1\leqslant\sqrt[n^2]{n}\leqslant\frac{n+(n^2-1)}{n^2},\quad n\geqslant 1;$$

13) 1; 14) 1. Сначала заметить, что

$$2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\leqslant 2^{\frac{1}{[\sqrt{n}]}},$$

и что согласно неравенству Коши

$$1\leqslant 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\leqslant 2^{\frac{1}{[\sqrt{n}]}}\leqslant\frac{2+[\sqrt{n}]-1}{[\sqrt{n}]},$$

затем доказать, что $[\sqrt{n}]\to+\infty$, $n\to\infty$; 15) 0. Пусть $m\in\mathbf{N}$ таково, что $m\geqslant$ $\geqslant b+1$. Согласно неравенству Бернулли,

$$(\sqrt[m]{a})^n\geqslant 1+n(\sqrt[m]{a}-1)>n(\sqrt[m]{a}-1),$$

откуда

$$\frac{n^b}{a^n}<\frac{n^b}{n^m(\sqrt[m]{a}-1)^m},\quad n\geqslant 1.$$

16) 0; 17) 0; 18) 0; 19) 1; 20) $\max(1, a)$; 21) $\max(a_1, a_2, \ldots, a_m)$; 22) $\frac{3}{7}$ при $a < b$, $\frac{1}{5}$ при $a > b$, $\frac{1}{3}$ при $a = b$; 23) 1; 24) 0; 25) 0; 26) 0; 27) 1; 28) 1.

II.1.19. 3. **II.1.20.** 1. **II.1.21.** 0. **II.1.25.** 3. **II.1.26.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

II.1.28. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) $\frac{a}{a-1}$; 5) $\frac{1}{a-1}$; 6) $\frac{1}{m+1}$; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{2}{5}$; 9) 0.

II.1.30. $\frac{a}{2}$. **II.1.31.** $2a$.

II.1.32. $\frac{a}{1-\alpha}$. Представить b_n в виде

$$b_n = \frac{1}{q^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} a_k q^{k-1}, \quad q = \frac{1}{\alpha}$$

и применить теорему Штольца.

II.1.34. $a + b$. Для чисел $c_n = n(a_{n+1} - a_n)$, $n \geqslant 1$, рассмотреть числа $\frac{1}{n}(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$, $n \geqslant 1$.

II.1.35. При $a > 0$, согласно неравенству Коши, имеем

$$\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}{n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad n \geqslant 1,$$

откуда следует требуемый результат. При $a = 0$ достаточно правой части неравенства.

II.1.36. Пример: $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$

II.1.37. $a_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}$, $a \neq b$;

$a_n = \dfrac{n+1}{n} a$, $a = b$, $n \geqslant 1$; $\max(a, b)$.

II.1.38. $a_n = \dfrac{ab(a^n - b^n)}{a^{n+1} - b^{n+1}}$ $a \neq b$;

$a_n = \dfrac{n}{n+1} a$, $a = b$, $n \geqslant 1$; $\min(a, b)$.

II.1.39. Доказательство следует из равенств, доказанных в задаче 1.4.33.

II.1.40. Пусть $c_n(1) := a_n + b_n$, $c_n(2) := a_n + 2b_n$, $n \geqslant 1$,
тогда $a_n = 2c_n(1) - c_n(2)$, $b_n = c_n(2) - c_n(1)$, $n \geqslant 1$.
Отсюда $a_n \to 2c(1) - c(2)$, $b_n \to c(2) - c(1)$, $n \to \infty$.
Следовательно, $c(x) = 2c(1) - c(2) + (c(2) - c(1))x$, $x \in [1, 2]$.

II.1.42. $\sqrt{3}$. Заметить, что $(1-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$. Поэтому для $n \geqslant 1$

$$a_n = \frac{1}{2}((1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n),$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}((1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n).$$

II.1.44. ab.

II.1.45. 1) $a_n = (-1)^n$, $n \geqslant 1$; 2) $\frac{1}{3}y$. Из равенства

$$a_n = \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}a_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

получить представление

$$a_n = \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2^2}y_{n-1} + \frac{1}{2^3}y_{n-2} - \cdots - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}y_0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a_1,$$

$n \geqslant 1$. Далее использовать результат задачи II.1.32. Ответ: $\frac{1}{3}y$.

II.1.46. Заметим, что

$$4x_n - x_{n-1} = 2a_n - b_n \to 2a - b, \quad n \to \infty.$$

Тогда аналогично предыдущей задаче

$$x_n \to \frac{1}{3}(2a - b), \quad n \to \infty.$$

Затем

$$y_n = a_n - 2x_n \to \frac{1}{3}(2b - a), \quad n \to \infty.$$

II.1.47. Использовать теорему Теплица о регулярном преобразовании последовательности.

II.1.48. Заметить, что $a_n + b_n + c_n = a + b + c$, $n \geqslant 1$. Далее для $x_n = a_n + b_n$, $n \geqslant 1$, получить соотношение

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n-1}, \quad n \geqslant 2,$$

откуда

$$x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = x_2 + \frac{1}{2}x_1.$$

Аналогично решению задачи II.1.45 получить, что

$$x_n \to \frac{2}{3}(a + b + c), \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}(a + b + c).$$

II.1.50. 7) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{2}\chi_{\left\{\frac{1}{k}\,\middle|\,k\in\mathbb{N}\right\}}(x)$, $x \in (0, 1]$.

§ 2

II.2.1. 1) $n_0 = 25$, возрастает; 2) $n_0 = 10$, возрастает; 3) $n_0 = 5$, возрастает; 4) $n_0 = 3$, убывает; 5) $n_0 = 1$, убывает; 6) $n_0 = 1$, возрастает.

II.2.2. 1) $A_1=\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $A_2=[0, +\infty)$; 2) $A_1=[-2, 2]$, $A_2=[0, +\infty)$; 3) $A_1=(-\infty, 0]$, $A_2=\mathbf{R}$; 4) $A_1=[0, 1]$, $A_2=\mathbf{R}$.

II.2.4. Необходимо и достаточно, чтобы 1) для любых двух членов последовательности a_m и a_n отрезок (возможно точка) с концами a_m и a_n содержал только конечное число членов последовательности, 2) последовательность имела наименьший член, 3) $a_m \neq a_n$ при $m \neq n$.

II.2.7.

$$a_n=\begin{cases}(-1)^{n-1}a_1+\frac{1}{2}(1+(-1)^n)B, & A=-1;\\ (n-1)B+a_1, & A=1;\\ \frac{1-A^{n-1}}{1-A}B+A^{n-1}a_1, & |A|\neq 1\end{cases}$$

для $n \geqslant 2$. Последовательность ограничена в следующих случаях:

$$\text{(i) } A=1,\quad B=0,\quad a_1\in\mathbf{R};\quad \text{(ii) } A=-1,\quad B\in\mathbf{R},\quad a_1\in\mathbf{R};$$
$$\text{(iii) } |A|<1,\quad B\in\mathbf{R},\quad a_1\in\mathbf{R};\quad \text{(iv) } |A|>1,\quad B+a_1-a_1A=0.$$

Последовательность сходится в случаях (i), (iii), (iv), а также при $a_1=B=0$. Для случая (iii) предел равен $\frac{B}{1-A}$.

II.2.8. Строго возрастает при $a_1\in[-2, 2)$; $a_n=2$, $n\geqslant 1$, при $a_1=2$; строго убывает при $a_1>2$. Ограничена и сходится к 2 при любом $a_1\geqslant -2$.

II.2.9. Последовательность сходится также при $a\in\left[\left(\frac{1}{e}\right)^e, 1\right)$. См.: **Егоров А.** Уравнения и пределы // Квант.—1977.— **10**.— С. 34—39, **Rippon R. J.** Infinite exponentials // The mathematical gazette.— 1983.— **441**, 67.— P. 189—196.

II.2.13. 1) 2; 2) $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4a})$, 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

II.2.14. $a_n\to 2$, $b_n\to 2$, $n\to\infty$.

II.2.16. Использовать для доказательства ограниченности неравенство Бернулли

$$2^{\frac{\sqrt{n}}{4}}\geqslant 2^{\frac{[\sqrt{n}]}{4}}\geqslant \theta(\sqrt{n}-1),\quad n\geqslant 1;\quad \theta=\sqrt[4]{2}-1.$$

II.2.20 1) e^2; 2) $e^{\frac{1}{2}}$; 3) 0; 4) 1.

II.2.21. Использовать следующий факт: если последовательность положительных чисел возрастает (убывает), то последовательность средних геометрических также возрастает (убывает). См. также задачу II.2.3.

II.2.22. С помощью неравенства Бернулли имеем

$$\left(\frac{(n^2+1)(n+1)^2}{n^2((n+1)^2+1)}\right)^n>1+\frac{2n+1}{n((n+1)^2+1)}>1+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Кроме того, $a_n\to 1$, $n\to\infty$, поскольку $a_n^n<e$, $n\geqslant 1$, и $\sqrt[n]{e}\to 1$, $n\to\infty$. Для второй последовательности используем неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\quad n\geqslant 1,$$

откуда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2+n}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2},\quad n\geqslant 1.$$

Кроме того, $b_n\geqslant\left(\frac{9}{4}\right)^n$, $n\geqslant 1$.

II.2.23. 1) 1; 2) e^{-2}; 3) e^3; 4) 1. Простое решение получается с использованием результата задачи II.1.36.

II.2.24. a.

II.2.26. 1) $\ln 2$; 2) $\ln \frac{m}{k}$; 3) $\frac{1}{2}\ln 2$; 4) 1; 5) 2; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\ln 2$; 8) $m - k$; 9) $\ln(1 + k)$.

II.2.29. Указания к решению задач II.2.28 и II.2.29 см. в кн.: **Дороговцев А. Я.** Избранные задачи по математическому анализу.— К. : Вища шк., 1982.— 104 с.

II.2.30. Заметить, что

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} < \frac{1}{n}\sqrt[n]{n! + \sqrt[n]{n! + \cdots + \sqrt[n]{n!}}} < \frac{1}{n}\sqrt[n]{n \cdot n!},$$

и воспользоваться результатом задачи II.2.21.

II.2.31. Заметить, что последовательность

$$\{b_n - a_n \quad : \quad n \geqslant 1\}$$

монотонна и ограничена.

II.2.32. Рассмотреть вспомогательную монотонную и ограниченную последовательность

$$\left\{a_n + c + \frac{c}{2} + \frac{c}{2^2} + \cdots + \frac{c}{2^{n-1}} \quad : \quad n \geqslant 1\right\}.$$

II.2.34. Рассмотреть вспомогательную последовательность

$$\left\{a_n + \frac{2}{3}a_{n-1} \quad : \quad n \geqslant 2\right\},$$

которая монотонна и ограничена. Дальнейшие рассуждения аналогичны решению задачи II.1.46.

II.2.36. Рассмотреть вспомогательную последовательность

$$\{a_n \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \ldots 2^{\frac{1}{2^{n-1}}} \quad : \quad n \geqslant 1\},$$

которая монотонна и ограничена.

II.2.38. Использовать результат предыдущей задачи.

II.2.39. Рассмотреть вспомогательную последовательность

$$\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z_k}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right) \quad : \quad n \geqslant 1\right\}, \quad z_0 = 1,$$

которая ограничена и монотонна.

II.2.40. Рассмотреть вспомогательную последовательность

$$\left\{a_n + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{2^m} \quad : \quad n \geqslant m + 1\right\},$$

которая монотонна и ограничена.

II.2.41. Для $c_n = a_n - b_n$, $n \geqslant 1$, доказать неравенство

$$c_{n+2} - c_{n+1} \geqslant \frac{1}{2^n}(c_2 - c_1), \quad n \geqslant 1.$$

Затем аналогично решению задачи II.2.32 получить утверждение о сходимости.

§ 3

II.3.1. 1) $\{0\}$; 2) $\{-1, 1\}$; 3) $\{-2, 2\}$; 4) $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; 5) $\{2, 3\}$; 6) $\left\{1, 3, \frac{1}{3}\right\}$. Проверить, что существует бесконечно много номеров n, для которых n и $[\ln n]$ оба четны и т. п.; 7) $\{e, e^{-1}\}$; 8) Пусть $r = \frac{p}{q} > 0$, $(p, q) = 1$. Тогда A есть множество, состоящее из чисел

$$\sin\frac{\pi p}{q}, \quad \sin\left(2\frac{\pi p}{q}\right), \ \ldots, \ \sin\left(2q\frac{\pi p}{q}\right);$$

9) $[0, 1]$. Пусть $a \in [0,1]$ проверить, что последовательность

$$\{\sqrt{n(k)}\} = \{\sqrt{k^2 + 2[ka]}\} = \sqrt{k^2 + 2[ka]} - k \to a, \quad k \to \infty;$$

10) $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. При решении этой и последующих задач удобно пользоваться следующей характеризацией частичного предела: число $a \in \mathbf{R}$ — частичный предел последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \exists n \geqslant N \ : \ |a - a_n| < \varepsilon;$$

11) $\left\{\left\{k\frac{p}{q}\right\} \ : \ k = 0, 1, \ldots, q-1\right\}$, $r = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$. 12) $[0, 1]$. 13) $[0, 1]$. Воспользоваться тем, что $\pi \bar{\in} \mathbf{Q}$.

II.3.3. Если последовательность ограничена, то она сходится к некоторому числу $a \in \mathbf{R}$, в этом случае $A = \{a\}$. Если не ограничена, то для монотонно неубывающей $A = \{+\infty\}$, а для монотонно невозрастающей $A = \{-\infty\}$.

II.3.5. Не обязательно. Пусть a и b — пределы последовательностей. Если $a \neq b$, то $A = \{a, b\}$. Например, $a_n = (-1)^n$, $n \geqslant 1$, в этом случае $A = \{-1, 1\}$. Если $a = b$, то $A = \{a\}$ и исходная последовательность сходится к a.

II.3.6. Проверить, что множество A состоит из одной точки.

II.3.7. Пусть $a_n = 1$, если n — простое число, и $a_n = 0$ в остальных случаях. Тогда каждая из последовательностей

$$\{a_{mk} \ : \ k \geqslant 1\}, \quad m \geqslant 2,$$

состоит из нулей, исключая, возможно, первый член.

II.3.8. Доказать неравенство

$$\max\{|b(n) - b(m^2)| \ m^2 \leqslant n < (m+1)^2\} < \frac{2m+1}{m^2}(1 + |b(m^2)|).$$

II.3.9. Требуемую последовательность можно получить, занумеровав все числа таблицы

$$\begin{array}{llll}
1, & 1, & \ldots, & 1, \ \ldots \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \ldots, & \frac{1}{2}, \ \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{1}{m}, & \frac{1}{m}, & \ldots, & \frac{1}{m}, \ \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

II.3.10. 1) Число 0 также должно быть частичным пределом; 2) числа 0 и 1 также должны быть частичными пределами; 3) любое иррациональное число также должно быть частичным пределом. 4) значения $-\infty$ и $+\infty$ также должны быть частичными пределами.

II.3.11. Рассмотрим случай $A \subset \mathbf{R}$. Для любого $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ рассмотрим представление $\mathbf{R}$ в виде

$$\mathbf{R} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right)$$

и определим множество

$$C_m = \left\{ \frac{k}{2^m} \;\middle|\; \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right) \cap A \neq \varnothing \right\},$$

отметим, что множество C_m не более чем счетно. Множество

$$C = \bigcup_{m=0}^{\infty} C_m$$

счетно и может быть расположено в последовательность $\{a_n : n \geqslant 1\}$. Проверить, что множество всех предельных точек последовательности есть A. Если $+\infty$ входит в A, то в C можно добавить множество $\mathbf{N}$.

II.3.12. 1) 0, 0, 0, 1; 2) -1, -1, 1, 1; 3) -2, -2, 2, $\frac{7}{3}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) 2, 2, 3, $\frac{5}{2}$; 6) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 3, 3; 7) 0, $\frac{1}{e}$, e, e; 9) 0, 0, 1, 1; 10) $-\infty$, $-\infty$, $+\infty$, $+\infty$; 11) 0, 0, 1, 1; 12) 0, 0, 1, 1; 13) -1, -1, 1, 1.

II.3.19. $(-\infty, \varliminf_{n\to\infty} a_n)$ либо $(-\infty, \varliminf_{n\to\infty} a_n]$, $(-\infty, \varlimsup_{n\to\infty} a_n)$ либо $(-\infty, \varlimsup_{n\to\infty} a_n]$, $(\varlimsup_{n\to\infty} a_n, +\infty)$ либо $[\varlimsup_{n\to\infty} a_n, +\infty)$, $(\varliminf_{n\to\infty} a_n, +\infty)$ либо $[\varliminf_{n\to\infty} a_n, +\infty)$.

II.3.21. $\frac{1}{2}(\sqrt{1+4a}-1)$. Рассмотреть подпоследовательности $\{a_{2k-1} : k \geqslant 1\}$ и $\{a_{2k} : k \geqslant 1\}$.

II.3.27. С помощью метода математической индукции доказать, что $a_n \leqslant cu^{n-3}$, $n \geqslant 3$, где

$$c = pa_2 + qa_1, \quad u = \frac{q}{1-p} < 1.$$

Глава III

§ 1

III.1.1. 1) $\varnothing$; 2) $[0, 1]$; 3) $\{0\}$; 4) — 6) $[0, 1]$; 7) $[-1, 1]$.

III.1.3. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (\mathbf{Q} \cap (-\infty, 0)) \cup (0, +\infty); \\ 1, & x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

$p = 0$

III.1.5. Например,

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$a = 0$, $p^2 = 1$.

III.1.6. I : 1) нет; 2) 1; 3), 4) нет; II: 1) нет; 2) 0.

III.1.8. 1) 1; 2) $\frac{b}{a}$; 3) нет.

III.1.10. Не обязательно. Рассмотреть функцию $f(x) = 0$, $x \in \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{N}\right\}$, $f(x) = 1$ для остальных значений $x \in \mathbf{R}$.

III.1.11. Не обязательно. Рассмотреть функцию $f(x) = 1$, $x \in \left\{\frac{1}{n\sqrt[n]{2}} \;\middle|\; n \in \mathbf{N}\right\}$; $f(x) = 0$ для остальных значений $x \in \mathbf{R}$.

III.1.12. Рассмотреть функции

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & x \in \left\{\frac{1}{2^n} \;\middle|\; n \geqslant 0\right\}; \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2^n} \;\middle|\; n \geqslant 0\right\}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} (-1)^n, & x \in \{2^{-2^n} \mid n \geqslant 1\}; \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \{2^{-2^n} \mid n \geqslant 1\}. \end{cases}$$

III.1.14. Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - (-1)^n), & x \in \{2^{-n} \mid n \geqslant 0\}; \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \{2^{-n} \mid n \geqslant 0\}. \end{cases}$$

III.1.16. -1. Сначала проверить, что в некоторой окрестности точки a (исключая саму точку) значения f отрицательны. Затем доказать неравенство для x из этой окрестности

$$|f(x) + |f(x)|^{-1}| \geqslant |f(x) + 1|.$$

III.1.17. 1. III.1.19. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{k(k+1)}{2}$; 3) 1.

III.1.20. 1) 2; 2) 16; 3) 0; 4) 1; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$. Использовать пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

и т. п. В 6) сначала вычислить сумму.

III.1.25. 1) Не обязательно. Рассмотреть функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{n\sqrt{2} \mid n \in \mathbf{N}\}; \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \{n\sqrt{2} \mid n \in \mathbf{N}\}; \end{cases}$$

2) не обязательно. Рассмотреть функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{n\sqrt[n]{2} \mid n \in \mathbf{N}\}; \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \{n\sqrt[n]{2} \mid n \in \mathbf{N}\}. \end{cases}$$

III.1.26. Не обязательно. Рассмотреть функцию к 2) предыдущей задачи.

III.1.31. 1) $3x$; 2) $\frac{x^3}{2}$; 3) $-\frac{x^3}{8}$.

III.1.32. 1) x^m; 2) $\frac{1}{x}$; 3) $13x^3$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III.1.33. 1) $f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + o(x^{m-2})$, $x \to +\infty$;

2) $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty;$

3) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{a^2}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right), \quad x \to +\infty;$

4) $f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty.$

5) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \to +\infty;$

6) $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{2} + o(1), \quad x \to +\infty;$

7) $f(x) = \sqrt{5}\, x^2 + \frac{7}{2\sqrt{5}}\, x - \frac{209}{40\sqrt{5}} + o(1), \quad x \to +\infty;$

8) $f(x) = x + \frac{a}{3} - \frac{a^2}{9} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty;$

9) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \to +\infty;$

10) $f(x) = \sqrt[4]{x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} - \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{x^{\frac{7}{4}}} + o\left(\frac{1}{x^{7/4}}\right), \quad x \to +\infty;$

11) $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty;$

12) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty;$

13) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to +\infty.$

III.1.34. 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{8}$; 5) $-\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{2}{9}$; 7) $-\frac{2}{9}$.

III.1.35. 1) $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$; 2) $a = b = 1$, $c = -\frac{1}{2}$; 3) $a = \sqrt{5}$, $b = \frac{7}{2\sqrt{5}}$, $c = -\frac{209}{40\sqrt{5}}$; 4) $a \in \mathbf{R}$, $b = a - 1$; 5) $a = -3$, $b = 3$ или $a = 3$, $b = -3$; 6) $a = 2$, $b = 1$; 7) $a = 2$, $b = \frac{3}{2}$; 8) $a = -1$, $b = 0$, $c = -1$ или $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

III.1.36. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 2^n; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\infty$ при $a < 1$, $+\infty$ при $a > 1$, $-\frac{1}{2}$ при $a = 1$; 8) $n + 1$; 9) 6.

III.2.3. 1) $a+b=3$; 2) $a=-2$, $b=0$; 3) $b=1$, $a\in\mathbf{R}$.

III.2.4. $a_n=a_0+2n$, $b_n=a_0+2n-1$, $n\in\mathbf{Z}$; $a_0\in\mathbf{R}$.

III.2.9. 1) $\omega(n)=1$, $n\in\mathbf{Z}$; $\omega(x)=0$, $x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$;
2) $\omega(0)=2$; $\omega(x)=0$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$; 3) $\omega(x)=1$, $x\in\mathbf{R}$.

III.2.12. 1) $f(x)=\frac{3}{5}x$, $x\in\mathbf{R}$; 2) $f(x)=\frac{1}{3}x$, $x\in\mathbf{R}$.

III.2.13. Сначала доказать, что f линейна на каждом отрезке $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. Для этого проверить, что f совпадает с функцией

$$[\alpha,\beta]\ni x\mapsto f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

в точках вида $\alpha+\frac{k}{2^n}(\beta-\alpha)$, $k=0,1,\dots,2^n$, $n\geqslant 1$.

III.2.14. 1) $f(x)=ax$, $x\in\mathbf{R}$; $a\in\mathbf{R}$. Провести доказательство в три этапа: (i) для $x\in\mathbf{Z}$; (ii) для $x\in\mathbf{Q}$, (iii) с использованием непрерывности для остальных значений x.
2) $f(x)=axe^x$, $x\in\mathbf{R}$, $a\in\mathbf{R}$. Проверить, что для функции $g(x):=f(x)e^{-x}$, $x\in\mathbf{R}$, справедливо соотношение из п. 1).

III.2.16. Пусть f монотонно не убывает. Заметим, что x есть точка разрыва f тогда и только тогда, когда $f(x+)-f(x-)>0$. Кроме того, точке разрыва x соответствует на оси Oy интервал $(f(x-), f(x+))$, причем интервалы, соответствующие различным точкам разрыва, не пересекаются.

III.2.17. Для $n\in\mathbf{N}$ пусть

$$A_n=\left\{0,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{2}{2^n},\ \dots,\ \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$$

и

$$B_n=A_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k.$$

Пусть

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k;\\ 1-2^{-n}, & x\in B_n,\quad n\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

Функция f является искомой.

III.2.18. 1), 2) Нет. Согласно теореме Вейерштрасса, функция $f\in C([a,b])$ принимает в некоторых точках из $[a,b]$ наименьшее и наибольшее значения; 3) нет. Согласно теореме Вейерштрасса, множество значений функции $f\in C([a,b])$ ограничено; 4) нет. Согласно теореме Коши, функция f принимает все значения из отрезка $[1=f(x_1),\ 2=f(x_2)]$, $\{x_1,x_2\}\subset[a,b]$.

III.2.20. Множество $f(\mathbf{R})$ может быть только таким: $\mathbf{R}$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, где $\{a,b\}\subset\mathbf{R}$.

III.2.23. Рассмотреть функцию

$$g(x):=f(x+1)-f(x),\quad x\in[0,1],$$

непрерывную на $[0,1]$.

III.2.24. Рассмотреть непрерывную на отрезке $[0,1]$ функцию

$$g(x):=f(x+1)-f(x)-\frac{f(2)-f(0)}{2},\quad x\in[0,1].$$

III.2.25. Пример: пусть

$$g(x) := \begin{cases} x+2, & x \in [-3, -1]; \\ -x, & x \in [-1, 1]; \\ x-2, & x \in [1, 3], \end{cases}$$

$$f(x) := g(x-6n) + 2n, \quad x \in [6n-3, 6n+3], \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Не существует. Использовать теоремы Вейерштрасса и Коши о промежуточном значении.

III.2.28. Рассмотреть значения $P(-\alpha_k)$, $P(-\beta_k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, и применить теорему Коши о промежуточном значении.

III.2.32. Рассмотреть функцию $f(x) = |P(x)|\, e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$.

III.2.38. $\mathbf{R} \setminus \{3\} \ni y \mapsto f^{-1}(y) = \dfrac{2y-1}{y-3}$.

III.2.39. 1) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ не взаимно однозначно, так как $f(0) = f(2) = 1$; 2) для $A = (-\infty, 1]$

$$[0, +\infty) \ni y \mapsto f_A^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y};$$

для $A = [1, +\infty)$

$$[0, +\infty) \ni y \mapsto f_A^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y}.$$

III.2.40. При $a > 0$ функция f не имеет обратной, так как $f(0) = f\left(\dfrac{2}{a}\right) = 0$. При $a \leqslant 0$ обратная функция существует и непрерывна, а именно, для $a = 0$

$$(-\infty, +\infty) \ni y \mapsto f^{-1}(y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1+y}, & y \geqslant 0; \\ -\dfrac{y}{2}, & y < 0, \end{cases}$$

для $a < 0$

$$(-\infty, +\infty) \ni y \mapsto f^{-1}(y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1+y}, & y \geqslant 0; \\ \dfrac{1}{a} + \sqrt{\dfrac{y}{a} + \dfrac{1}{a^2}}, & y < 0. \end{cases}$$

III.2.41. Пример: для функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0; \\ 0, & 0 < x \leqslant 1; \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$$

имеем

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0; \\ 1, & 0 < x \leqslant 1; \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

III.2.42. См. статью: Функция $y = \varphi(x)$, график которой всюду плотен на плоскости // Математическое просвещение.— 1958.— Вып. 3.— С. 62, 146.

III.2.43. 1) Равномерно непрерывна по теореме Кантора на $[0, 1]$ и, следовательно, на $(0, 1)$; 2) не является равномерно непрерывной. Рассмотреть пары точек

$$x_n' = \frac{1}{n} \qquad x_n'' = \frac{1}{n+1},$$

для которых

$$f(x_n'') - f(x_n') = 1,$$

$$x_n - x_n'' = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geqslant 1;$$

3) не является равномерно непрерывной. Рассмотреть пары точек

$$x_n' = \frac{1}{n\pi}, \quad x_n'' = \frac{2}{(4n+1)\pi}, \quad n \geqslant 1;$$

4) равномерно непрерывна. Положить $f(0) = 0$ и применить теорему **Кантора.**
5) равномерно непрерывна.

III.2.44. 1) Не является равномерно непрерывной. Рассмотреть пары точек

$$x_n' = n, \quad x_n'' = n + \frac{1}{n},$$

для которых

$$x_n'' - x_n' = \frac{1}{n}, \quad f(x_n'') - f(x_n') = 2 + \frac{1}{n^2} \geqslant 2, \quad n \geqslant 1;$$

2) равномерно непрерывна. Функция f равномерно непрерывна на $[0, 1]$ по теореме Кантора и на $[1, +\infty)$ в силу неравенства

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leqslant \frac{1}{2}|x' - x''|.$$

Вывести отсюда равномерную непрерывность на $[0, +\infty)$;
3) не является равномерно непрерывной. Рассмотреть пары точек

$$x_n' = 2\pi n, \quad x_n'' = 2\pi n + \frac{1}{2\pi n},$$

для которых

$$x_n'' - x_n' = \frac{1}{2\pi n}, \quad |f(x_n'') - f(x_n')| = \left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n}\right) \sin \frac{1}{2\pi n},$$

$$n \geqslant 1;$$

4) равномерно непрерывна; 5) не является равномерно непрерывной. Рассмотреть пары точек

$$x_n' = \sqrt{2\pi n}, \quad x_n'' = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad n \geqslant 1.$$

6) не является равномерно непрерывной. Рассмотреть точки

$$x_n' = n, \quad x_n'' = n + \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1.$$

Воспользоваться тем, что

$$e^n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{e^n}{n} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \to +\infty, \quad n \to \infty;$$

7) равномерно непрерывна. Воспользоваться теоремой Кантора и критерием Коши существования предела на $+\infty$. 8) не является равномерно непрерывной. 9) равномерно непрерывна. 10) не является равномерно непрерывной. 11) равномерно непрерывна.

III.2.46. На (i) функции 1) — 4) равномерно непрерывны. На (ii) функции 1) и 2) равномерно непрерывны, а 3) и 4) — нет, например, $f(x) = g(x) = x$, $x \geqslant a$,

и $f(x) = x$, $x \geqslant a$.

III.2.52. 1) $3x$; 2) $4x$; 3) $-2x$; 4) $\dfrac{1}{2x^{\frac{5}{6}}}$.

III.2.54. Использовать следующие неравенства, где $\delta > 0$:

$$|f(x) - B_n(f;\ x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{[0,1]} |f| \sum_{k\ :\ \left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k\ :\ \left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\delta^2} \sup_{[0,1]} |f| \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \omega_f(x,\ \delta).$$

III.2.55. Использовать неравенство Коши и тождества из задачи III.2.53.

III.2.59. Решение этой полезной и сложной задачи можно найти в статье: **Mellbro Leif.** Om ligelig kontinuitet i uendelig // Nordisk Math. Tidskr.— 1976.— Bd 24, Hf. 2.— S. 71—74. См. также: Задачи по математическому анализу / **М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов.**— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.— С. 97.

Глава IV

§ 1

IV.1.1. 1) $f'(a)$; 2) $\dfrac{1}{2} f'(a)$; 3) $2f'(a)$; 4) $f'(a)$; 5) $\dfrac{f(0) + f'(0)}{f'(0)}$; 6) $a^n f'(a) - na^{n-1} f(a)$.

IV.1.2. При $\alpha > 1$ для $x \neq 0$ имеем

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{|x|}{x} \right| |x|^{\alpha-1} \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|^{\alpha-1},$$

откуда следует, что $f'(0) = 0$.

IV.1.3. 1) Для функции $f(x) = x^m, x \in \mathbf{R}$; $m \in \mathbf{N}$ — фиксировано, предел существует и равен $f'(a) = ma^{m-1}$. Для функции f_2 из задачи IV.1.2 со значением $f'(0) = 0$ при

$$x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}, \quad z_n = \frac{2}{\pi(4n+3)}, \quad n \geqslant 1,$$

предел равен $\dfrac{2}{\pi}$. При соответствующем выборе последовательностей $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ предел может не существовать; 2) при дополнительном условии из тождества

$$\frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \cdot \frac{x_n - a}{x_n - z_n} + \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} \cdot \frac{a - z_n}{x_n - z_n}$$

следует, что при каждом $n \geqslant 1$ величина

$$\frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$$

лежит между величинами

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}, \quad \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a},$$

которые при $n \to \infty$ сходятся к $f'(a)$.

IV.1.4. $\dfrac{k(k+1)}{2}$.

IV.2.5. $\dfrac{1}{2} f'(a)$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Определим $\delta > 0$ так, чтобы при $x \neq 0$, $|x| < \delta$ выполнялось неравенство

$$\left| \frac{f(a+x) - f(a)}{x} - f'(a) \right| < \varepsilon,$$

то есть

$$|f(a+x) - f(a) - f'(a)x| < \varepsilon |x|.$$

Пусть теперь N таково, что $\dfrac{1}{N} < \delta$. Тогда

$$\forall n \geqslant N \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \; : \; \frac{1}{n} < \delta, \quad \frac{k}{n^2} < \delta,$$

а потому

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n^2}\right) - nf(a) - \sum_{k=1}^{n} f'(a) \frac{k}{n^2} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(a + \frac{k}{n^2}\right) - f(a) - f'(a) \frac{k}{n^2} \right| <$$

$$< \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \varepsilon \frac{n+1}{2n} \leqslant \varepsilon.$$

IV.1.6. 1) $\dfrac{k(k+1)}{2} m$; 2) $\exp\left(\dfrac{k(k+1)}{2a}\right)$; 3) $\exp\left(\dfrac{a}{2}\right)$.

IV.1.7. $\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}\right) f'(0)$.

IV.1.9. $f'(a) g(a) - f(a) g'(a)$.

IV.1.10. 1) $\exp\left(\dfrac{f'(a)}{f(a)}\right)$; 2) $\exp\left(a \dfrac{f'(a)}{f(a)}\right)$.

IV.1.11. 1) 1; 2) $\exp\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; 3) 1.

IV.1.13. $\dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{1}{4}$. Касательная в точке $(1, 1)$.

IV.1.15. 1) $2|x|$; 2) $3|x|x$; 3) $2|\sin x|\cos x$; 4) $\pi[x]\sin(2\pi x)$; 5) $\sin^2(\pi x) + \pi(x - [x])\sin(2\pi x)$; 6) $2(1 + \operatorname{sign}(\sin x))\sin 2x$; 7) $\dfrac{3}{2}|\sin x|^{\frac{1}{2}} \times$ $\times \cos x \operatorname{sign}(\sin x)$.

IV.1.16. 1) $(x \ln x)^{-1} \log_x 2$; 2) $-\dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln x} - (x \ln x)^{-1} \log_x \cos x$.

IV.1.17. Производная функции $|f|$ существует в тех точках x, в которых $f(x) \neq 0$, причем тогда

$$|f|'(x) = f'(x) \operatorname{sign} f(x).$$

Пример функции $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$, показывает, что производная функции $|f|$ может не существовать в тех точках x, в которых $f(x) = 0$. Если в точке x $f(x) = 0$ и $f'(x) = 0$, то $|f|'(x) = 0$. Например, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$.

IV.1.18. Производная функции h существует в тех точках x, в которых $f(x) \neq g(x)$, а также в тех точках x, в которых $f(x) = g(x)$ и $f'(x) = g'(x)$, при этом

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x), & f(x) > g(x); \\ g'(x), & g(x) > f(x); \\ f'(x), & f(x) = g(x) \text{ и } f'(x) = g'(x). \end{cases}$$

IV.1.19. Нет. Рассмотреть пример: $f(x) = x^3 - x$, $x \in [-1, 2]$. Односторонние производные существуют.

IV.1.20. 1) $a = 4$, $b = -5$; 2) $a = -3$, $b = 4$, $c = 0$.

IV.1.21. $-x^3 + x$.

IV.1.22. $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4x}}$.

IV.1.25. Умножить данное равенство на $P(x)$ и доказать справедливость полученного равенства. При этом достаточно проверить справедливость равенства для $(n + 1)$-го значения x. Сумма равна 0.

IV.1.29. Многочлен P степени n можно представить в виде

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x - x_0) + \alpha_2 (x - x_0)^2 + \cdots + \alpha_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbf{R},$$

с некоторыми числами $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbf{R}$. При этом

$$P(x_0) = \alpha_0,$$

$$P'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 (x - x_0) + \cdots + n\alpha_n (x - x_0)^{n-1}, \quad x \in \mathbf{R},$$

и

$$P'(x_0) = \alpha_1.$$

Аналогично

$$P^{(k)}(x_0) = \alpha_k k!, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, искомый многочлен есть

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbf{R}; \quad a_k = P^{(k)}(x_0), \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

IV.1.31. Использовать представление $f^g = \exp(g \ln f)$.

IV.1.32. При $x \neq 1$

$$\frac{nx^{n+1} - (n + 1) x^n + 1}{(x - 1)^2},$$

при $x = 1$ имеем $\dfrac{1}{2} n(n + 1)$.

IV.1.33. 1) При $x \neq 1$

$$\frac{n^2 x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1) x^{n+1} + (n + 1)^2 x^n - x - 1}{(x - 1)^3} x,$$

при $x = 1$ имеем $\dfrac{1}{6} (2n + 1)(n + 1) n$;

2) положить $x = \dfrac{1}{2}$ в 1); 3) при $x \neq 1$

$$\frac{1}{(x^2 - 1)^2} ((2n + 1) x^{2n+5} - (2n + 3) x^{2n+3} + x^3 + x),$$

при $x = 1$ имеем $(n+1)^2$; 4) $n2^{n-1}$; 5) $n(n+1)2^{n-2}$; 6) 0, $n > 1$;

7) для $x \bar{\in} \{2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$

$$\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left(n\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)-\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)\right),$$

при исключенных значениях имеем $\frac{1}{2}n(n+1)$.

IV.1.34. 1) $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbf{R}/[-1, 2]; \\ 1, & x \in (-1, 2), \end{cases}$

$f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = 1$; $f'_-(2) = 1$, $f'_+(2) = 2$.

2) $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (2n\pi, (2n+1)\pi), \quad n \in \mathbf{Z}; \\ 0, & x \in ((2n-1)\pi, 2n\pi), \quad n \in \mathbf{Z}, \end{cases}$

$f'_-(2n\pi) = 0$, $f'_+(2n\pi) = 1$,

$f'_-((2n-1)\pi) = -1$, $f'_+((2n-1)\pi) = 0$, $n \in \mathbf{Z}$.

IV.1.35. 1) $f^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$;

3) $f^{(n)}(x) = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$;

4) $f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{4}\left(\frac{3}{(x-2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$.

IV.1.36. $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geqslant 0; \\ -2x, & x < 0, \end{cases}$ $f''(x) = \begin{cases} 6x, & x > 0; \\ -2, & x < 0, \end{cases}$

$f''(0)$ не существует

IV.1.37. $f^{(n)}(0) = 0$, $n \geqslant 1$.

IV.1.41. Использовать формулу Лейбница и равенства из предыдущей задачи.

IV.1.45. 1) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$; 2) (i) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$; (ii) функция 1); (iii) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$; 3) $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbf{R}$; 4) $f(x) = x^2e^x$, $x \in \mathbf{R}$; 5) $f(x) = 2xe^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$.

IV.1.47. Решение этой сложной задачи можно найти в журнале: Физико-математическо списание.— 1983.— Т. 25, кн. 3— С. 248. См. также: Задачи по математическому анализу / **М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов**.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.— С. 114, 115.

§ 2

IV.2.2. Применить теорему Ролля к функции

$$[a, b] \ni x \mapsto e^{\alpha x}f(x).$$

IV.2.3. Применить теорему Ролля к функции

$$[a, b] \ni x \mapsto \frac{f(x)}{x}.$$

IV.2.4. Применить теорему Ролля к функции

$$[a,\ b] \ni x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

IV.2.5. Применить теорему Ролля к функции

$$[a,\ b] \ni x \mapsto f^2(x) - x^2.$$

IV.2.7. Применить теорему Ролля к функции

$$[a,\ b] \ni x \mapsto f(x)\exp(g(x)).$$

IV.2.8. Применить теорему Ролля к функции

$$[0,\ 1] \ni x \mapsto \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \dots + a_n x.$$

IV.2.9. Применить теорему Ролля к функции

$$[1,\ e^2] \ni x \mapsto \frac{a_0 \ln x}{1} + \frac{a_1 \ln^2 x}{2} + \dots + \frac{a_n \ln^{n+1} x}{n+1}.$$

IV.2.13. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго предположить противное и применить теорему Ролля.

IV.2.15. Положим $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1,\ x \in \mathbf{R}$.

Исходное уравнение равносильно уравнению $f(x) = 0$. Если уравнение имеет два корня, то по теореме Ролля $f'(\theta) = 0$ для некоторого $\theta \in \mathbf{R}$. Однако

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5} < 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

IV.2.16. Применить метод математической индукции и теорему Ролля. Подробное решение этой и следующей задачи содержится в кн.: Вибрані питання елементарної математики.— 3-є вид. перероб і доп. / За ред. **А. В. Скорохода.**— К.: Вища шк. Головне вид-во, 1982.— С. 298—300.

IV.2.17. См. указание к предыдущей задаче.

IV.2.23. 1) В качестве θ можно взять любое значение из $(a,\ b)$; 2) $\theta = \frac{a+b}{2}$; 3) $\theta = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$; 4) $\theta = \frac{b-1}{\ln b}$.

IV.2.24. Применить теорему Лагранжа на каждом из отрезков $[0,\ 1]$, $[1,\ 2]$, а затем воспользоваться теоремой Ролля.

IV.2.25. Пусть $c \in (a,\ b)$ — точка, в которой

$$f(c) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(c-a).$$

Тогда

$$\frac{f(c) - f(a)}{c-a} > \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b-a} > \frac{f(b) - f(c)}{b-c}.$$

Далее применить теорему Лагранжа к каждому из отрезков $[a,\ c]$, $[c,\ b]$.

IV.2.26. Если $x_0 \neq \frac{1}{2}$, то требуемое неравенство следует из теоремы Лагранжа, которую нужно применить к тому из отрезков $[0,\ x_0]$, $[x_0,\ 1]$, длина которого меньше $\frac{1}{2}$. Если $x_0 = \frac{1}{2}$ и функция f линейна на отрезке $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, то $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, а потому существует точка $x_1 > \frac{1}{2}$ со значением $f(x_1) > 1$. В этом случае нужно

неравенство следует из теоремы Лагранжа, примененной к отрезку $[x_1, 1]$. Если $x_0 = \frac{1}{2}$ и функция f отлична от линейной, например, $f(x_2) > 2x_2$ для $x_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то формулу Лагранжа нужно применить к отрезку $[0, x_2]$.

IV.2.28. Следствие теоремы Ролля. Для получения теорем Лагранжа и Коши положить $h(x) = 1$, $x \in [a, b]$, и $g(x) = x$, $x \in [a, b]$, и f соответственно.

IV.2.29. Применить теорему Коши к функциям

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad \psi(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [a, b].$$

IV.2.30. Рассмотреть функцию

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b],$$

для которой

$$g'_-(x) = f'_-(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad x \in (a, b),$$

и выполнены условия задачи IV.2.22.

IV.2.31. Нет. См. решение следующей задачи.

IV.2.32. Следствие задачи IV.2.30. Заметим, что утверждение настоящей задачи и задачи IV.2.30 справедливы для правосторонней производной.

IV.2.34. Применить теорему Лагранжа к функции f на отрезке $[1, x]$.

IV.2.35. Применить теорему Ролля к функции

$$[a, b] \ni x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \left(f_k(x) - f_k(a) - (g_k(x) - g_k(a)) \frac{f_k(b) - f_k(a)}{g_k(b) - g_k(a)} \right).$$

IV.2.38. Дважды использовать теорему Лагранжа. Сначала доказать, что

$$\exists\, C_1 \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in (a, b) \ : \ |f'(x)| \leqslant C_1.$$

В качестве C_1 можно взять число $|f'(x_0)| + C(b - a)$, где x_0 — произвольная фиксированная точка из (a, b).

IV.2.39. Применить теоремы Лагранжа к функции f и Кантора о равномерной непрерывности к функции f'.

IV.2.40. Применим теорему Лагранжа к функции

$$[a, b] \ni x \mapsto \operatorname{arctg} f(x).$$

Получим

$$\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \frac{f'(\theta)}{1 + f(\theta)^2}(b - a)$$

для некоторого $\theta \in (a, b)$. Отсюда

$$\frac{f'(\theta)}{1 + f^2(\theta)} \leqslant \frac{\pi}{4} < 1.$$

IV.2.41. Применить теорему Лагранжа к функции

$$[u, v] \ni x \mapsto \operatorname{arctg} f(x),$$

где $a < u < v < b$. Затем перейти к пределу в полученном с помощью условия (ii) неравенстве при $u \to a+$, $v \to b-$ с учетом условия (i).

IV.2.42. Пусть $x_0 \in (a, b)$ — произвольная фиксированная точка. Для любого $x \neq x_0$, согласно теореме Лагранжа,

$$f(x) - f(x_0) = f'(\theta)(x - x_0)$$

для некоторого θ, а потому $f(x) = f(x_0)$. Таким образом,

$$\forall\, x \in (a, b) \ : \ f(x) = f(x_0).$$

IV.2.43. Применить результат предыдущей задачи к функции $f - g$.

IV.2.44. 1) $f(x) = Dx + C$, $x \in (a, b)$, для $C \in \mathbf{R}$. Использовать предыдущ задачу с $g(x) = Dx$;

2) $f(x) = \frac{1}{2} Ex^2 + Dx + C$, $x \in (a, b)$, для $C \in \mathbf{R}$. Использовать предыдущ задачу с $g(x) = \frac{1}{2} Ex^2 + Dx$;

3) $f(x) = e^x + C$, $x \in (a, b)$, $C \in \mathbf{R}$;

4) условие задачи равносильно следующему:

$$f'(x) e^{-x} - f(x) e^{-x} = 0, \quad x \in (a, b),$$

или

$$\forall x \in (a, b) \qquad (f(x) e^{-x})' = 0.$$

Поэтому на основании предыдущей задачи

$$\exists C \in \mathbf{R} \quad \forall x \in (a, b) \ : \ f(x) e^{-x} = C,$$

то есть

$$f(x) = Ce^x, \quad x \in (a, b);$$

5) условие задачи равносильно следующему:

$$(1 + x)^{-\alpha} f'(x) - \alpha (1 + x)^{-\alpha-1} f(x) = 0, \quad x \in (-1, b),$$

или

$$\forall x \in (-1, b) \ : \ ((1 + x)^{-\alpha} f(x))' = 0.$$

Отсюда для $C \in \mathbf{R}$

$$f(x) = C(1 + x)^{\alpha}, \quad x \in (-1, b).$$

IV.2.47. Пусть $\{T_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность периодов функции f така что $T_n \to 0$, $n \to \infty$. Тогда для любого $x \in \mathbf{R}$

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + T_n) - f(x)}{T_n} = 0.$$

Утверждение задачи верно и для непрерывной функции, что доказывается элеме тарными средствами.

IV.2.48. По теореме Лагранжа

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(x + \frac{k}{n^2}\right) - f(x) \right) = \sum_{k=1}^{n} f'(\theta_{nk}) \frac{k}{n^2},$$

причем

$$|x - \theta_{nk}| < \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} \, \frac{n+1}{n}.$$

Поэтому $s_n \to \frac{1}{2} f'(x)$, $n \to \infty$.

§ 3

IV.3.2. $f'(0) = 0$, $f''(0) = -\frac{1}{3}$.

IV.3.3. Применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) e^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(f(x) + f'(x)) e^x}{e^x} = 0.$$

IV.3.5. 1) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$,
$x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$;

2) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$, $x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$;

3) $x \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n} + o(x^{n+1})$,
$x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$;

4) $\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$, $x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$;

5) $(a+x)e^x = a + (a+1)x + (a+2)\frac{x^2}{2!} + \cdots + (a+n)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$,
$x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$;

6) $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})$, $x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$;

7) $x \ln(1+x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n!} + o(x^{2n+1})$,
$x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$;

8) $\ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{3n}}{n!} + o(x^{3n})$,
$x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$;

9) $x \sin x - \cos x^2 = -1 + \frac{1}{0!\,2!}x^2 - \frac{1}{2!\,4!}x^4 + \cdots$
$\cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-2)!\,(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$, $x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$;

10) $\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x - \frac{2}{1\cdot 3}x^3 - \frac{2}{3\cdot 5}x^5 - \cdots$
$\cdots - \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$, $x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$;

11) $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^4}{2!} + \cdots$
$\cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})$, $x \to 0$, $n \in \mathbf{N}$.

IV.3.7. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{n}{6}$; 3) $\frac{n}{2}$.

IV.3.8. $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$.

IV.3.9. 1) x^2; 2) $\frac{2}{3}x^3$; 3) $\frac{x^3}{3}$; 4) $3x$; 5) $\frac{x^4}{8}$; 6) $-\frac{x^3}{3}$.

IV.3.10. 1) $-ex - ex^2 - \frac{e}{6}x^3$; 2) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{19}{24}x^5 + \frac{1791}{7!}x^7$;

3) $-\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{3}{40}x^5$.

IV.3.11. 1) $e^x = e\sum_{m=0}^{n}\frac{(x-1)^m}{m!} + e^{\theta}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, $x \in \mathbf{R}$,

$n \in \mathbf{N}$; θ — число, лежащее между 1 и x;

2) $\ln x = \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\frac{(x-1)^m}{m} + (-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{\theta^{n+1}}$,

$x > 0$, $n \in \mathbf{N}$; θ — число, лежащее между 1 и x.

IV.3.12. Согласно формуле Тейлора

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2), \quad x \to 0;$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x\theta(x) + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

IV.3.14. Для $x > 0$ имеем

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + f''(\theta)\frac{1}{2}, \quad \theta \in (x, x+1),$$

откуда

$$xf'(x) = \frac{x}{x+1}(x+1)f(x+1) - xf(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\theta}\cdot\theta f''(\theta) \to 0, \quad x \to +\infty.$$

IV.3.16. Использовать формулу Тейлора

$$f(u) = f(x) + f'(x)(u-x) + \frac{1}{2}f''(\theta)(u-x)^2$$

для $x \in [0, 1)$, $u = x + \varepsilon(1-x)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

IV.3.17. 1) Использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + e^{\theta}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0, x);$$

2), 3) аналогично 1).

IV.3.18. Согласно формуле Тейлора,

$$\sum_{k=1}^{[x^{-\frac{1}{2}}]} f(kx) = \sum_{k=1}^{[x^{-\frac{1}{2}}]}\left(f'(0)kx + \frac{1}{2}f''(\theta(kx))k^2x^2\right) =$$

$$= f'(0)x\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]\left(\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] + 1\right) + \eta(x) \to \frac{f'(0)}{2}, \quad x \to 0+;$$

$$\eta(x) := \sum_{k=1}^{[x^{-\frac{1}{2}}]} f''(\theta(kx))\frac{k^2x^2}{2} \to 0, \quad x \to 0+.$$

IV.4.1. Не обязательно. Рассмотреть функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ответ на второй вопрос утвердительный.

IV.4.2. Строго возрастает при $a \geqslant 1$.

IV.4.3. Функции $f + g$ и $f(g)$ монотонно возрастают на $\mathbf{R}$. Функции $f - g$ и fg не обязательно монотонны. Рассмотреть пример функций $f(x) = x$, $g(x) = 2x$, $x \in \mathbf{R}$.

IV.4.4. 1) Строго возрастает на $(-\infty, 0]$ и строго убывает на $[0, +\infty)$; 2) строго убывает на $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ и строго возрастает на $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$; 3) строго возрастает на $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$. Для определения знака производной доказать с помощью теоремы Лагранжа неравенство

$$\frac{u}{1+u} < \ln(1+u) < u, \quad u > -1, \quad u \neq 0;$$

4) строго возрастает; 5) строго убывает на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и строго возрастает на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$; 6) строго возрастает на $[2, +\infty)$.

IV.4.5. Воспользоваться неравенством

$$e^{-x} > 1 - x, \quad x \neq 0,$$

которое следует из теоремы Лагранжа.

IV.4.6. Доказать, что $f'(x) > 0$ при $x > 0$, и заметить, что $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

IV.4.7. Проверить, что $f'(x) > 0$ при $x > 0$, и заметить, что $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

IV.4.8. Проверить, что $f'(x) > 0$, $x > 0$ (см. указание к задаче IV.4.4), и воспользоваться тем, что $f(x) \to a$, $x \to +\infty$. Следовательно, $f(x) < a$ для любого $x > 0$.

IV.4.9. Сначала доказать, что функция f' строго возрастает и отрицательна на $(0, +\infty)$. Для этого проверить, что $f''(x) > 0$, $x > 0$, и что $f'(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Поскольку $f(x) \to a$, $x \to +\infty$, то $f(x) > a$, $x > 0$.

IV.4.10. Проверить, что $f'(x) < 0$, $x > 1$.

IV.4.11. 1) Биекция; 2) сюръекция.

IV.4.14. Подробное решение задач IV.4.12—IV.4.14 можно найти в кн.: Вибрані питання елементарної математики.— 3-є вид. перероб. і доп. / За ред. А. В. Скорохода.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1982.— С. 310, 311.

IV.4.15. С помощью теоремы Лагранжа доказать, что производная функции положительна на $(0, +\infty)$.

IV.4.16. Использовать неравенство Коши. См. решение задачи 5.32 в кн.: А. Я. Дороговцев. Избранные задачи по математическому анализу.— К. : Вища шк., 1982.— 104 с.

IV.4.17. Один. Функция $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ni x \to \frac{\cos x}{x}$ строго убывает на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

IV.4.19. При каждом $a \in \mathbf{R}$ существует точно одно решение.

IV.4.20. 1) Функция f строго возрастает на $\mathbf{R}$,

$$f \in C^1(\mathbf{R}), \quad f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}; \qquad g'(y) = \frac{1}{1 + \cos x},$$

$$x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbf{Z};$$

2) $g'(y) = \frac{1}{3x^2+3}$, $y \in \mathbf{R}$; 3) $g'(y) = \frac{1}{2}\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$, $y < 1$;

4) $g'(y) = \frac{x}{1+x}$, $y \in \mathbf{R}$; 5) $g'(y) = \frac{1+x^3}{3x^4+x^3}$, $y \neq 0$.

IV.4.21. Для функции

$$f(x) := a^{1+\frac{x}{a}} - a - x, \quad x \geqslant 0,$$

доказать, что $f'(x) > 0$ при $x > 0$. Кроме того, $f(0) = 0$.

IV.4.22. Определить интервалы монотонности функции

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

IV.4.23. Рассмотреть производную функции

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ni x \mapsto \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

IV.4.24. 1) Пусть

$$f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7, \quad x \geqslant 1.$$

Тогда $f'(x) > 0$ при $x > 1$ и $f(1) = 0$; 2) аналогично 1; 3) пусть

$$f(x) := x^3 + 3x + 6x\ln x + 2 - 6x^2, \quad x \geqslant 1.$$

Тогда $f''(x) = 6x + \frac{6}{x} - 12 > 0$ при $x > 1$ и $f'(1) = 0$, следовательно, $f'(x) > 0$ при $x > 1$. Поскольку $f(1) = 0$, то $f(x) > 0$ при $x > 1$; 4) аналогично 3).

IV.4.25. 1) Для функции $f(x) := 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$, $x \geqslant 1$, доказать, что $f'(x) > 0$ при $x > 1$, и учесть, что $f(1) = 0$; 2) для функции $f(x) := \sqrt[4]{x} - 2x - \frac{3}{8}$, $x \geqslant 0$, определить участки монотонности и учесть, что $f\left(\frac{1}{16}\right) = 0$; 3) правая часть неравенства очевидна. Для доказательства левой части неравенства для функции

$$f(x) := \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}, \quad x \geqslant 0,$$

доказать, что $f''(x) > 0$ при $x > 0$ и $f'(0) = 0$. Учитывая, что $f(0) = 0$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0$, получаем нужное неравенство; 4) применить теорему Лагранжа к функции $x \mapsto \ln x$ на отрезке $[1, u]$, где $u > 1$.

IV.4.26. Для функции

$$f(x) := bx^a - ax^b - b + a, \quad x \geqslant 1,$$

доказать, что $f'(x) < 0$, $x > 1$; $f(1) = 0$.

IV.4.27. Для функции

$$f(x) := \frac{1}{3}\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\sin x - x, \quad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2},$$

сначала установить, что $f''(x) > 0$ для $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и что $f'(0) = 0$. Тогда $f'(x) > 0$ для $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Затем учесть, что $f(0) = 0$.

IV.4.28. Для функции

$$f(x) := \frac{3\sin x}{2+\cos x} - x, \quad x \geqslant 0,$$

доказать, что производная $f'(x) \leqslant 0$ для $x \geqslant 0$ и не имеет интервалов постоянства и что $f(0) = 0$.

IV.4.29. Для функции

$$f(x) := \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} - x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

доказать, что $f'(x) > 0$ при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и что $f(0) = 0$.

IV.4.30. Для функции

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto (1+x^2)\operatorname{arcctg} x - x$$

определить интервалы монотонности и ее значение в точке, где производная равна 0.

IV.4.31. Рассмотреть производную левой части неравенства.

IV.4.32. Функция

$$f(x) := \ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{xe}, \quad x \geqslant 1,$$

обладает свойствами: (i) $f'(x) < 0$, $x \geqslant 1$; (ii) $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$. См. задачу IV.4.4.

IV.4.33. Определить интервалы монотонности функции

$$f(x) := \frac{x}{e} - \ln x, \quad x > 0,$$

и заметить, что $f(e) = 0$.

IV.4.34. Левая часть неравенства очевидна. Для доказательства правой части рассмотреть производную функции

$$[1, +\infty) \ni x \mapsto \frac{x^2-1}{2x} - \ln x$$

и значение функции в точке 1. Аналогично доказывается неравенство для $x \in (0, 1)$.

IV.4.35. Проверить, что производная функции

$$f(x) := \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{x} - \ln x, \quad x > 0,$$

положительна на $(0, +\infty)$ и что $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

IV.4.36. Для функции

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x), \quad x \geqslant 0,$$

имеем $f'(x) > 0$, $x > 0$; $f(0) = 0$.

IV.4.37. При $x > 1$ данное неравенство есть следствие неравенства из предыдущей задачи, при $x \in (0,1)$ неравенство доказывается так же, как в предыдущей задаче.

IV.4.38. Для функций

$$f(x) := x + \frac{x^2}{2} - (x+1)\ln(x+1), \quad x \geqslant 0,$$

$$g(x) := (x+1)\ln(x+1) - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \quad x \geqslant 0,$$

установить следующее: (i) $f(0) = 0$; $f'(x) > 0$, $x > 0$, и (ii) $g(0) = g'(0) = 0$; $g''(x) > 0$, $x > 0$.

IV.4.39 Для функции

$$f(x) := \ln(1+\cos x) - \ln 2 + \frac{x^2}{4}, \quad x \in [0, \pi)$$

справедливы утверждения:
(i) $f''(x) < 0$, $x \in (0, \pi)$; (ii) $f'(0) = 0$; (iii) $f(0) = 0$.

IV.4.40. Доказательство левой части неравенства следует из того, что для функции

$$f(x) := \ln(1+x^2) - x \operatorname{arctg} x, \quad x \geqslant 0,$$

$f''(x) < 0$ при $x > 0$; $f'(0) = 0$, $f(0) = 0$.

IV.4.41. Для функции

$$f(x) := 1 + xe^x - e^x, \quad x \geqslant 0,$$

проверить, что $f'(x) > 0$, $x > 0$; $f(0) = 0$.

IV.4.42. Для функции

$$f(x) := x^2e^x - e^x + 1 + x, \quad x \geqslant 0,$$

доказать, что $f''(x) > 0$, $x > 0$; $f'(0) = 0$, $f(0) = 0$.

IV.4.43. Для функции

$$f(x) := e^x - xe^{\frac{x}{2}} - 1, \quad x \geqslant 0,$$

доказать, что $f'(x) > 0$, $x > 0$; $f(0) = 0$.

IV.4.44. Неравенство следует из неравенств, доказанных в задачах IV.4.43 и IV.4.41.

IV.4.45. Рассмотреть функцию

$$f(x) := (e-x)\ln(e+x) - (e+x)\ln(e-x), \quad x \in [0, e),$$

для которой $f''(x) > 0$, $x \in (0, e)$; $f'(0) = 0$, $f(0) = 0$.

IV.4.46. Пусть

$$f(x) := e^{x+1} + \ln x - 2x + 1, \quad x \geqslant 1.$$

Тогда

$$f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x} - 2 > 1 + x - 1 + \frac{1}{x} - 2 > 0, \quad x > 1,$$

и $f(1) = 0$.

IV.4.47. Следствие неравенства, доказанного в задаче IV.4.41.

IV.4.48. Для функции

$$f(x) := (x+1)(\ln(x+1) - \ln 2) - x\ln x, \quad x > 0,$$

доказать, что $f'(x) < 0$, $x > 0$; $f(x) \to -\ln 2$, $x \to 0+$.

IV.4.49. 1) Применим теорему Лагранжа к функции $\sin$ на отрезке $[0, x]$:

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos\theta, \quad 0 < \theta < x;$$

2) применим теорему Коши на отрезке $[0, x]$, $x > 0$, к функциям

$$f(x) := 1 - \cos x, \quad g(x) := \frac{x^2}{2}, \quad x \geqslant 0.$$

Получим

$$\frac{(1-\cos x) - 0}{\frac{x^2}{2} - 0} = \frac{\sin\theta}{\theta}, \quad 0 < \theta < x,$$

откуда с учетом 1) получим нужное неравенство;

3) применить теорему Коши к функциям

$$f(x):=x-\sin x,\quad g(x):=\frac{x^3}{3!},\quad x\geqslant 0,$$

на отрезке $[0, x]$, $x>0$, и воспользоваться неравенством 2); 4) применить теорему Коши к функциям

$$f(x):=\cos x-1+\frac{x^2}{2},\quad g(x):=\frac{x^4}{4!},\quad x\geqslant 0,$$

на отрезке $[0, x]$, $x>0$, и воспользоваться неравенством 3); 5) применить теорему Коши к функциям

$$f(x):=\sin x-x+\frac{x^3}{3!},\quad g(x):=\frac{x^5}{5!},\quad x\geqslant 0,$$

на отрезке $[0, x]$, $x>0$, и воспользоваться неравенством 4).

Замечание. Аналогично доказывается, что для любого $x>0$ и $n\in\mathbf{N}$ справедливы неравенства

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}<\sin x<$$

$$<x-\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!},$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}-\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}<\cos x<$$

$$<1-\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}-\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}+\frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

IV.4.50. Оба неравенства достаточно доказать на одном из интервалов $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Для $x\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$ с помощью неравенства 3) предыдущей задачи имеем

$$\sin\pi x>\pi x-\frac{\pi^3x^3}{3!}>\pi x-\pi x^2,$$

поскольку неравенство

$$\pi x^2>\frac{\pi^3x^3}{3!}$$

выполняется для $x<\frac{6}{\pi^2}$, при этом $\frac{6}{\pi^2}>\frac{1}{2}$.

Для доказательства правой части рассмотрим функцию

$$f(x):=4x-4x^2-\sin\pi x,\quad x\in\left[0, \frac{1}{2}\right],$$

для которой

$$f'(x)=4-8x-\pi\cos\pi x,\quad f''(x)=-8+\pi^2\sin\pi x;$$

$$f(0)=0,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=0;\quad f'(0)=4-\pi,\quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=0;$$

$$f''(x_0)=0,\quad \pi x_0=\arcsin\frac{8}{\pi^2},\quad f''(0)=-8,\quad f''\left(\frac{1}{2}\right)=\pi^2-8.$$

Таким образом, $f''(x)<0$ при $x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x>x_0$. Поэтому функция f' убывает строго на отрезке $[0, x_0]$ и возрастает строго на $\left[x_0; \frac{1}{2}\right]$. Значение

в точке x_0 $f'(x_0) < 0$, следовательно, для некоторой точки $x_1 \in (0, x_0)$, $f'(x_1) = 0$ и $f'(x) > 0$ при $x \in [0, x_1)$, $f'(x) < 0$ при $x \in \left(x_1, \frac{1}{2}\right)$. Отсюда следует, что функция f строго возрастает на отрезке $[0, x_1]$ и строго убывает на отрезке $\left[x_1, \frac{1}{2}\right]$, а потому $f(x) > 0$, $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

IV.4.51. Левая часть неравенства доказана в задаче IV.3.17. Для доказательства правой части неравенства введем функцию

$$f(x) := \frac{x}{n} e^x - e^x + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad x \geqslant 0.$$

Для этой функции имеем

$$f'(x) = \frac{x+1}{n} e^x - e^x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}, \quad x \geqslant 0;$$

$$f''(x) = \frac{x+2}{n} e^x - e^x + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!}, \quad x \geqslant 0;$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{x+n}{n} e^x - e^x + 1, \quad x \geqslant 0,$$

причем $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{1}{n}$, $f''(0) = \frac{2}{n}$, ..., $f^{(n-1)}(0) = \frac{n-1}{n}$

и $f^{(n)}(x) > 1$, $x > 0$. Поэтому, согласно теореме Лагранжа,

$$f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) = f^{(n)}(\theta)\, x, \quad 0 < \theta < x,$$

следовательно, $f^{(n-1)}(x) > \frac{n-1}{n} + x$, $x > 0$. Аналогично получим $f^{(n-2)}(x) > \frac{n-2}{n} + \frac{n-1}{n} x$, $x > 0$. Таким образом, получим неравенства

$$f'(x) > \frac{1}{n} + \frac{2}{n} x, \quad x > 0;$$

$$f(x) > \frac{x}{n}, \quad x > 0.$$

Поэтому

$$\frac{x}{n} e^x - \frac{x}{n} > e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad x > 0.$$

Замечание. В действительности справедливо более сильное неравенство

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n+1} \left(e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right), \quad x > 0, \quad n \in \mathbf{N}$$

(см. задачу IX.3.57).

IV.4.52. Проверить, что функция

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto \ln x$$

выпукла вверх на $(0, +\infty)$.

IV.4.53. Проверить, что функция

$$[1, +\infty) \ni x \mapsto \ln x + \frac{1}{2x}$$

выпукла вверх на $[1, +\infty)$.

IV.4.56. Проверить, что функция

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto x \ln x$$

строго выпукла вниз на $(0, +\infty)$.

IV.4.57. Доказать, что функция

$$(0, \pi) \ni x \mapsto \ln \sin x$$

строго выпукла вверх на $(0, \pi)$.

IV.4.58. Доказать, что функция

$$(0, \pi) \ni x \mapsto \ln \sin x - \ln x$$

выпукла вверх на $(0, \pi)$.

IV.4.59. Сначала проверить, что функция

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto \left(x + \frac{1}{x}\right)^a$$

выпукла вниз на $(0, +\infty)$. Затем использовать неравенство Коши

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\,\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}.$$

IV.4.60. Использовать теорему Лагранжа, а также то, что f' для строго выпуклой вверх функции убывает.

IV.4.62. См. предыдущую задачу. Для доказательства оставшейся части рассмотреть производную функции наклона и доказать, что функция наклона не убывает.

IV.4.63. Решение этой задачи можно найти в кн.: **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: В 2-х т.— М.: Наука, 1978.— Т. 1.— С. 87, 262, 263. Как показывает пример функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1); \\ 2, & x = 1, \end{cases}$$

непрерывность на концах отрезка не обязательна.

IV.4.64. Неравенство равносильно тому, что функция наклона возрастает, которое, в свою очередь, равносильно определению выпуклости.

IV.4.65. Пусть f выпукла вниз и $f(x_1) < f(x_2)$ для некоторых $x_1 < x_2$. Тогда для $x > x_2$ имеем

$$\frac{x - x_2}{x - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x - x_1} f(x) \geqslant f(x_2),$$

откуда

$$f(x) \geqslant \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) - f(x_1)\,\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

§ 5

IV.5.1. Рассмотреть множество точек максимума, выделив те из них, для которых значение функции больше значений в окрестности радиуса 1, затем те, для которых значение функции больше значений в окрестности радиуса $1/2$ и т. д.

IV.5.3. 1) минимум при $x = \frac{1}{e}$; 2) для n нечетного максимум при $x = n$, для n четного максимум при $x = n$ и минимум при $x = 0$; 3) максимум при $x = 0$; 4) максимум при $x = 0$ и минимум при $x = \frac{8}{5}$; 5) минимум при $x = 0$ и

максимум при $x=\frac{4}{7}$; 6) максимум при $x=4$; 7) минимум при $x=-1$ и $x=1$, максимум при $x=0$; 8) максимум при $x=-2-\sqrt{10}$, минимум при $x=\sqrt{10}-2$; 9) максимум при $x=-1$, минимум при $x=1$, 10) максимум при $x=e$; 11) максимум при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и минимум при $x=0$; 12) максимум при $x=-1$ и $x=1$, минимум при $x=0$; 13) см. 11; 14) минимум при $x=1$ и максимум при $x=-1$; 15) см. 14); 16) максимум при $x=-\frac{2\pi}{3}$, $x=-\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$ и минимум при $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

IV.5.5. Минимальное значение равно

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

и достигается при

$$x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

IV.5.6. 1 и $\frac{\pi}{2}$. **IV.5.7.** $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

IV.5.8. Предположить, что $a_1<a_2<\ldots<a_n$, затем определить производную функции на каждом из интервалов, на которых она существует. Наименьшее значение равно

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}|a_j-a_k|=\sum_{k=1}^{n}|a_i-a_k|,$$

где $i=\left[\frac{n}{2}\right]+1$.

IV.5.9. Минимальное значение равно 2 и достигается при $x=0$.

IV.5.10. $\frac{3}{2}$.

IV.5.14. 1) Один корень при $a\leqslant 0$ и $a=\frac{1}{e}$, два корня при $0<a<e^{-1}$, не имеет корней при $a>e^{-1}$; 2) один корень при $a<9$, два — при $a=9$ и три — при $a>9$; 3) один корень при $a=1$ и $a\leqslant 0$, два корня при $0<a<1$, нет корней при $a>1$; 4) один корень при $a>0$, нет корней при $a\leqslant 0$; 5) два корня при $a<3$, один — при $a=3$ и нет корней при $a>3$.

§ 6

IV.6.3. Если $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$, то из равенства Коши

$$1^2=\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2\leqslant n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

следует, что минимальное значение равно $\frac{n+1}{n}$ и достигается при $x_1=x_2=\ldots$ $\ldots=x_n=\frac{1}{n}$.

Если не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны 1, то применим неравенство Коши следующим образом:

$$c^2=\left(\sum_{k=1}^n ca_kx_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^n (ca_k-1)x_k+1\cdot\sum_{k=1}^n x_k\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^n (ca_k-1)^2+1\right)\left(\sum_{k=1}^n x_k^2+\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2\right),$$

где число

$$c=(n+1)\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^{-1}.$$

Наименьшее значение равно

$$(n+1)\left((n+1)\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right)^{-1}$$

и достигается при

$$x_k=\left((n+1)a_k-\sum_{i=1}^n a_i\right)\left((n+1)\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right)^{-1},$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Возможен другой подход к решению этой задачи, основанный на использовании ортогонального преобразования $\mathbf{R}^n$.

IV.6.5. Заметить, что

$$a_n^n\to a>0,\quad n\to\infty\quad\Leftrightarrow\quad e^{n\ln a_n}\to e^{\ln a},\quad n\to\infty\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad n\ln a_n\to\ln a,\quad n\to\infty\quad\Leftrightarrow\quad n(a_n-1)\to\ln a,\quad n\to\infty.$$

Поэтому

$$n(pa_n+qb_n-1)\to\ln(a^pb^q),\quad n\to\infty,$$

что равносильно утверждению задачи.

IV.6.6. 0.

IV.6.7. 0.

IV.6.8. 1) 1; 2) $\frac{e}{4}$; 3) a; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{2}{3}$.

IV.6.11. Указание к задачам IV.6.9 — IV.6.11. Рассмотрим последовательность, данную в задаче IV.6.9. Заметим, что $a_n>0$, $n\in\mathbf{N}$, и что $a_n\to 0$, $n\to\infty$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n\ln(1+a_n)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{2},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{na_n}-\frac{1}{nx_1}\to\frac{1}{2},\quad n\to\infty,$$

а потому $na_n\to 2$, $n\to\infty$.

В задаче IV.6.10 сначала вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right),$$

дальнейшие рассуждения аналогичны. Другой подход применен к аналогичной задаче с итерациями sin в кн.: **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа : В 2-х т.— М. : Наука, 1978.— Т. 1.— С. 52, 220, 221.

IV.6.13. Можно считать, что многочлен P имеет целые коэффициенты. Рассмотреть рациональные решения уравнения $P(x)=p$, где p — простое число.

IV.6.20. $\frac{1}{2}$.

IV.6.21. Функция

$$g(x):=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\in(a, b];\\ f'(a), & x=a\end{cases}$$

непрерывна на $[a, b]$ и имеет производную

$$g'(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\left(f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)\right)$$

в точках интервала (a, b). Хотя бы одно из значений (наименьшее или наибольшее значение g на $[a, b]$) принимается в точке $\theta\in(a, b)$. Действительно, в противном случае g монотонна на $[a, b]$, что влечет за собой монотонность f'. Если же f' постоянна на $[a, b]$, то утверждение задачи верно для любого $\theta\in(a, b)$. Равенство $g'(\theta)=0$ равносильно утверждению задачи.

IV.6.22. Проверить, что f выпукла вниз. Затем сравнить отношения

$$\frac{f(x_0+1)-f(x_0)}{1},\quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

при $x>x_0+1$.

IV.6.23. Функция f непрерывна на $[a, b]$. Использовать теорему Коши о промежуточном значении.

IV.6.24. По теореме Лагранжа

$$f(b)-f(a)=f'(\theta)(b-a),$$

для некоторого $\theta\in(a, b)$, поэтому

$$|f'(\theta)|\leqslant\frac{2M_0}{b-a}.$$

Аналогично

$$f'(x)-f'(\theta)=f''(\tilde\theta)(x-\theta),$$

откуда имеем

$$|f'(x)|\leqslant\frac{2M_0}{b-a}+M_2(b-a).$$

Максимум правой части достигается при

$$b-a=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$$

и равен $2\sqrt{2M_0M_2}$. Справедливо более точное неравенство, полученное Ж. Адамаром в 1914 г.:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}.$$

IV.6.25. Использовать результат предыдущей задачи. Относительно задач IV.6.24 и IV.6.25 и их обобщений интересную информацию содержит книга: **Зобин Н. М., Крейн С. Г.** Математический анализ гладких функций.— Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1978.— 144 с.

IV.6.26. P — многочлен степени, не превосходящей m, поэтому $P^{(m+1)}(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$. Кроме того,

$$P^{(j)}(0) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant m,$$

поскольку

$$P^{(j)}(0) = (-1)^j \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k (-1)^k k^{m-j} m(m-1) \ldots (m-j+1) = 0.$$

Действительно, последнее равенство верно при $j = m$. Дифференцируя по y равенство

$$(1-y)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k (-1)^k y^k,$$

получим

$$-(m+1)(1-y)^m = \sum_{k=1}^{m+1} C_{m+1}^k (-1)^k k y^{k-1},$$

откуда при $y = 1$ имеем $P^{(m-1)}(0) = 0$. Затем умножить последнее равенство на y и снова продифференцировать по y и т. д. Из формулы Тейлора следует искомое утверждение.

Глава V

§ 1

V.1.1. $\operatorname{arctg} x + \dfrac{3\pi}{4}, \quad x \in \mathbf{R}.$

V.1.5. Проверить, что существуют и равны $F'_-(c)$ и $F'_+(c)$. Применяя теорему Лагранжа к функции F на отрезке $[x, c]$, $a < x < c$, получим

$$\frac{F(c) - F(x)}{c - x} = f(\theta), \quad x < \theta < c.$$

Отсюда $F'_-(c) = f(c)$. Аналогично $F'_+(c) = f(c)$.

V.1.6. 1) $(\exp(|x|) - 1)\operatorname{sign} x$; 2) $|x|e^x - (e^x - 1)\operatorname{sign} x$;

3) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2, & x < 0; \\[2mm] -\dfrac{x^3}{3} + x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 2; \\[2mm] \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \dfrac{8}{3}, & x > 2; \end{cases}$$

4) $\sin x \operatorname{sign}(\cos x) + 2\left[\dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2}\right]$;

5) $-\cos x\,(1 + \operatorname{sign}(\sin x)) + 2\left[\dfrac{x}{\pi}\right]$;

6) $(x \ln x - x + 1)\,\mathrm{sign}\,(x-1), \quad x > 0;$

$$7)\ F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x^3 - 2), & x \leqslant -1; \\ x, & -1 < x < 1; \\ \frac{1}{3}(x^3 + 2), & x \geqslant 1. \end{cases}$$

V.1.9. Предположим, что существует функция $F: \ (-1,\ 1) \to \mathbf{R}$, для которой $F'(x) = f(x)$, $x \in (-1,\ 1)$. К функции F на отрезке $[0,\ x]$, где $x > 0$, применим теорему Лагранжа

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = f(\theta) = 1, \quad 0 < \theta < x.$$

Следовательно, $F'_+(0) = F'(0) = 1$, однако $F'(0) = 0$.

V.1.10. 1) замена $x - 1 = u$; 2) замена $2 + x^2 = u$; 3) замена $x - a = u$; 4) замена $2 + e^x = u$; 5) замена $1 - x^2 = u^2$; 6) замена $\frac{x-1}{x+1} = u$; 7) замена $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = u^3$; 8), 9) интегрирование по частям; 10) воспользоваться тождеством

$$\frac{x^2}{1 + x^2} = 1 - \frac{1}{1 + x^2};$$

11) возвести в степень; 12) пусть

$$\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_n(x) := \int \frac{x^{2n}}{x^2 + a^2}\, dx, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Тогда для $n \geqslant 1$

$$\mathcal{J}_n = \int \frac{x^{2n-2}(x^2 + a^2) - a^2 x^{2n-2}}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - a^2 \mathcal{J}_{n-1}.$$

Учитывая равенство

$$\mathcal{J}_0 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad C \in \mathbf{R},$$

получаем нужное выражение для $\mathcal{J}_n$ при любом n; 13), 14) аналогично 12); 15)—17) интегрирование по частям.

Глава VI

§ 1

VI.1.1.

$$L(f,\ \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 (x_{k+1} - x_k),$$

$$U(f,\ \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}^2 (x_{k+1} - x_k).$$

Для определения нижнего интеграла используем неравенство

$$\alpha^2 \leqslant \frac{1}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2), \quad 0 < \alpha < \beta.$$

Получаем оценку

$$L(f, \lambda) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3}(x_k^2 + x_k x_{k+1} + x_{k+1}^2)(x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^3 - x_k^3) = \frac{1}{3}$$

для любого разбиения λ. Кроме того, для разбиения

$$\lambda_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\},$$

$$L(f, \lambda_n) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \to \frac{1}{3}, \quad n \to \infty,$$

по теореме Штольца. Следовательно, нижний интеграл равен $\frac{1}{3}$.

VI.1.3. Для любого разбиения $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ имеем $L(\lambda, f) = 0$ и

$$U(\lambda, f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(x_{k+1} - x_k) >$$

$$> \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k)(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, верхний интеграл не меньше $\frac{1}{2}$.

VI.1.4. (i) Использовать неравенство $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}$;
(ii) использовать неравенство $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$;
(iii) использовать неравенство $|x^2 - y^2| \leqslant (|x| + |y|)|x - y|$.

VI.1.12. Проверить, что множество точек с положительным колебанием не более чем счетно.

VI.1.14. 1) Сумма s_n есть сумма $\frac{1}{n}$ и интегральной суммы для непрерывной на $[0, 1]$ функции $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, разбиения $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ и точек $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$;

$$s = \int_0^1 \frac{dx}{1+x};$$

2) сумма s есть интегральная сумма для непрерывной на $[0, 2]$ функции

$$[0, 2] \ni x \mapsto \frac{1}{1+x},$$

разбиения $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, \frac{2n}{n}\right\}$ и точек $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2n}{n}$;

$$s = \int_0^2 \frac{dx}{1+x};$$

3) величина s_n есть интегральная сумма для непрерывной на $[0, 1]$ функции

$$[0, 1] \ni x \mapsto \frac{1}{1+x^3},$$

разбиения $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ и точек $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$;

$$s = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3};$$

4) величина s_n есть интегральная сумма для непрерывной на $[0, 1]$ функции

$$[0, 1] \ni x \mapsto x^2 \sqrt[3]{1+x^3},$$

разбиения $\left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ и точек $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$;

5) $s = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$; 6) $s = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$;

7) $s = \int_0^1 x^3 5^x dx$; 8) разность между s_n и интегральной суммой для непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции

$$[0, 1] \ni x \mapsto x^{r+s}$$

стремятся к 0 при $n \to \infty$

$$s = \int_0^1 x^{r+s} dx;$$

9) рассмотреть $\exp(\ln s_n)$; $s = \exp\left(\int_0^1 \ln(1+x)\,dx\right)$;

10) имеем $\ln s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, $s = \exp\left(\int_0^1 \ln(1+x)\,dx\right)$;

11) $s = \exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,dx\right)$; 12) $s = \exp\left(\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx\right)$;

13) $s = \int_0^1 x^{a-1} f(x^a)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^1 f(x)\,dx$;

14) заметить, что $s_n = \frac{1}{2n^2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k}{n}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \cos^2\frac{k}{n}\right)$,

$s = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \cos x\,dx\right)^2$; 15) $s = \int_0^1 \sin x\,dx$;

16) Использовать неравенство $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \quad x > 0$. Имеем

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} - s_n\right| < \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n}k^3 \to 0, \quad n\to\infty.$$

Таким образом, $s = \int_0^1 x\,dx$;

17) см. указание к предыдущей задаче,

$$s = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

VI.1.15. 1) Очевидно, что

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^{(\lambda)})\,\Delta x_k^{1+\alpha}\right| \leqslant \sup_{[a,b]}|f|\,(b-a)\,|\lambda|^\alpha \to 0$$

при $|\lambda| \to 0$;

2) использовать неравенство из решения задачи IV.4.4, предел равен $\int_a^b f(x)\,dx$;

3) $\exp\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$.

VI.1.16. $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$.

VI.1.17. Из условия следует, что

$$f(x) = \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{8} f\left(\frac{x+k}{9}\right) = \frac{1}{3^m}\sum_{k=0}^{3^m-1} f\left(\frac{x+k}{3^m}\right), \quad m \geqslant 2,$$

то есть правая часть есть интегральная сумма для функции f, разбиения $0, \frac{1}{3^m}, \frac{2}{3^m}, \ldots, 1$ и точек $\frac{x}{3^m}, \frac{1+x}{3^m}, \ldots, \frac{3^m-1+x}{3^m}$. Поэтому при каждом $x \in [0, 1]$ имеем

$$f(x) = \int_0^1 f(u)\,du.$$

Таким образом, $f(x) = 1$, $x \in [0, 1]$.

§ 2

VI.2.2. 1) Имеем

$$\int_0^1 \frac{1-x}{5-2x}\,dx + \int_1^2 \frac{x-1}{5-2x}\,dx + \int_2^3 (x-1)\,dx +$$

$$+ \int_3^4 \frac{x-1}{2x-5}\,dx = 2 + \frac{9}{4}\ln 3 - \frac{3}{4}\ln 5;$$

2) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$. Ввести замену $\frac{\pi}{4} - x = u$;

3) $\frac{\pi^2}{4}$. Пусть $f(x) := \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}$, $x \geqslant 0$.

Имеем

$$\int_0^{\pi} xf(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} ((\pi - x) + x) f(x)\,dx =$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \left(f(x) + f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) dx = \frac{\pi^2}{4};$$

4) $e^{f(1)}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{2a}{p+q}$; 7) $bf'(b) - af'(a) - f(b) + f(a)$.

VI.2.3. Разбить интеграл на сумму интегралов по отрезкам $[-a, 0]$ и $[0, a]$. В первом из полученных интегралов сделать замену $-x = u$.

VI.2.14. Использовать метод математической индукции и интегрирование по частям.

VI.2.18. Максимум при $x = 1$ и минимум при $x = 2$.

VI.2.19. Имеем

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\theta(x, k, n))\left(x - \frac{k}{n}\right) dx,$$

откуда и получаем нужное неравенство.

VI.2.21. По теореме Лагранжа сумма s_n, стоящая под знаком предела, равна

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f'(\theta_{kn}) \frac{k}{k^2 + n^2}, \quad x \leqslant \theta_{kn} \leqslant x + \frac{k}{k^2 + n^2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Поскольку

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \ : \ |\theta_{kn} - x| \leqslant \frac{1}{2n},$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \ : \ |f'(\theta_{kn}) - f'(x)| < \varepsilon.$$

Теперь легко проверить, что

$$\left| s_n - f'(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2 + n^2} \right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2 + n^2} \to \ln \sqrt{2}, \quad n \to \infty.$$

VI.2.22. Использовать суммы Дарбу.

VI.2.24. Достаточно доказать, что для любых действительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \neq 0$, справедливо неравенство

$$s := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{x_j x_k}{a_j + a_k + 1} > 0.$$

Действительно,

$$s = \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k \int_0^1 u^{a_j + a_k} du = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k u^{a_k} \right)^2 du > 0.$$

VI.2.25. Во втором интеграле сделать замену $u = f(t)$, а затем проинтегрировать по частям.

VI.2.26. Для производной g' имеем

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \left(x f(x) - \int_0^x f(u)\, du \right) = \frac{1}{x^2} \int_0^x (f(x) - f(u))\, du \geqslant 0,$$

так как $f(x) - f(u) \geqslant 0$ для $0 \leqslant u \leqslant x$.

VI.2.27. Для производной h' имеем при $x > 0$

$$h'(x) = \left(\int_0^x g(u)\, du \right)^{-2} \left(f(x) \int_0^x g(u)\, du - g(x) \int_0^x f(u)\, du \right) =$$

$$= \left(\int_0^x g(u)\, du \right)^{-2} g(x) \int_0^x g(u)\, du \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\int_0^x f(u)\, du}{\int_0^x g(u)\, du} \right) =$$

$$= \left(\int_0^x g(u)\, du \right)^{-2} g(x) \int_0^x g(u)\, du \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(\theta)}{g(\theta)} \right)$$

для некоторого θ, $0 < \theta < x$. Последнее равенство получено с помощью теоремы Коши. Поэтому $h'(x) \geqslant 0$, $x > 0$.

VI.2.28. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Положим $a = x_1$, $b = x_1 + x$, $x > 0$, $\delta = x_2 - x_1$. Согласно предположению,

$$\int_{x_1}^{x_1 + x} f(u)\, du \leqslant \int_{x}^{x_2 + x} f(u)\, du,$$

откуда на основании теоремы о среднем значении получаем

$$f(\theta_1(x))\, x \leqslant f(\theta_2(x))\, x,$$

где $x_1 < \theta_1(x) < x_1 + x$, $x_2 < \theta_2(x) < x_2 + x$. Сокращая последнее неравенство на x а переходи к пределу при $x \to 0$ с учетом непрерывности f, получаем неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

VI.2.29. (i), (ii) Использовать теорему о среднем значении; (iii) проинтегрировать по частям.

VI.2.30. Первая часть задачи следует из задачи IV.4.61. Для доказательства второй части показать, что $f''(x) \geqslant 0$.

VI.2.31. Разделив равенство из условия на x и вычислив производную, получим

$$\frac{2x^2 + 1}{x} = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad x > 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dx}(\ln f(x) - x^2 - \ln x) = 0, \quad x > 0.$$

Поэтому

$$f(x) = axe^{x^2}, \quad x \geqslant 0, \quad a > 0.$$

VI.2.32. Поскольку при $x \geqslant 0$

$$f(x) \cos\left(\int_0^x f(u)\,du\right) = \frac{1}{(1+x)^2},$$

то, учитывая условие, находим

$$f^2(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2} f^2(x) + \frac{1}{(1+x)^4}, \quad x \geqslant 0.$$

Отсюда

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}}, \quad x \geqslant 0.$$

VI.2.33. С помощью замены $x - u = v$ получаем равенство

$$e^x \int_0^x e^{-v} f(v)\,dv = \sin x, \quad x \in \mathbf{R},$$

из которого следует, что

$$e^{-x} f(x) = (e^{-x} \sin x)', \quad x \in \mathbf{R}.$$

Поэтому

$$f(x) = \cos x - \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

VI.2.34.

$$f(x) = \sqrt{\ln(e + x^2)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

VI.2.35. Для функции $g(x) := f(x) - 1 - x$, $x \in [0, 1]$ имеем $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$; $g''(x) = f''(x) \geqslant 0$, $x \in (0, 1)$. Отсюда следует, что g неотрицательна на $[0, 1]$. Кроме того, по условию

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{3}{2} = 0.$$

Следовательно, $g(x) = 0$, $x \in [0, 1]$; $f(x) = 1 + x$, $x \in [0, 1]$.

VI.2.36. Применить теорему Коши о промежуточном значении к функции

$$g(x) := \int_a^x f(u)\,du - \int_x^b f(u)\,du, \quad x \in [a, b].$$

VI.2.37. Функция

$$g(x) := e^{-x} \int_a^x f(u)\,du, \quad x \in [a, b]$$

удовлетворяет условиям теоремы Ролля, причем

$$g'(x) = -e^{-x} \int_a^x f(u)\,du + e^{-x} f(x).$$

Следовательно,

$$\exists\, \theta \in (a, b) \quad : \quad g'(\theta) = 0.$$

VI.2.38. Применить теорему Ролля к функции

$$g(x) := \frac{1}{x} \int_a^x f(u)\, du, \quad x \in [a, b].$$

VI.2.39. Применить теорему Коши к функциям

$$F(x) := \int_a^x f(u)\, du, \quad G(x) := \int_a^x g(u)\, du, \quad x \in [a, b].$$

VI.2.40. Применить теорему Ролля к функции

$$h(x) := \int_a^x f(u)\, du \int_x^b g(u)\, du, \quad x \in [a, b].$$

VI.2.42. Пусть $g(x) := f(x) - x$, $x \in [a, b]$. Тогда из заданных условий следует, что

$$g(a) > 0, \ \int_a^b g(x)\, dx < 0.$$

Затем использовать теорему о среднем значении и теорему Коши о промежуточном значении для функции g.

VI.2.43. Применить теорему о среднем значении к интегралу

$$\int_0^1 (f(u) - u^2)\, du = 0.$$

VI.2.44. Имеем

$$\int_0^1 f(x)\, dx = (x-1) f(x)\, \Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1) f'(x)\, dx.$$

Отсюда с помощью теоремы о среднем значении получаем

$$\int_0^1 f(x)\, dx = f(0) - f'(\theta) \int_0^1 (x-1)\, dx, \quad \theta \in (0, 1).$$

VI.2.45. Аналогично решению предыдущей задачи дважды проинтегрировать по частям.

VI.2.46. Положим

$$F(x) := \int_0^x f(u)\, du, \quad x \in [0, 1].$$

Тогда $F''(0) = f'(0) \neq 0$ и

$$F(x) = F(0) + F'(0)\, x + \frac{1}{2} F''(0)\, x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Аналогично

$$f(\theta)\, x = F'(\theta)\, x = x\,(F'(0) + F''(0)\,\theta + o(\theta)), \quad \theta \to 0.$$

Следовательно,

$$F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + o(x^2) = F'(0)x + F''(0)\theta(x)x, \quad x \to 0.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

VI.2.48. Пусть

$$\int_a^b g^2(x)\,dx > 0.$$

Рассмотреть неравенство

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \; : \; \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2\,dx \geqslant 0.$$

VI.2.52. Для любой функции $f \in G$, согласно неравенству Коши, имеем

$$1^2 = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \left(f(x)\sqrt{1+x^2}\right)\cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\,dx \cdot \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

а потому

$$\int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\,dx \geqslant \frac{4}{\pi},$$

при этом для функции $g(x) = \dfrac{4}{\pi(1+x^2)}$, $x \in [0, 1]$,

имеем

$$\int_0^1 (1+x^2) g^2(x)\,dx = \frac{4}{\pi}.$$

VI.2.53. Функция $[0, +\infty) \ni u \mapsto u^d$ выпукла вниз на $[0, +\infty)$. Поэтому для интегральной суммы имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \frac{\Delta x_k}{b-a}\right)^d \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)|^d \frac{\Delta x_k}{b-a},$$

откуда с учетом интегрируемости функций $|f|$ и $|f|^d$ получаем требуемое неравенство.

VI.2.55. Воспользоваться неравенством

$$\int_a^b (M - f(x))(f(x) - m)\,dx \geqslant 0.$$

VI.2.56. Для функции

$$h(x) = \left(\int_0^x f(u)\,du\right)^2 + \left(\int_0^x g(u)\,du\right)^2 - \left(\int_0^x \sqrt{f^2(u) + g^2(u)}\,du\right)^2, \quad x \in [0, 1],$$

проверить, что $h(0) = 0$, $h'(x) \leqslant 0$, $x \in [0, 1]$. Несколько других решений этой задачи можно найти в статье: Дороговцев А. Я., Кукуш А. Г. Избранные задачи университетского тура олимпиады «Студент и научно-технический прогресс» по математике // Математика сегодня.— К., 1983.— С. 155—157.

VI.2.57. Проверить, что функция

$$g(x) := \frac{1}{x-a} \int_a^x f(u)\, du, \quad x \in (a, b],$$

монотонно не убывает на $(a, b]$, а функция

$$h(x) := \frac{1}{b-x} \int_x^b f(u)\, du, \quad x \in [a, b),$$

монотонно не убывает на $[a, b)$. Вычислить g' и h' и воспользоваться теоремой о среднем значении.

VI.2.58. Достаточно доказать равносильное неравенство

$$\int_a^b (x-c) f(x)\, dx \geqslant 0,$$

где $c = \frac{1}{2}(a+b)$. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\int_c^b (x-c) f(x)\, dx \geqslant \int_a^c (c-x) f(x)\, dx,$$

которое, в свою очередь, в результате замены $x - \frac{1}{2}(b-a) = u$ равносильно неравенству

$$\int_a^c (x-a) f\left(\frac{1}{2}(b-a) + x\right) dx \geqslant \int_a^c (c-x) f(x)\, dx.$$

Это неравенство верно, так как

$$\int_a^c (x-a) f\left(\frac{1}{2}(b-a) + x\right) dx \geqslant f(c) \int_a^c (x-a)\, dx =$$

$$= f(c) \int_a^c (c-x)\, dx \geqslant \int_a^c (c-x) f(x)\, dx.$$

VI.2.59. Пусть число a фиксировано. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - a \right| = \int_0^1 |f(x) - a|\, dx.$$

Согласно решению задачи IV.5.8,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - a \right| \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right|,$$

где $l = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Переходя к пределу, получаем

$$\int_0^1 |f(x) - a|\, dx \geqslant \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| dx,$$

при этом использована равномерная непрерывность f на $[0, 1]$.

VI.2.60. Функция f выпукла вниз, поэтому из определения выпуклости следует, что

$$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b],$$

отсюда получаем требуемое неравенство для интегралов.

VI.2.61. Пусть число θ таково, что

$$f(\theta) = \max_{[a,b]} f.$$

Правая часть неравенства есть площадь треугольника с вершинами в точках $(a, 0)$, $(\theta, f(\theta))$ и $(b, 0)$. Далее на отрезке $[a, \theta]$ в силу выпуклости функции имеем

$$f(x) \geqslant f(a) + \frac{f(\theta) - f(a)}{\theta - a}(x - a)$$

при $\theta > a$. Отсюда

$$\int_a^\theta f(x)\, dx > \frac{1}{2}(f(\theta) - f(a))(\theta - a) + f(a)(\theta - a).$$

Аналогично

$$\int_\theta^b f(x)\, dx > \frac{1}{2}(f(\theta) - f(b))(b - \theta) + f(b)(b - \theta),$$

если $\theta < b$. Отсюда получаем требуемое неравенство.

VI.2.62. Интегрируя заданное неравенство по отрезку $[0, x]$, $x > 0$, получаем

$$e^x - 1 > x,$$

или

$$e^x > 1 + x, \quad x > 0.$$

Аналогично

$$e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2}, \quad x > 0,$$

и т. д.

VI.2.64. 1) Воспользоваться неравенствами

$$\frac{2x}{1 + x^2} < \frac{2x}{1 + x^{13}} < 2x, \quad x \in (0, 1);$$

2) воспользоваться неравенствами

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2n}}} < \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right];$$

3) использовать неравенство

$$e^u > 1 + u, \ u \neq 0,$$

из которого следует, что

$$e^{-x^2} > 1 - x^2, \quad e^{x^2} > 1 + x^2$$

или

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1 + x^2}, \quad x > 0.$$

VI.2.65. На основании теоремы о среднем значении имеем

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^a 2^x dx = \theta 2^0 \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} dx, \quad 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Функция $[0, +\infty) \ni u \mapsto u2^u$ строго возрастает на $[0, +\infty)$, кроме того,

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} < 1.$$

VI.2.66. Имеем

$$\int_0^{2\pi} x^a \sin x dx = \int_0^{\pi} x^a \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x^a \sin x dx = \int_0^{\pi} x^a \sin x dx +$$

$$+ \int_0^{\pi} (\pi + u)^a (-\sin u)\, du = \int_0^{\pi} (x^a - (\pi + x)^a) \sin x dx < 0.$$

Путем интегрирования по частям получаем также

$$\int_0^{2\pi} x^{a+1} \cos x dx = -(a+1) \int_0^{2\pi} x^a \sin x dx > 0.$$

VI.2.67. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_x^{x+a} \frac{\sin u}{u}\, du = -\left.\frac{\cos u}{u}\right|_x^{x+a} - \int_x^{x+a} \frac{\cos u}{u^2}\, du.$$

Легко проверить, что при $a > 0$, $x > 0$

$$\left| \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos (x + a)}{x + a} \right| \leqslant \frac{2}{x}.$$

Кроме того,

$$\left| \int_x^{x+a} \frac{\cos u}{u^2}\, du \right| \leqslant \int_x^{x+a} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + a} < \frac{1}{x}.$$

VI.2.68. Записать интеграл в виде

$$\int_x^{x+1} \frac{2u \sin u^2}{2u}\, du,$$

затем проинтегрировать по частям

$$\int_x^{x+1} \sin u^2 du = -\left.\frac{\cos u^2}{2u}\right|_x^{x+1} - \int_x^{x+1} \frac{\cos u^2}{2u^2}\, du.$$

Теперь можно провести рассуждения, аналогичные решению предыдущей задачи.

VI.2.69. См. решение предыдущей задачи.
VI.2.70. Проинтегрировать по частям.
VI.2.71. Проинтегрировать по частим.
VI.2.72. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \left(f(x)\int_a^x g(u)\,du\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\left(\int_a^x g(u)\,du\right)dx.$$

Отсюда на основании теоремы о среднем значении имеем

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(b)\int_a^b g(u)\,du - \int_a^\theta g(u)\,du\,(f(b)-f(a)) =$$

$$= f(a)\int_a^\theta g(x)\,dx + f(b)\int_\theta^b g(x)\,dx$$

с некоторым $\theta \in (a, b)$.

VI.2.73. Применить правило Лопиталя, предел равен $\frac{1}{13}$.

VI.2.74. Применить правило Лопиталя. 1) 1; 2) e^2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) e; 5) 1.

VI.2.75. Согласно правилу Лопиталя, предел равен a. Пример; $g(x) = \sin x$, $x \geqslant 0$.

VI.2.76. ab. **VI.2.77.** $\frac{1}{2} f'(x)$. **VI.2.80.** 0.

VI.2.81. Функция f интегрируема по отрезку $[0, x]$, $x \geqslant 0$, как ограниченная с одной точкой разрыва. Кроме того,

$$\left|\int_0^x f(u)\,du\right| \leqslant 1\cdot x$$

F'(0)-?

и, следовательно, для $x > 0$

$$F(x) = \lim_{u\to 0+}\int_u^x \cos\frac{1}{t}\,dt.$$

Интегрируя по частям, получим при $0 < u < x$

$$\int_u^x \cos\frac{1}{t}\,dt = \int_u^x\left(-\frac{1}{t^2}\right)\cos\frac{1}{t}\,(-t^2)\,dt = -t^2\sin\frac{1}{t}\Bigg|_u^x + 2\int_u^x t\sin\frac{1}{t}\,dt.$$

Тогда

$$F(x) = -x^2\sin\frac{1}{x} + 2\int_0^x u\sin\frac{1}{u}\,du,\quad x > 0,$$

а потому

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = -x\sin\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\int_0^x u\sin\frac{1}{u}\,du \to 0$$

при $x \to 0+$.

VI.2.82. После замены $\ln u = t$ получим

$$\int\limits_x^1 u^{a-1}\ln u\,du = \int\limits_{\ln x}^0 te^{at}dt = \left(\frac{t}{a}e^{at} - \frac{1}{a^2}e^{at}\right)\Bigg|_{\ln x}^0 =$$

$$= -\frac{1}{a^2} - \frac{x^a\ln x}{a} + \frac{x^a}{a^2} \to -\frac{1}{a^2}, \quad x\to 0+.$$

VI.2.83. 0.

VI.2.84. Заметим, что $\theta(n) > 0$, $n \in \mathbf{N}$ и $\theta(n)\to 0$, $n\to\infty$, поскольку

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^1 f(x)\,dx \geqslant \min_{[0,1]} f\cdot\theta(n), \quad n\geqslant 1.$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = n\theta(n)\cdot\frac{1}{\theta(n)}\int\limits_0^{\theta(n)} f(x)\,dx, \quad n\geqslant 1,$$

откуда имеем

$$\lim_{n\to\infty}(n\theta(n)) = \frac{1}{f(0)}\int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

VI.2.85. Заметим, что

$$\frac{1}{n}\int\limits_1^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx \to e, \quad n\to\infty,$$

а потому

$$\theta(n) > \frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_1^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx = \sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\int\limits_1^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx \to +\infty, \quad n\to\infty.$$

Далее имеем

$$\frac{1}{n}\int\limits_1^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx = \frac{\theta(n)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\theta(n)}\int\limits_0^{\theta(n)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx, \quad n\geqslant 1,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta(n)}{\sqrt{n}} = 1.$$

VI.2.88. $\dfrac{2}{f'(0)}\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,dx.$

VI.2.89. 1) 1; 2) $\frac{7}{24}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 1; 5) 1. Для определения пределов в 1), 2) и 3) можно использовать неравенство

$$\frac{1}{(x+1)^4} < \frac{x}{1+x^5} < \frac{1}{x^4}, \quad x > 1$$

VI.2.90. Для $c = 1$ $a_n = 1$, $n\geqslant 1$. Для $c > 1$ последовательность возрастает и не ограничена. При $c\in(0, 1)$ последовательность убывает и сходится к 0.

VI.2.91. Решение этой задачи см. в кн.: Дороговцев А. Я. Избранные задачи по математическому анализу.— К. : Вища шк. 1982, 104 с.

VI.2.92. 1) Последовательность функций

$$[0, 1] \ni x \mapsto \frac{nf(x)}{n+x}$$

сходится равномерно на $[0, 1]$ к функции $x \mapsto f(x)$, так как

$$\left| \frac{nf(x)}{n+x} - f(x) \right| = \frac{|xf(x)|}{n+x} \leqslant \frac{1}{n} \sup_{[0,1]} |f|, \quad x \in [0, 1];$$

2) равномерной сходимости на $[0, 1]$ подынтегральных функций в этом случае нет. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда

$$\left| \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x)}{1+nx} dx \right| \leqslant \varepsilon \sup_{[0,1]} |f|,$$

и, кроме того,

$$\left| \frac{f(x)}{1+nx} - 0 \right| \leqslant \frac{1}{n\varepsilon} \sup_{[0,1]} |f|.$$

Предел равен 0; 3) есть равномерная на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ сходимость подынтегральных функций, предел равен 0; 4) 0, см. решение задачи 2); 5) аналогично 2); предел равен $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$; 6) $f(0)$; 7) 0; 8) $\frac{1}{2}$; 9) 1; 10)— 12) 0.

VI.2.93. Для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем

$$\left| n \int_0^{1-\varepsilon} x^n f(x)\, dx \right| \leqslant n(1-\varepsilon)^n \max_{[0,1]} |f| \to 0, \quad n \to \infty;$$

$$\left| n \int_{1-\varepsilon}^{1} x^n f(x)\, dx - f(1) \right| \leqslant \max_{1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - f(1)| \frac{2n}{n+1} < 2 \max_{1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - f(1)|.$$

Предел равен $f(1)$; 2) $\frac{f(1)}{g(1)}$.

VI.2.94. Решение можно получить аналогично решению предыдущей задачи. Другой путь использует интегрирование по частям и результат предыдущей задачи

$$n^2 \int_0^1 x^n f(x)\, dx = n^2 \frac{x^{n+1}}{n+1} f(x) \Big|_0^1 - \frac{n^2}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\, dx \to -f'(x), \quad n \to \infty.$$

VI.2.95. $\frac{1}{2}(f(-1) + f(1))$.

VI.2.96. $\frac{1}{3}\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)$.

VI.2.98. Если число $M := \max\limits_{[a,b]} |f| = 0$, то утверждение задачи очевидно. Для $M > 0$ очевидно неравенство

$$c_n := \left(\int_a^b f(x)^{2n}\, dx \right)^{\frac{1}{2n}} \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{2n}}, \quad n \geqslant 1,$$

из которого следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} c_n \leqslant M.$$

Пусть $\varepsilon \in (0, M)$ задано. Поскольку $f \in C([a, b])$, то существуют $x_0 \in [a, b]$ и $\delta > 0$ такие, что

$$f(x_0) = M; \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ : \ f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$c_n \geqslant \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^{2n}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2n}} \geqslant \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)\delta^{\frac{1}{2n}}, \quad n \geqslant 1,$$

откуда получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} c_n \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}.$$

При $\varepsilon \to 0$ получим неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} c_n \geqslant M.$$

VI.2.99. Использовать интегрирование по частям

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = \left(f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\right)\Big|_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\,dx,$$

откуда имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx\right| \leqslant \frac{2}{n}\max_{[a,\,b]}|f| + \frac{b-a}{n}\max_{[a,\,b]}|f'|.$$

VI.2.100. Использовать результат предыдущей задачи. Предел равен

$$\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

VI.2.101. После замены $u = nx$ получим

$$\int_0^1 f(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n f(u)\,du = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(u)\,du = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k, \quad n \geqslant 0.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx = a.$$

VI.2.102. Сначала имеем при $n \geqslant 1$

$$\int_a^b f(nx)\,dx = \int_{na}^{nb} f(u)\,\frac{du}{n} = \frac{1}{n}\int_0^{n(b-a)} f(u)\,du =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n(b-a)}{T}\right]\int_0^T f(u)\,du + \frac{1}{n}\int_{\left[\frac{n(b-a)}{T}\right]}^{n(b-a)} f(u)\,du.$$

Отсюда следует нужное утверждение.

VI.2.103. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{4}$.

VI.2.104. 1) $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx$; 2) $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$;

3) пусть $m = m(n) := \left[\frac{n}{2\pi}\right]$, имеем

$$\frac{1}{n^2}\int\limits_0^n xf(\sin nx)\,dx = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} xf(\sin x)\,dx + r_n =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_0^{2\pi}(2k\pi + u)\,f(\sin u)\,du + r_n =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(2\pi\,\frac{m(m-1)}{2n^2} + \frac{mu}{n^2}\right) f(\sin u)\,du + r_n \to \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sin u)\,du, \quad n\to\infty,$$

с последовательностью $r_n \to 0$, $n\to\infty$.

VI.2.105. 1) $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx$; 2) $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\cos x)\,dx$; 3) $\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx$.

4) в результате замены $xu = z$ имеем для $m = m(n) := \left[\frac{x}{2\pi}\right]$, $x > 2\pi$

$$\int\limits_0^1 f(\sin xu)\cos u\,du = \int\limits_0^x f(\sin z)\cos\frac{z}{x}\,\frac{dz}{x} =$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(\sin z)\cos\frac{z}{x}\,dz + r_n =$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_0^{2\pi} f(\sin z)\cos\frac{2\pi k + z}{x}\,dz + r_n =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} f(\sin z)\left(\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{m-1}\cos\frac{2\pi k + z}{x}\right)dz + r_n \to$$

$$\to \int\limits_0^{2\pi} f(\sin z)\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \cos t\,dt\right)dz = \frac{\sin 1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sin z)\,dz$$

с последовательностью $r_n \to 0$, $n\to\infty$.

VI.2.106. Воспользоваться равномерной непрерывностью функции f на отрезке $[0, 1]$.

VI.2.107. Функция

$$x \mapsto \int\limits_0^1 f(u + x)\,du$$

непрерывна на $[0, 1]$, что следует из равенства

$$\int_{0}^{1} f(u+x)\,du = \int_{x}^{1+x} f(z)\,dz, \quad x \in [0, 1].$$

Далее использовать равномерную непрерывность функции f на отрезке $[0, 2]$.

VI.2.108. Доказательство аналогично решению предыдущей задачи. Более общие варианты задачи см. в статье: Дороговцев А. Я., Кукуш А. Г. Избранные задачи университетского тура олимпиады «Студент и научно-технический прогресс» по математике // Математика сегодня.— К., 1983.— С. 126.

Глава VII

§ 1

VII.1.1. При $a = 0$ и $q \in \mathbf{R}$ ряд сходится к сумме 0. При $a \in \mathbf{R}$ и $q \in (-1, 1)$ ряд сходится к сумме $\frac{a}{1-q}$. При $a \neq 0$ и $|q| \geqslant 1$ ряд расходится.

VII.1.2. 1) Для подсчета частичной суммы использовать равенство

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ряд сходится к 1; 2) использовать равенство

$$\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \in \mathbf{N},$$

сумма ряда равна 1; 3) использовать равенство

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

сумма ряда равна $\frac{1}{2}$; 4) сумма ряда равна $\frac{1}{2}$; 5) частный случай ряда 4) при $c_n = 2n(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$; сумма ряда равна $\frac{1}{4}$; 6) частный случай ряда 4) при $c_n = 4(2n-1)(2n+1)$, $n \in \mathbf{N}$; сумма ряда равна $\frac{1}{12}$; 7) частный случай ряда 4) при $c_n = mn(n+1)\ldots(n+m-1)$, $n \in \mathbf{N}$; сумма ряда равна $\frac{1}{m!m}$; 8) частный случай ряда 4) при $c_n = 2(2n-1)$, $n \in \mathbf{N}$; сумма ряда равна $\frac{1}{2}$; 9) частный случай ряда 4) при $c_n = 8(2n-1)^2$, $n \in \mathbf{N}$; сумма ряда равна $\frac{1}{8}$; 10) частный случай ряда 4) при $c_n = n!$, $n \in \mathbf{N}$; сумма ряда равна 1; 11) использовать следующее равенство с частичной суммой s_n заданного ряда для $n > m$:

$$s_n = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{1+m} - \frac{1}{2+m} - \cdots - \frac{1}{n+m}\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m}\right).$$

Отсюда следует, что

$$s_n \to \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right), \qquad n \to \infty;$$

12) сумма ряда равна $\frac{1}{m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{k}$.

Известно, что сумма этого ряда для $\frac{k}{m} \in \mathbf{N}$, есть число трансцендентное. См.: Solution of advanced problems // The American Mathematical Mo 'ly.— 1984.— 91.— P. 652, 653. 13) ряд расходится при любом x. Действительно, из сходимос ряда следует, что

$$\cos nx \to 0, \quad n \to \infty.$$

Из равенства

$$\cos(n+1)x = \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x$$

при $\sin x \neq 0$ получим

$$\sin(nx) \to 0, \quad n \to \infty,$$

откуда

$$1 = \sin^2(nx) + \cos^2(nx) \to 0, \quad n \to \infty,$$

что невозможно. Значения x, для которых $\sin x = 0$, рассмотреть отдель 14) использовать равенство

$$\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}}, \quad n \geqslant 1.$$

Сумма ряда равна $\frac{x}{1-x}$.

VII.1.3. В задаче II.2.25. было установлено, что

$$s_n - \ln n \to \gamma, \quad n \to \infty,$$

где γ — число Эйлера. Из этого соотношения также следует, что $s_n \to +\infty$, $n \to$

VII.1.6. Пусть для $n \in \mathbf{N}$ и $x \in (-1, 1)$

$$t_n(x) := \sum_{k=1}^{n} x^k = x\,\frac{1-x^n}{1-x}.$$

Тогда

$$xt_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k,$$

$$x(xt_n'(x))' = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = x\,\frac{1-x^n}{1-x} + x^2\,\frac{1-x^n-nx^n(1-x)}{(1-x)^2},$$

откуда следует равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2.$$

В частности, сумма ряда 1) равна 2. Аналогично,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2x^k = \sum_{k=1}^{n} kx^k + 2x^2\,\frac{1-x^n-nx^n(1-x)}{(1-x)^2} +$$

$$+ \frac{x^3}{(1-x)^3}\left(2-(nx^n+nx^{n-1}+n^2x^{n-1}(1-x))(1-x)-2x^n\right),$$

откуда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^k = \frac{x}{1-x} + 3\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

При $x = \frac{1}{2}$ получим сумму ряда 2), равную 6.

Из равенства

$$\int_0^x \frac{t_n(u)}{u}\,du = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

находим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-u^n}{1-u}\,du.$$

Пусть $x > 0$. Поскольку

$$\max_{0\leqslant u\leqslant x}\left|\frac{1-u^n}{1-u} - \frac{1}{1-u}\right| \leqslant \frac{x^n}{1-x} \to 0, \quad n\to\infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{du}{1-u} = -\ln(1-x).$$

При $x = \frac{1}{2}$ получаем сумму ряда 3), равную $\ln 2$.

VII.1.7. Формула верна при $x = 0$. Рассмотрим $x \in (0, 1)$. Используя рассуждения из решения предыдущей задачи, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} = \int_0^x \left(\frac{1}{v}\int_0^v \frac{1-u^n}{1-u}\,du\right) dv,$$

выражение в скобках при $v = 0$ считаем равным пределу при $v \to 0+$. Поскольку

$$\max_{0\leqslant v\leqslant x}\left|\frac{1}{v}\int_0^v \frac{1-u^n}{1-u}\,du - \frac{1}{v}\int_0^v \frac{du}{1-u}\right| \leqslant \frac{x^n}{1-x} \to 0, \quad n\to\infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = \int_0^x \left(\frac{1}{v}\int_0^v \frac{du}{1-u}\right) dv = -\int_0^x \frac{\ln(1-v)}{v}\,dv.$$

VII.1.8. 1) Согласно решению задачи VI.1.6,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k}\,x^k = \frac{x}{1-x} - \ln(1-x);$$

2) поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x} \qquad -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} =$$

$$= -\frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} - \frac{x}{1}\right) = \frac{\ln(1-x)}{x} + 1$$

(при преобразовании $x \neq 0$, однако левая и правая части последнего равенства равны, если определить правую часть в 0 как предел при $x \to 0$), то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} \qquad x \neq 0;$$

3) из равенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x),$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} = -\frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} - \frac{x}{1}\right) = \frac{\ln(1-x)}{x} + 1, \quad x \neq 0,$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} x^k = \frac{1}{x}(1-x)\ln(1-x) + 1, \quad x \neq 0;$$

4) поскольку

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{2k} = \frac{1-(-1)^{n+1}u^{2n+2}}{1+u^2},$$

после интегрирования по отрезку $[0, x]$ для $x > 0$ получим

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \int_0^x \frac{1-(-1)^{n+1}u^{2n+2}}{1+u^2}\, du.$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \operatorname{arctg} x;$$

5) аналогично предыдущему получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2).$

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} x^{2k} = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

VII.1.9. Для частичной суммы после замены переменной имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \int_1^2 f\left(\frac{x}{2^k}\right) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} f(u)\,du = \int_{2^{-n}}^{1} f(u)\,du \to \int_0^1 f(u)\,du, \quad n \to \infty.$$

VII.1.10. $\int f(x)\,dx.$

VII.1.11. При каждом $n \in \mathbf{N}$ к интегралу $\int\limits_{n-1}^{n} f(u)\,du$ применим теорему о среднем значении

$$\int_{n-1}^{n} f(u)\,du = f(x_n), \quad n-1 \leqslant x_n \leqslant n.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(u)\,du = \int_0^n f(u)\,du \to a, \quad n \to \infty.$$

§ 2

VII.2.2. Имеем для $n \in \mathbf{N}$

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{5^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} < 1 + \frac{1}{2^\alpha} s_n + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} s_n \leqslant 1 + \frac{s_{2n}}{2^{\alpha-1}}.$$

Поэтому

$$s_{2n} \leqslant \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}, \quad n \geqslant 1,$$

кроме того,

$$s_{2n+1} \leqslant s_{2n+2}, \quad n \geqslant 1.$$

VII.2.3. Первое утверждение следует из неравенства

$$\max(a_n, b_n) \leqslant a_n + b_n, \quad n \geqslant 1.$$

Пример рядов ко второму утверждению можно найти в кн: **Пойа Д.** Математическое открытие.— М.: Наука, 1976.— 448 с.

VII.2.4. 1) Сходится. Использовать неравенство

$$\frac{\sqrt{n} + \sin n}{n^2 - n + 1} < \frac{1 + \sqrt{n}}{n^2 - 2n + 1} < \frac{2\sqrt{n}}{(n-1)^2} < \frac{4\sqrt{n-1}}{(n-1)^2} = \frac{4}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad n \geqslant 2.$$

2) сходится при $\beta \geqslant 0$, $\beta - \alpha > 1$ и при $\beta < 0$, $\alpha < -1$, расходится в остальных случаях; 3) сходится при $\alpha > 1$, так как

$$\frac{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\alpha}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n}{n^\alpha} < \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{n^\alpha} < \frac{e}{n^\alpha}, \qquad n \geqslant 1.$$

Расходится при $\alpha \leqslant 1$, поскольку

$$\frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\alpha}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}{n^\alpha} > \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geqslant 1;$$

4) сходится, так как

$$\ln\frac{1+n^2}{n^2} < \frac{1}{n^2}, \quad n \geqslant 1;$$

5) сходится. Приведем два решения.

(i) Согласно теореме Лагранжа, примененной к функции $x \mapsto \ln x$ на отрезке $[1, u]$, где $u > 1$, имеем

$$\ln u - \ln 1 = \frac{1}{\theta}(u-1) < u-1, \quad 1 < \theta < u,$$

откуда следует, что $\ln u < u$ при $u > 1$. Отсюда получим неравенство $\ln\sqrt{n} < \sqrt{n}$, то есть $\ln n < 2\sqrt{n}$, $n \geqslant 1$. Таким образом,

$$\frac{\ln n}{n^2} < \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad n \geqslant 1.$$

(ii) Можно также воспользоваться ранее доказанным соотношением с числом $\alpha > 0$

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

из которого следует, что

$$\exists N \quad \forall n \geqslant N \ : \ \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \leqslant 1;$$

6) сходится. Пусть $\theta = \sqrt[5]{2} > 1$. Согласно неравенству Бернулли, $\theta^n = (1+(\theta-1))^n > n(\theta-1)$, $n > 1$, поэтому

$$2^n > n^5(\theta-1)^5, \quad n > 1,$$

откуда имеем

$$\frac{n^3}{2^n} < \frac{1}{(\theta-1)^5 n^2}, \quad n > 1;$$

7) сходится. Согласно теореме Лагранжа,

$$(1+x)^a - 1 = a(1+\theta)x > ax, \quad 0 < \theta < x,$$

при $x > 0$, $a > 1$. Поэтому

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)^{\sqrt{n}} > \left(\sqrt[4]{2}-1\right)\sqrt{n}, \quad n > 1,$$

или

$$2^{\sqrt{n}} > \left(\sqrt[4]{2}-1\right)^4 n^2, \quad n > 1;$$

8) сходится. При $n \geqslant 10$ $\ln n > 2$, откуда

$$\frac{1}{(\ln n)^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}, \quad n \geqslant 10;$$

9) сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$; 10) сходится.

VII.2.6. 1) Сходится. Использовать неравенство

$$\frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n^2},\quad n\geqslant 1;$$

2) **сходится.** Использовать неравенство

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1}\right)^n<\frac{1}{e^n},\quad n\geqslant 1;$$

3) **сходится.** Использовать неравенство

$$\frac{\ln^5 n}{n^2}<\frac{(10\sqrt[10]{n})^5}{n^2}=10^5\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},\quad n\geqslant 1;$$

4) **сходится при** $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$. Использовать соотношение

$$(\sqrt{n^2+1}-n)^\alpha\sim\frac{1}{2^\alpha}\cdot\frac{1}{n^\alpha},\quad n\to\infty;$$

5) **сходится.** Использовать соотношение

$$\ln\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2},\quad n\to\infty;$$

6) **сходится.** Поскольку

$$\ln(n-1)-\ln n=\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\infty,$$

то

$$\frac{\ln(n-1)}{\ln n}=1-\frac{1}{n\ln n}-\frac{1}{2n^2\ln n}+o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right),\quad n\to\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\ln\frac{\ln n}{\ln(n-1)}-\frac{1}{n\ln n}=-\left(-\frac{1}{n\ln n}-\frac{1}{2n^2\ln n}-\frac{1}{2n^2\ln^2 n}+\right.$$

$$\left.+o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)-\frac{1}{n\ln n}\sim\frac{1}{2n^2\ln n}\quad n\to\infty;$$

7) **сходится при** $\beta<0$, $\alpha+\beta<-1$ и при $\beta\geqslant 0$, $\alpha<-1$. Расходится в остальных случаях;

8) **сходится.** Пусть $a_n=n^{n-2}e^{-n}(n!)^{-1}$, тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{e}<\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}},\quad n\geqslant 1;$$

9) **сходится.** Пусть $a_n=n^3 2^{-n}$, тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\leqslant\theta=\frac{\theta^{n+1}}{\theta^n},\quad n\geqslant 4,$$

где

$$\theta=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)^3=\frac{125}{128}<1;$$

сходится. Пусть $a_n = (n!)^2((2n)!)^{-1}$, тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2(2n+1)} < \frac{1}{2} = \frac{2^{-n-1}}{2^{-n}}, \quad n \geqslant 1;$$

11) расходится. Пусть $a_n = n^n e^{-n}(n!)^{-1}$, тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} \cdot \frac{n}{n+1} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}, \quad n \geqslant 1;$$

12) расходится. Положим $a_n = e^{2n}(n!)^2 n^{-2n}$, тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} > 1, \quad n \geqslant 1.$$

VII.2.7. При каждом n с точностью до знака и постоянного слагаемого γ_n и $\tilde{\gamma}_n$ совпадают с частичными суммами рядов 5) и 6) соответственно из предыдущей задачи. Предел $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n \approx 0{,}577215\ldots$ — число Эйлера.

VII.2.8. 1) Поскольку

$$\sqrt[n]{a} - 1 = \exp\left(\frac{1}{n}\ln a\right) - 1 \sim \frac{1}{n}\ln a, \qquad n \to \infty,$$

то ряд сходится при $\alpha > 1$; 2), 3) сходится при $\alpha > 1$; 4) сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$; 5) сходится при $\alpha > 1$.

VII.2.9. 1) Расходится. Если $\{a_n : n \geqslant 1\}$ не сходится к 0, то последовательность

$$\left\{\frac{a_n}{1+a_n} \quad : \quad n \geqslant 1\right\}$$

также не сходится к 0. Если же $a_n \to 0$, $n \to \infty$, то

$$\frac{a_n}{1+a_n} > \frac{a_n}{2}$$

при всех достаточно больших n;

2) может расходиться, например, при $a_n = 1$, $n \geqslant 1$, может сходиться, например, при $a_n = 2^n$, $n \geqslant 1$;

3) может расходиться, например, при $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$; может сходиться, например, при $a_n = 0$, $n \notin \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $a_{2^k} = 1$, $k \in \mathbb{N}$;

4) сходится, так как

$$\frac{a_n}{1+n^2 a_n} < \frac{1}{n^2}, \qquad a_n > 0.$$

VII.2.10. Использовать критерий Коши сходимости ряда.

VII.2.13. 1) Сходится. Рассмотреть частичную сумму, собрать коэффициенты при a_k и сравнить с исходным рядом; 2) сходится. Использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим; 3) сходится; 4) может сходиться, например, для случая убывающей последовательности $\{a_n : n \geqslant 1\}$. Может расходиться, например,

$$a_n = 0, \; n \notin \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}, \; a_{2^k} = \frac{1}{k^2}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Замечание. Известно также, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

также сходится. См. кн.: **Пойа Д.** Математика и правдоподобные рассуждения.— М. : Наука, 1975.— 464 с.

VII.2.14 $0 < a < 91$.

VII.2.15. Используя неравенство

$$2uv \leqslant u^2 + v^2, \quad \{u, v\} \subset \mathbf{R},$$

получаем

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}), \quad \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geqslant 1.$$

VII.2.16. Легко показать, что $a_n > 0$, $n \geqslant 1$. Имеем

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1 + na_n}{a_n} - \frac{1}{a_n} = n, \quad n \geqslant 1,$$

откуда

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1} = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geqslant 1.$$

Поэтому

$$(n+1)^2 a_{n+1} \to 2, \quad n \to \infty.$$

VII.2.17. С помощью метода математической индукции доказать, что

$$\exists C \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n \leqslant \frac{C}{n^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

При этом использовать то, что функция

$$u \mapsto \frac{u}{1 + u^{\alpha}}$$

строго возрастает на $[0, +\infty)$, а также неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < 1 + \frac{c^{\alpha}}{n}, \quad n \geqslant 1,$$

с числом $c = \frac{1}{\alpha} \, 2^{\frac{1}{\alpha} - 1}$.

VII.2.18. Проверить, что

$$\exists C \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \ : \ a_n \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

VII.2.19. Поскольку

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = b_n, \quad n \in \mathbf{N},$$

то

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k \to a, \qquad n \to \infty.$$

Следовательно, $(n+1)\, a_{n+1} \to \frac{1}{a}$, $\quad n \to \infty$.

VII.2.20. Сначала проверить, что $a_n \to 0$, $n \to \infty$, а затем использовать соотношение

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1+a_n}{\operatorname{arctg} a_n} - \frac{1}{a_n} = \frac{(1+a_n)\,a_n - \operatorname{arctg} a_n}{a_n \operatorname{arctg} a_n} \to 1, \quad n \to \infty,$$

из которого следует, что

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1}\right) \to 1, \quad n \to \infty,$$

то есть $na_n \to 1$, $n \to \infty$.

VII.2.21. Положим $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \in \mathbf{N}$. По условию $s_n \to a$, $n \to \infty$; $a \in \mathbf{R}$. Поэтому

$$s_{2n-1} - s_{n-1} \to a - a = 0, \quad n \to \infty.$$

Кроме того,

$$s_{2n-1} - s_{n-1} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1} \geqslant na_{2n-1},$$

$$s_{2n} - s_n \geqslant na_{2n}, \quad n \geqslant 1,$$

отсюда следует, что

$$na_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

VII.2.24. Согласно условию,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \quad \forall\, n \geqslant N \;:$$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - p\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; (p-\varepsilon)\, b_n < a_n < b_n\,(p+\varepsilon),$$

откуда следует, что

$$(p-\varepsilon)\, r_n^2 < r_n^1 < (p+\varepsilon)\, r_n^2, \quad n \geqslant N.$$

VII.2.25. 1) Для $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty \quad x > 0;$$

2) Для $a_n = \dfrac{3^n\,(n!)^2}{(2n)!}$ имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3\,(n+1)}{2\,(2n+1)} \to \frac{3}{4}, \quad n \to \infty;$$

3) положив $a_n = \dfrac{7^n\,(n!)^2}{n^{2n}}$, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7n^{2n}}{(n+1)^{2n}} \to \frac{7}{e^2} < 1, \quad n \to \infty.$$

VII.2.26. Пусть p — предел последовательности $\{p_n : n \geqslant 1\}$, возможно, $p = +\infty$, и $a_n = p_1 p_2 \ldots p_n$, $n \geqslant 1$. Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to p, \quad n \to \infty.$$

Поэтому ряд сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$.

VII.2.29. 1) Сходится, поскольку для $a_n = n^{\sqrt{n}} 2^{-n}$, $n \geqslant 1$,

$$\sqrt[n]{a_n} = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty;$$

) сходится, так как

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{(\ln n)^n}} = \frac{3}{\ln n} \to 0, \quad n \to \infty;$$

) сходится, так как

$$\sqrt[n]{\frac{2^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1, \quad n \to \infty;$$

) сходится, так как

$$\sqrt[n]{\frac{n+2^{\sqrt{n}}}{2^n}} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty.$$

VII.2.30. Заметить, что

$$\left(\int_0^1 x^n e^{-nx} dx\right)^{\frac{1}{n}} \to \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (xe^{-x}) = \frac{1}{e} < 1, \quad n \to \infty.$$

VII.2.32. См. задачу II.1.35. Например,

$$a_n = \frac{1}{2^n (n + (-1)^n n + 1)}, \qquad n \geqslant 1.$$

VII.2.33. По условию

$$\exists\, a < \frac{1}{e} \quad \exists\, N \quad \forall\, n \geqslant N \ : \ \sqrt[\ln n]{a_n} < a,$$

то есть

$$a_n < a^{\ln n} = n^{\ln a},$$

причем $\ln a < -1$.

VII.2.34. Если последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \geqslant 1\}$ ограничена, то сходимость ряда из условия задачи следует из признака Коши. Предположим, что ряд сходится для любой последовательности $\{b_n : n \geqslant 1\}$ из условия задачи, а последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \geqslant 1\}$ не ограничена. Тогда существует подпоследовательность $\{\sqrt[m(k)]{|a_{m(k)}|} : k \geqslant 1\}$, для которой $\sqrt[m(k)]{|a_{m(k)}|} \geqslant k$, $k \geqslant 1$. Положим

$$b_n := 0, \quad n \notin \{m(k) \ \mid \ k \geqslant 1\}, \quad b_{m(k)} := \frac{1}{a_{m(k)}}, \quad k \geqslant 1.$$

Тогда $\sqrt[n]{b_n} \to 0$, $n \to \infty$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

расходится.

VII.2.35. Функция $x \mapsto x^{-\alpha}$ строго убывает на $(0, +\infty)$, а потому

$$\frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha}}, \quad x \in [k-1, k], \quad k \geqslant 2.$$

Отсюда

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_{n}^{N} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_{n}^{N} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)\, N^{\alpha-1}} \to \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}, \quad N \to \infty.$$

VII.2.36. Использовать интегральный признак. 1) Имеем

$$\int_{2}^{x} \frac{du}{u \ln^2 u} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x} \to \frac{1}{\ln 2}, \quad x \to +\infty;$$

2) аналогично

$$\int_{1} \frac{\sqrt{u}\,du}{2^{\sqrt{u}}} = \int_{1}^{\sqrt{x}} \frac{2t^2 dt}{2^t} = 2^{1-t} \left(\frac{t^2}{-\ln 2} - \frac{2t}{(\ln 2)^2} - \frac{2}{(\ln 2)^3} \right) \Bigg|_{1}^{\sqrt{x}} \to$$

$$\to \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^3}, \quad x \to +\infty.$$

VII.2.37. По условию

$$\exists\, a < \frac{1}{e} \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N:$$

$$\sqrt[\ln\ln n]{n a_n} < a \quad \Leftrightarrow \quad n a_n < (\ln n)^{\ln a}.$$

Затем применить интегральный признак.

VII.2.38. 1) Пусть $k \geqslant 2$. Использовать неравенства

$$(x+1)^{-\alpha} < k^{-\alpha} < x^{-\alpha}, \quad x \in (k-1, k),$$

проинтегрировать по отрезку $[k-1, k]$ и сложить; 2) аналогично 1).

VII.2.39. См. указание к предыдущей задаче.

VII.2.41. Использовать соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} (f(k) - f(x)\,dx) = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \left(\int_{k}^{x} f'(u)\,du \right) dx,$$

из которого получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \left(\int_{k}^{x} |f'(u)|\,du \right) dx \leqslant \int_{1}^{n+1} |f'(x)|\,dx.$$

VII.2.42. Сначала заметим, что

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1$$

Тогда

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \geqslant 1.$$

этом использовать результат задачи VII.2.7, из которого получаем

$$a_n \sim \frac{1}{\ln n}, \quad n \to \infty.$$

VII.2.43. Из неравенств

$$f(u) \geqslant f(u_k), \quad u \in [u_{k-1}, \quad u_k], \quad k \geqslant 2,$$

меем

$$\int\limits_{u_{k-1}}^{u_k} f(u)\,du \geqslant f(u_k)(u_k - u_{k-1}) \geqslant f(u_k)\,\Delta, \quad k \geqslant 2.$$

'словие:

$$\sup_{n \geqslant 2}(u_n - u_{n-1}) < +\infty.$$

VII.2.45. Рассмотрим случай, когда $\alpha > 1$. Из неравенства

$$\frac{1}{s_n^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha}}, \quad x \in [s_{n-1}, s_n], \quad n \geqslant 2,$$

юсле интегрирования получим

$$\frac{a_n}{s_n^{\alpha}} \leqslant \int\limits_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{dx}{x^{\alpha}}, \quad n \geqslant 2,$$

юэтому

$$\sum_{=1}^{n} \frac{a_k}{s_k^{\alpha}} < \frac{a_1}{s_1^{\alpha}} + \int\limits_{s_1}^{s_n} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{a_1}{s_1^{\alpha}} + \frac{1}{(\alpha - 1)\,s_1^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha - 1)\,s_n^{\alpha-1}} \to$$

$$\to \frac{a_1}{s_1^{\alpha}} + \frac{1}{(\alpha - 1)\,s_1^{\alpha-1}}, \quad n \to \infty.$$

VII.2.46. Решения для случаев 1) и 2) аналогичны. Рассмотрим ряд 2). Из неравенства

$$\frac{1}{s_n \ln^2 s_n} \leqslant \frac{1}{u \ln^2 u}, \quad u \in [s_{n-1}, s_n], \quad n \geqslant 2,$$

юлучим

$$\frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n} \leqslant \int\limits_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{du}{u \ln^2 u}, \quad n \geqslant 2,$$

откуда следует нужное утверждение.

VII.2.47. Из неравенства

$$\frac{1}{r_k^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{u^{\alpha}}, \quad u \in [r_{k+1}, r_k], \quad k \geqslant 1,$$

следует, что

$$\frac{a_k}{r_k^{\alpha}} \leqslant \int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} \frac{du}{u^{\alpha}}, \quad k \geqslant 1,$$

и далее

$$\sum_{k=1} \frac{u_k}{r_k^\alpha} \leqslant \int_{r_{n+1}}^{r_1} \frac{du}{u^\alpha} = \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{r_{n+1}}^{r_1} = \frac{r_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{r_{n+1}^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad n \geqslant 1, \quad \alpha \neq 1.$$

Для $\alpha = 1$ выводы аналогичны.

VII.2.48. Из неравенства

$$\frac{1}{a_n} \geqslant \frac{1}{x}, \quad x \in [a_n, a_{n-1}], \ n \geqslant 2,$$

имеем

$$\frac{a_{n-1} - a_n}{a_n} \geqslant \int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{dx}{x},$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n} \geqslant \int_{a_n}^{a_1} \frac{dx}{x} = \ln a_1 - \ln a_n \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

Для второго ряда рассуждения аналогичны:

$$\frac{1}{a_{n-1}^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in [a_n, a_{n-1}],$$

$$\frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1}^\alpha} \leqslant \int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{dx}{x^\alpha}; \quad n \geqslant 2.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=} \frac{a_{k-1} - a_k}{a_{k-}^\alpha} \leqslant \int_{a_n}^{a_1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a_1^{1-\alpha} - a_n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant \frac{a_1^{1-}}{1-\alpha}, \quad n \geqslant 2.$$

VII.2.49. 1) См. решение предыдущей задачи; 2) для доказательства использовать неравенство

$$\sum_{k=n}^{n+p} \frac{m(k) - m(k-1)}{m(k)} > \frac{1}{m(n+p)} (m(n+p) - m(n-1)) =$$

$$= 1 - \frac{m(n-1)}{m(n+p)}$$

и критерий Коши сходимости ряда.

VII.2.51. 1) Пусть

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}, \quad n \in \mathbf{N}; \quad s_0 := 0.$$

Тогда

$$\frac{a_n}{n} = s_n - s_{n-1}, \quad n \geqslant 2,$$

$$t_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k(s_k-s_{k-1})=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}ks_k-\sum_{k=2}^{n}ks_{k-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(k-(k+1))s_k+s_n=s_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}s_k\to 0,\quad n\to\infty;$$

2) пример: $a_n=\dfrac{1}{\ln(n+1)}$, $n\geqslant 1$;

3) для любого $n\geqslant 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^{1+\varepsilon}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(s_k-s_{k-1})}{k^{1+\varepsilon}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{s_k}{k^{\varepsilon}}-\frac{s_{k-1}}{k^{\varepsilon}}\right)=$$

$$=\frac{s_n}{n^{\varepsilon}}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^{\varepsilon}}-\frac{1}{(k+1)^{\varepsilon}}\right)s_k=\frac{s_n}{n^{\varepsilon}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon}-1}{(k+1)^{\varepsilon}}s_k,$$

кроме того,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon}-1}{(k+1)^{\varepsilon}}\sim\frac{\varepsilon}{k^{1+\varepsilon}},\quad k\to\infty.$$

VII.2.52. Функция f выпукла вверх на $[0,+\infty)$, поэтому

$$\int_{n}^{n+1}f(x)\,dx\geqslant\frac{1}{2}(f(n)+f(n+1)),\quad n\geqslant 1,$$

и

$$f(x)\leqslant f(n+1)+f'(n+1)(x-n-1),\quad x\geqslant 1,\quad n\geqslant 1.$$

Поэтому

$$0\leqslant\int_{n}^{n+1}f(x)\,dx-\frac{1}{2}(f(n)+f(n+1))\leqslant\frac{1}{2}(f(n+1)-f(n))-$$

$$-\frac{1}{2}f'(n+1),\quad n\geqslant 1.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k}^{k+1}f(x)\,dx-\frac{1}{2}(f(k)+f(k+1))\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(f(k+1)-f(k))-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot f'(k+1)\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(2)-f(1))+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(f(k+2)-f(k+1)-$$

$$-f'(k+1))\leqslant\frac{1}{2}(f(2)-f(1)),\quad n\geqslant 2,$$

поскольку

$$f(k+2)-f(k+1)-f'(k+1)=\frac{1}{2}f''(\theta_k)\leqslant 0,$$

$$\theta_k\in[k+1,\ k+2],\quad k\geqslant 1.$$

VII.3.1. 1) Последовательность

$$\left\{\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \colon \quad n \geqslant 1\right\}$$

сходится к числу γ. Для частичной суммы s_{2k} ряда 1) имеем

$$s_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2k} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k}\right) = \ln(2k) + \gamma_{2k} -$$

$$- \ln k - \gamma_k \to \ln 2, \quad k \to \infty.$$

Кроме того,

$$s_{2k+1} = s_{2k} + \frac{1}{2k+1} \to \ln 2, \quad k \to \infty;$$

2) аналогично для частичной суммы $\tilde{s}_{3k}$ ряда 2) имеем

$$\tilde{s}_{3k} = \ln(4k) + \gamma_{4k} - \frac{1}{2}\ln(2k) - \frac{1}{2}\gamma_{2k} - \frac{1}{2}\ln k - \frac{1}{2}\gamma_k \to \frac{3}{2}\ln 2, \qquad k \to \infty;$$

3) $\frac{1}{2}\ln 6$; 4) $\frac{1}{2}\ln 2$;

5) в этом случае для частичной суммы s_{3k+1} справедливо равенство

$$s_{3k+1} = \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2k+5} + \dots + \frac{1}{4k+3}, \quad k \geqslant 2,$$

которое доказывается с помощью метода математической индукции. Далее

$$s_{3k+1} = \ln(4k+4) + \gamma_{4k+4} - \frac{3}{2}\ln(2k+2) - \frac{3}{2}\gamma_{2k+2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln(k+1) + \frac{1}{2}\gamma_{k+1} \to \frac{1}{2}\ln 2.$$

VII.3.2. Проверить, что для частичной суммы s_n заданного ряда справедливо неравенство

$$s_n > \ln n + \gamma_n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = \ln n + \gamma_n -$$

$$- \frac{1}{2} \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

З а м е ч а н и е. Обратим внимание на то, что ряд, данный в этой задаче, а также ряды 1)—4) из предыдущей задачи, составлены из одних и тех же слагаемых и отличаются только порядком их следования. Интересно также, то, что при использовании правила приведения подобных членов к ряду 5) предыдущей задачи «сумма» ряда равна 0.

VII.3.3. При $x = 0$ сумма ряда равна 1. Для $x \in (0, 1)$ рассмотрим его разложение в двоичную дробь

$$x = 0,\ \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m \dots,$$

где $\alpha_m \in \{0, 1\}$, $m \geqslant 1$. При этом

$$[2^n x] = \alpha_1 2^{n-1} + \alpha_2 2^{n-2} + \dots + \alpha_n,$$

следовательно,

$$(-1)^{[2^n x]} = (-1)^{\alpha_n} = 1 - 2\alpha_n, \quad n \geqslant 1.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[2^n x]} 2^{-n} = 1 - 2x.$$

VII.3.4. Ряды 1), 3) и 4) сходятся условно. Ряд 2) сходится абсолютно.

VII.3.5. 1), 2) Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $\alpha \in (0, 1]$ и расходится при $\alpha \leqslant 0$; 3), 4) сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и условно при $\alpha \in (0, 1]$; 5) сходится абсолютно при $\alpha > \frac{1}{2}$ и условно при $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$; 6), 7) сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и условно при $\alpha \in (0, 1]$.

VII.3.6. 1) Достаточно рассмотреть частичные суммы

$$s_{km} = \sum_{n=1}^{km} \frac{1 - d(n, m)}{n} = \sum_{n=1}^{km} \frac{1}{n} - \sum_{r=1}^{k} \frac{m}{mr} = \ln(km) + \gamma_{km} - \gamma_k - \\ - \ln k \to \ln m, \ k \to \infty;$$

2) следствие 1), сумма ряда равна $\ln \frac{m}{l}$. При $m = 2$ получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots,$$

при $m = 3$ — ряд

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \dots$$

Ряд при $m = 2$, $l = 3$ имеет вид

$$0 - \frac{2}{2} + \frac{3}{3} - \frac{2}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{2}{8} + \frac{3}{9} - \frac{2}{10} + \dots$$

VII.3.7. Проверить, что последовательности средних арифметических и геометрических убывают.

VII.3.10. $a_{3m-2} = \frac{2}{\sqrt[3]{m}}$, $a_{3m-1} = a_{3m} = -\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$, $m \geqslant 1$.

VII.3.11. Рассмотреть неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} b_k - a \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{n-k+1} - a| \cdot |b_k| + |a| \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|, \quad n \geqslant 1.$$

VII.3.12. Пусть $s_n := |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$, согласно условию $s_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Положим

$$b_n = \frac{\operatorname{sign} a_n}{\sqrt{1 + s_n}}, \quad n \geqslant 1.$$

VII.3.13. Последовательность $\{|a_n| : n \geqslant 1\}$ ограничена. Предположим, что $|a_n| \leqslant 1$, $n \geqslant 1$. Пусть $n(1) > 1$ — число такое, что

$$\forall n > n(1) \ : \ |a_n| \leqslant \frac{1}{2},$$

пусть далее число $n(2) > 2n(1)$ такое, что

$$\forall n > n(2) \ : \ |a_n| \leqslant \frac{1}{2^2}.$$

Число $n(m)$ при $m \geqslant 2$ определим так, чтобы

$$n(m) > 2n(m-1); \quad \forall\, n > n(m) \;:\; |a_n| < \frac{1}{2^m}.$$

Положим теперь $b_n = 1,\ 1 \leqslant n \leqslant n(1)$;

$$b_n = \frac{1}{n(m) - n(m-1)}, \quad n(m-1) < n \leqslant n(m), \quad m \geqslant 2.$$

VII.3.14. Ограниченность последовательности $\{d_n : n \geqslant 1\}$.

VII.3.15. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | d_n - d_{n+1} |$. Сначала доказать, что $\{d_n : n \geqslant 1\}$ имеет одну предельную точку из $\mathbf{R}$, то есть сходится. Затем использовать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} d_k a_k = d_n s_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (d_k - d_{k+1}), \quad n \geqslant 2,$$

где $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \geqslant 1$, а также то, что $\{s_n : n \geqslant 1\}$ может быть любой сходящейся последовательностью.

VII.3.17. 1) Сходится условно; 2) — 5) сходится абсолютно; 6) сходится условно.

VII.3.19. Воспользоваться признаком Дирихле, неравенством

$$|\sin a| \geqslant \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a), \quad a \in \mathbf{R},$$

а также расходимостью гармонического ряда.

VII.3.20. 1)—6) воспользоваться признаком Дирихле; 7)—9) воспользоваться признаком Абеля.

§ 4

VII.4.5. Сначала проверить, что требуемое равенство достаточно доказать для ряда с неотрицательными числами. Пусть далее $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Тогда каждый из рядов

$$\sum_{n \in A_k} a_n, \quad k \in \mathbf{N},$$

сходится. Для каждого $m \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{m} a_n \leqslant \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{n \in A_k} a_n \right),$$

где $p = p(m)$ таково, что $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \bigcup\limits_{m=1}^{p} A_m$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n \in A_k} a_n \right).$$

Кроме того, в силу теоремы Дирихле, для $p \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{n \in A_k} a_n \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

VII.4.11. Абсолютная сходимость ряда для $a(x)$ следует из признака Д'Аламбера, значение $a(1) > 1$. Для любых $\{x, y\} \subset \mathbf{R}$ имеем

$$a(x)\, a(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = a(x+y).$$

Непрерывность функции a следует из неравенства

$$|a(x+\Delta x)-a(x)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+\Delta x)^n}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(nx^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}\Delta x^2+\dots+\Delta x^n\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\Delta x|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|x|+1)^n}{n!}\leqslant|\Delta x|\,a(|x|+1),$$

которое верно для любого $x\in\mathbf{R}$ и любого Δx, $|\Delta x|\leqslant 1$.

VII.4.12. Рассмотреть правую часть как произведение рядов.

§ 5

VII.5.1. 1) $\dfrac{1}{1-x}$; 2) 2; 3) использовать равенство

$$a_n=2n!,\quad n\geqslant 1,$$

а также следующее представление:

$$1+\frac{1}{a_n}=\frac{1+a_n}{n(1+a_{n-1})},\quad n\geqslant 2.$$

Значение произведения равно 2.

VII.5.2. 1) Расходится к 0;
2) доказать, что частичные произведения образуют монотонно неубывающую и ограниченную последовательность;
3) частичные произведения $p_n=a_1a_2\dots a_n$, $n\geqslant 1$, положительны и удовлетворяют соотношению

$$p_{n+1}\leqslant\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}p_{n-1},\quad n\geqslant 2.$$

С помощью этого соотношения доказать существование предела $p_n\to p$, $n\to\infty$, затем использовать второе условие задачи для доказательства того, что $p>0$;
4) расходится; 5) сходится.

VII.5.3. 1) Сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$; 2) сходится; 3) сходится; 4) расходится; 5) сходится; 6) сходится; 7) сходится; 8) расходится; 9) сходится; 10) расходится; 11) согласно условию задачи,

$$\exists C_1>0\quad\forall n\geqslant 1\ :\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\leqslant C_1,$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)\leqslant C_1,\quad n\geqslant 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}\leqslant C_1+\frac{1}{a_1(n+1)}\leqslant C_2,\quad n\geqslant 1.$$

Следовательно,

$$a_{n+1}\geqslant\frac{1}{(n+1)C_2},\quad n\geqslant 1$$

и произведение расходится;
12) расходится; 13) сходится.

Глава VIII

§ 1

VIII.1.2. 1) Сходится поточечно к функции $f(x)=0$, $x\in[0,1)$, и $f(1)=1$. Равномерной сходимости нет, поскольку

$$d_n=\sup_{[0,1)}|f_n-f|=\sup_{x\in[0,1)}x^n=1,\quad n\geqslant 1;$$

2) сходится поточечно к функции $f(x)=0$, $x\in[0,1]$. Равномерной сходимости нет, поскольку

$$d_n=\sup_{[0,1]}|f_n-f|=\sup_{[0,1]}|f_n|=1,\quad n\geqslant 1$$

3) сходится равномерно на B_α к $f(x)=0$, $x\in B_\alpha$; 4) сходится равномерно на B_α к $f(x)=0$, $x\in B_\alpha$; 5) сходится поточечно на A к $f(x)=0$, $x\in A$. Равномерной на A сходимости нет, поскольку

$$d_n=\sup_{(0,+\infty)}f_n=1,\quad n\geqslant 1;$$

6) сходится равномерно на B_c;
7) сходится поточечно и равномерно на $\mathbf{R}$ к $f(x)=0$, $x\in\mathbf{R}$;
8) сходится поточечно на A к $f(x)=0$, $x\in A$. Равномерной на множестве A сходимости нет, поскольку

$$d_n=\sup_{x\in[0,1]}\frac{nx}{1+n^2x^2}=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1,\quad n\geqslant 1;$$

9) сходится равномерно на B_α, так как

$$d_n=\sup_{[\alpha,1]}\frac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{2n}{1+n^2\alpha^2}\quad n\geqslant 1;$$

10) сходится поточечно на $\mathbf{R}$ к $f(x)=0$, $x\in\mathbf{R}$. Равномерной сходимости нет, так как

$$d_n=\sup_{\mathbf{R}}\exp(-(x-n)^2)=1,\quad n\geqslant 1;$$

11) сходится равномерно на множестве B_c, так как

$$d_n=\sup_{x\in B}\exp(-(x-n)^2)=\exp(-(c-n)^2),\quad n>c;$$

12) сходится поточечно на $[0,1]$ к функции $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(x)=0$, $x\in(0,1]$. Равномерной на $[0,1]$ сходимости нет, так как

$$d_n=\sup_{x\in(0,1]}\frac{1}{1+(nx-1)^2}=1,\quad n\geqslant 1;$$

13) сходится поточечно на $[0,1]$ к функции $f(x)=0$, $x\in[0,1]$. Равномерной на $[0,1]$ сходимости нет, так как

$$d_n=\sup_{x\in[0,1]}\frac{x^2}{x^2+(nx-1)^2}\geqslant\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(n\frac{1}{n}-1\right)^2}=1,\quad n\geqslant 1;$$

14) сходится поточечно на $[0,+\infty)$ к функции $f(x)=1$, $x\in[0,1)$; $f(1)=0$, $f(x)=-1$, $x>1$. Равномерной на $[0,+\infty)$ сходимости нет, так как

$$d_n=\sup_{x\geqslant 0}|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sup_{x\in[0,1)}\frac{2x^n}{1+x^n}=1,\quad n\geqslant 1;$$

15) не сходится равномерно на B;

16) сходится поточечно на $[0, 1]$ к функции $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Сходится равномерно на $[0, 1]$ к f, так как

$$d_n = \sup_{[0,1]} f_n = \max_{[0,1]} f_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty;$$

17) сходится поточечно на $[0, 1]$ к функции $f(x) = x$, $x \in [0, 1)$ и $f(1) = 0$. Равномерной на $[0, 1]$ сходимости нет, так как

$$d_n = \sup_{[0,1]} |f_n - f| = \sup_{x \in [0,1)} x^n = 1, \quad n \geqslant 1;$$

18) сходится поточечно на $[0, 1]$ к функции $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Сходится равномерно на $[0, 1]$ к f, так как

$$d_n = \sup_{x \in [0,1]} \left|\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 - x^2\right| = \sup_{x \in [0,1]} \left|\frac{1}{n^2} - \frac{2x}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \quad n \geqslant 1;$$

19) сходится поточечно на $\mathbf{R}$ к функции $f(x) = 0$,

$$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\right\} \quad \text{и} \quad f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 1, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Равномерной на B_1 сходимости нет. Сходится равномерно на B_2 к f;

20) сходится поточечно на $[0, 1]$ к функции $f(x) = 1$, $x \in [0, 1)$ и $f(1) = \frac{1}{2}$. Равномерной на $[0, 1]$ сходимости нет. Сходится равномерно на $[0, \frac{1}{2}]$ к f;

21) сходится поточечно на $[0, 1]$ к $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Равномерной на $[0, 1]$ сходимости к f нет, так как

$$d_n = \sup_{x \in [0,1]} (nx^n(1 - x)) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \to \frac{1}{e}, \quad n \to \infty;$$

22) сходится поточечно на $[0, 1]$ к $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Сходится равномерно на $[0, 1]$ к f, поскольку

$$d_n = \sup_{x \in [0,1]} (n^3 x^n (1 - x)^4) = n^3 \left(\frac{n}{n+4}\right)^n \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \to 0, \quad n \to \infty;$$

23) сходится поточечно на $[0, 1]$ к $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Сходится к f равномерно на $[0, 1]$, так как

$$d_n = \sup_{[0,1]} |f_n - f| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{x}{1 + nx} \leqslant \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1;$$

24) сходится поточечно на $[0, 1]$ к $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Сходится к f равномерно на $[0, 1]$, поскольку

$$d_n = \sup_{x \in [0,1]} \frac{n^3 x}{1 + n^4 x} \leqslant \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 1;$$

25) сходится поточечно на A к $f(x) = 0$, $x \in A$. Сходится к f равномерно на $[a, +\infty)$, так как

$$d_n = \sup_{x \geqslant a} \frac{n^3 x}{1 + n^4 x^2} = \sup_{x \geqslant a} \frac{1}{nx} \cdot \frac{n^4 x^2}{1 + n^4 x^2} \leqslant \frac{1}{na}, \quad n \geqslant 1;$$

26) сходится поточечно на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ к $f(x) = 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Равномерной на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ сходимости нет;

27) сходится поточечно на $\mathbf{R}$ к $f(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$. Сходится равномерно на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ к f.

VIII.1.3. Последовательность сходится поточечно на $\mathbf{R}$ к $f(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; эта сходимость равномерна на $\mathbf{R}$, поскольку

$$d_n = \sup_{\mathbf{R}} |f_n| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2xn^{\frac{3}{2}}}{x^2+n^3}\right)\right| \leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad n \geqslant 1.$$

VIII.1.4. Последовательность сходится поточечно на $\mathbf{R}$ к $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$. Эта сходимость равномерна на $[-a, a]$, так как

$$d_n = \sup_{x\in[-a,a]} \left(x^2 - n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\right) = a^2 - n\ln\left(1-\frac{a^2}{n}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Сходимость к f не является равномерной на $\mathbf{R}$, поскольку

$$d_n = \sup_{\mathbf{R}} |f_n - f| = +\infty, \quad n \geqslant 1.$$

VIII.1.5. Предел $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Сходимость к f не является равномерной на $(0, +\infty)$.

VIII.1.6. Предел $f(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$; $f(x) = |x|$, $|x| > 1$. Сходимость к f равномерна на $\mathbf{R}$, так как

$$d_n = \sup_{\mathbf{R}} |f_n - f| \leqslant \sup_{[0,1]} |f_n - f| + \sup_{[1,+\infty)} |f_n - f| = \max_{x\in[0,1]} \left(\sqrt[2n]{1+x^{2n}} - 1\right) +$$

$$+ \sup_{x\geqslant 1} \left(\sqrt[2n]{1+x^{2n}} - x\right) \leqslant \sqrt[2n]{2} - 1 + \sup_{x\geqslant 1} \left(u^{2n-1} + u^{2n-2}x + \cdots + x^{2n-1}\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[2n]{2} - 1 + \frac{1}{2n}, \quad u = \sqrt[2n]{1+x^{2n}} \geqslant 1, \quad n \geqslant 1.$$

VIII.1.7. Предел равен $f(x) = 2$, $x \in [-2, 2]$, $f(x) = |x|$, $|x| > 2$. Далее см. решение предыдущей задачи.

VIII.1.8. Поточечно сходится к $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$. Сходимость равномерна на $\mathbf{R}$, поскольку

$$d_n = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| n\left(\sin x\cos\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}\cos x - \sin x\right) - \cos x\right| \leqslant$$

$$\leqslant n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) + \left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right), \quad n \geqslant 1.$$

VIII.1.9. Поточечный на A предел есть $f(x) = \alpha x$, $x \geqslant 0$. Сходимость к f на $[0, 1]$ равномерна, так как

$$d_n = \sup_{[0,1]} |f_n - f| = |f_n(1) - f(1)|, \quad n \geqslant 1.$$

На множестве $[0, +\infty)$ сходимость равномерна при $\alpha = 1$ и не является равномерной при $\alpha \neq 1$.

VIII.1.10. Предел есть $f(x) = \frac{x^2}{4\pi}$, $x \in \mathbf{R}$. Сходимость к f равномерна на $[0, a]$ и не является равномерной на $\mathbf{R}$.

VIII.1.11. Пусть

$$f_n(x) = a_0(n)x^m + a_1(n)x^{m-1} + \cdots + a_m(n), \quad x \in [a, b], \quad n \geqslant 1.$$

Доказать, что для каждого $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ последовательность $\{a_k(n) : n \geqslant 1\}$ сходится к некоторому числу.

VIII.1.14. Не обязательно. Пример 1: $A=[0, +\infty)$, $f_n(x)=g_n(x)=x+\frac{1}{n}$, $x\geqslant 0$, $n\geqslant 1$; $f(x)=g(x)=x$, $x\geqslant 0$. Пример 2: $A=(0, 1]$, $f_n(x)=g_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{n}$, $x\in A$, $n\geqslant 1$; $f(x)=g(x)=\frac{1}{x}$, $x\in A$.

VIII.1.17. Использовать неравенство

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f_n(x')|+|f_n(x')-f_n(x'')|+|f_n(x'')-f(x'')|,$$

где $\{x', x''\}\subset\mathbf{R}$, $n\geqslant 1$.

§ 2

VIII.2.1. 1) $A=\left(-2+\frac{1}{e}, e-2\right)$. 2) $A=(-1, 1]$; 3) $A=[-1, 1]$;

4) $A=\mathbf{R}\setminus\{0\}$; 5) $A=[0, +\infty)$; 6) $A=(-3, -1)\cup(1, 3)$;

7) $A=\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; 8) $A=\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$;

9) $A=\left(\frac{-\sqrt{5}-3}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$; 10) $A=\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$; 11) $A=[0, 1)$;

12), 13) $A=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi \mid n\in\mathbf{Z}\right\}$

14) $$A=\bigcup_{n\geqslant 0}\left(\left[-\sqrt{\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi}, -\sqrt{2n\pi}\right)\cup\left(\sqrt{2n\pi}, \sqrt{\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi}\right]\cup\right.$$
$$\left.\cup\left(-\sqrt{\left(2n+\frac{4}{3}\right)\pi}, -\sqrt{(2n+1)\pi}\right]\cup\left[\sqrt{(2n+1)\pi}, \sqrt{\left(2n+\frac{4}{3}\right)\pi}\right)\right);$$

15) $A=\mathbf{R}$; 16) $A=\mathbf{R}$; 17) $A=\mathbf{R}\setminus[-1, 1]$; 18) $A=(-1, 1)$;

19) $A=(-1, 1)$; 20) $A=\mathbf{R}$; 21) $A=\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

22) $A=\mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$; 23) сходится к $\frac{x}{1-x}$ при $|x|<1$ и к $\frac{1}{1-x}$ при $|x|>1$;

24) $A=\mathbf{R}$; 25) $A=(1, +\infty)$; 26) $A=\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 27) $A=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$;

28) $A=\mathbf{R}$; 29) $A=\mathbf{R}$.

VIII.2.4. Пример: $a_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}$, $n\geqslant 1$, $x\in A=[0, 1]$, и $f(0)=0$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0, 1]$. В этом случае

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}f(x)\,a_n(x)\right|=\sup_{x\in(0,1]}\frac{2}{x2^n}=+\infty,\quad n\geqslant 1.$$

Условие: ограниченность на A функции $\frac{1}{f}$.

VIII.2.7. Использовать критерий Коши равномерной сходимости и неравенство Коши.

VIII.2.8. 1) $A=(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$; 2) $A=\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi, \frac{\pi}{4}+n\pi\right)$.

VIII.2.9. 1) Сходится равномерно на $[-c, c]$, поскольку

$$\sup_{x\in[-c,c]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)\right| = 0, \quad n \geqslant c.$$

Не сходится равномерно на $\mathbf{R}$, поскольку

$$\sup_{\mathbf{R}} |a_n| = 1, \quad n \geqslant 1;$$

2) сходится равномерно на $[-c, c]$, так как

$$\sup_{[-c,c]} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad n \geqslant c.$$

Сходится равномерно на $\mathbf{R}$, поскольку

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad |a_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2};$$

3) сходится равномерно на $[0, c]$, $0 < c < 1$, и не сходится равномерно на $[0, 1)$; 4) не сходится равномерно на $[0, 1]$; 5) Сумма ряда равна $1 - x$ для $x \in [0, 1]$. Сходимость равномерна на $[0, 1]$, поскольку

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=0}^{n} (1-x)^2 x^k - (1-x)\right| = \sup_{x\in[0,1)} |(1-x)x^{n+1}| =$$

$$= \left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}, \quad n \geqslant 1;$$

6) не сходится равномерно на $(1, +\infty)$ и сходится равномерно на $[2, +\infty)$.

VIII.2.10. 1) $A = (-\infty, 1]$, $B = (-\infty, 1)$. Сходимость на D равномерна, поскольку

$$\sup_{x\in[1,2]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} 2^{-k(1-x)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in[1,2]}\left(\frac{1}{n+1} 2^{-(n+1)(1-x)}\right) = \frac{1}{n+1}, \quad n \geqslant 1;$$

2) $A = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $B = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$. Сходимость равномерна на $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$, поскольку

$$\sup_{x\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} 2^k (3x-1)^k\right| \leqslant \sup_{x\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]} \frac{|6x-2|^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad n \geqslant 1;$$

3) $A = [-1, 2]$, $B = (-1, 2)$. Сходимость равномерна на $[0, 1]$, поскольку

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(2^{-k(1+x)} + 3^{k(x-2)}\right)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}(2^{-k} + 3^{-k}), \quad n \geqslant 1;$$

4) сходимость равномерна на $[-2, -1]$, поскольку

$$\sup_{x\in[-2,-1]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{x+1}{x}\right)^k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}, \quad n \geqslant 1.$$

$$A = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right], \quad B = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right).$$

VIII.2.11. 1) Использовать признак Вейерштрасса равномерной сходимости; 2) использовать неравенство $|\sin u| \leqslant |u|$, $u \in \mathbf{R}$; 3) использовать неравенство $\ln(1+u) \leqslant u$, $u > 0$; 7) заметить, что для $n \geqslant 1$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} (n^2x^2e^{-n^2|x|}) = \frac{1}{n^2} \sup_{u\in\mathbf{R}} (u^2e^{-|u|}) = \frac{4}{n^2e^2};$$

8) воспользовать тем, что

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{\sqrt[3]{n}\,|x|}{1+n^3x^2} = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} \sup_{u\geqslant 0} \frac{\sqrt{u}}{1+u} = \frac{1}{2n^{\frac{7}{6}}}, \quad n \geqslant 1;$$

9) воспользоваться тем, что для $n > 2$

$$\sup_{x\in[-1,1]} (x^2(1-x^2)^{n-1}) = \sup_{u\in[0,1]} (u(1-u)^{n-1}) = \frac{1}{n-2}\left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{n-1};$$

10) заметить, что для

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3} \right| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{2|x|}{x^2+n^3} = \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}} \sup_{u\geqslant 0} \frac{\sqrt{u}}{1+u} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}};$$

12) использовать соотношение

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{|x|\,|\cos nx|}{\sqrt{(n^2+1)(n^2x^4+1)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \sup_{u\geqslant 0} \frac{\sqrt[4]{u}}{\sqrt{1+u}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n(n^2+1)}}, \quad n \geqslant 1;$$

17) заметить, что

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} (e^{-n|x|} \sin(x^2\sqrt{n})) \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}} (e^{-n|x|}x^2\sqrt{n}) = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sup_{u\geqslant 0} (e^{-u}u^2) = \frac{4}{e^2n^{\frac{3}{2}}}, \quad n \geqslant 1.$$

VIII.2.12. Использовать критерий Коши равномерной сходимости.

VIII.2.13. Для каждого $x \geqslant 0$ и каждого $n \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{n:\ |x-n|<\frac{1}{2}} \frac{1}{n} e^{-n(x-n)^2} \leqslant \frac{1}{n_0}, \quad n_0 = \left(x-\frac{1}{2},\ x+\frac{1}{2}\right) \cap \mathbf{N};$$

$$\sup_{x:\ |x-n|\geqslant\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n} e^{-n(x-n)^2}\right) \leqslant \frac{1}{n} e^{-\frac{n}{4}}.$$

Поэтому

$$\sup_{x\geqslant 0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k(x-k)^2} \leqslant \sup_{x\geqslant 0} \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{\substack{k\geqslant n+1,\\ |k-x|\geqslant\frac{1}{2}}} \frac{1}{k} e^{-\frac{k}{4}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-\frac{k}{4}}, \quad n \geqslant 1.$$

VIII.2.14. Воспользоваться признаком Дирихле равномерной сходимости ряда.

VIII.2.15. Использовать тождество Абеля и критерий Коши равномерной сходимости.

VIII.2.16. Воспользоваться признаком Дирихле равномерной сходимости. В 3) заметить, что

$$n^{-x}=n^{-x+\frac{\alpha}{2}}n^{-\frac{\alpha}{2}},\quad n\geqslant 1.$$

VIII.2.17. Воспользоваться тождеством Абеля и критерием Коши равномерной сходимости.

VIII.2.18. См., например, кн.: **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т.— М.: Физматгиз, 1959.— Т. 2, С. 434, 435.

VIII.2.19. Действительно, для $n\geqslant 1$

$$\sup_{x\in A}\left|\sum_{k=1}^{n}\ln p_k(x)-\ln p(x)\right|=$$

$$=\sup_{x\in A}\left|\ln\left(p^{-1}(x)\prod_{k=1}^{n}p_k(x)\right)\right|\leqslant\frac{1}{a}\sup_{x\in A}\left|p(x)-\prod_{k=1}^{n}p_k(x)\right|.$$

VIII.2.20. Действительно, для $n\geqslant 1$

$$\sup_{x\in A}\left|\prod_{k=1}^{n}e^{a_k(x)}-e^{a(x)}\right|\leqslant e^{c}\sup_{x\in A}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(x)-a(x)\right|,$$

где

$$c=\sup_{\substack{x\in A,\\ n\geqslant 1}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\right|.$$

§ 3

VIII.3.1. Использовать критерий Коши равномерной сходимости и критерий Коши сходимости числового ряда.

VIII.3.2. $A=(0,+\infty)$. Сходимость не является равномерной на множестве A, см. предыдущую задачу.

VIII.3.3. Пример: $x\in\mathbf{R}$, $a_1(x):=\chi_{[1,+\infty)}(x)$,

$$a_n(x):=\frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x)-\frac{1}{n-1}\chi_{[n-1,+\infty)}(x),\quad n\geqslant 2.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(x)=\frac{1}{n}\chi_{[n,+\infty)}(x),\quad x\in\mathbf{R},\quad n\geqslant 1,$$

и, таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=0,\quad x\in\mathbf{R},$$

причем, сходимость равномерна на $\mathbf{R}$.

VIII.3.4. Ряд сходится на $\mathbf{R}$, поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x\sin(n^2x)=xa(x),\quad a(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(n^2x),$$

при этом функция a есть сумма равномерно сходящегося на $\mathbf{R}$ в силу признака Вейерштрасса ряда из непрерывных на $\mathbf{R}$ функций.

VIII.3.5. Сумма ряда непрерывна на $[0,+\infty)$, равномерная сходимость устанавливается с помощью признака Вейерштрасса.

VIII.3.6. Ряд сходится на $\mathbf{R}$ и его сумма непрерывна на $\mathbf{R}$. Для доказательства непрерывности в точке $x_0\in\mathbf{R}$ доказать равномерную на отрезке $[-|x_0|-1,|x_0|+1]$ сходимость ряда с помощью признака Вейерштрасса.

VIII.3.10. $A = (-1, 1)$, сумма ряда непрерывна на A.

VIII.3.11. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in [0, 1],$$

сходится равномерно на $[0, 1]$ в силу признака Абеля равномерной сходимости. Поэтому согласно теореме о непрерывности суммы ряда на $[0, 1]$

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

VIII.3.13. Ряд из условия задачи сходится при $x \in [0, 1)$. Используя свойства сходящихся рядов, имеем для $x \in [0, 1)$

$$(1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2} =$$

$$= x + 2x^2 - 2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n - 2(n-1) + n - 2)\, x^n = x.$$

Поэтому искомый предел равен 1.

VIII.3.14. Ряд в условии задачи сходится для $x \in [0, 1)$, для этих x имеем

$$(1-x)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} n^m x^n = \sum_{k=0}^{m+1} \left(C_{m+1}^k (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^m x^{n+k} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(C_{m+1}^k (-1)^k \sum_{n=1}^{m-k+1} n^m x^{n+k} \right) + \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k (-1)^k \sum_{n=m+2}^{\infty} (n-k)^m x^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(C_{m+1}^k (-1)^k \sum_{n=1}^{m-k+1} n^m x^{n+k} \right) + \sum_{n=m+2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k (-1)^k (n-k)^m \right) x^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(C_{m+1}^k (-1)^k \sum_{n=1}^{m-k+1} n^m x^{n+k} \right),$$

поскольку

$$\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k (-1)^k (n-k)^m = 0, \quad n \geqslant m+2,$$

см. задачу IV.6.26. Таким образом, искомый предел равен

$$\sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k (-1)^k \sum_{n=1}^{m+k+1} n^m = \sum_{n=1}^{m+1} \sum_{k=0}^{m-n+1} C_{m+1}^k (-1)^k n^m.$$

VIII.3.15. $A = (-3, -1) \cup (1, 3)$.

VIII.3.18. 1) $A = (-\infty, 0)$. Поскольку $p(x) > 0$, $x \in A$, то достаточно доказать, что $\ln p \in C(A)$. Непрерывность суммы ряда на A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + e^{nx})$$

следует из его равномерной на любом отрезке вида $(-\infty, -\alpha]$, $\alpha > 0$, сходимости, поскольку

$$\ln(1 + e^{nx}) \leqslant e^{nx} \leqslant e^{-\alpha n}, \quad x \in (-\infty, -\alpha], \quad n \geqslant 1;$$

2) $A = (-1, 1)$; 3) $A = (-1, +\infty)$; 4) $A = \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$.

VIII.3.19. Докажем, что

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_nx^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n).$$

Действительно, поскольку

$$\ln(1+a_nx^n)\leqslant a_nx^n,\quad x\in[0,1],\quad n\geqslant 1,$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

сходится равномерно на $[0, 1]$, то искомый ряд сходится равномерно на $[0, 1]$. Следовательно, его сумма есть непрерывная на $[0, 1]$ функция. Искомый предел равен $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

VIII.3.20. Ряды имеют непрерывные на отрезке $[a, b]$ члены, сходятся равномерно на $[a, b]$ в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости, поэтому применима теорема о почленном интегрировании функционального ряда.

1) $\int\limits_0^2 f(x)\,dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n}{4}\sin\frac{4}{n}\right)$; 2) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\ln\frac{n+1}{n+2}-\frac{2}{n+2}\right)$;

3) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(1+\sqrt{n})^3(3+\sqrt{n})}{\sqrt{n}(2+\sqrt{n})^3}$.

VIII.3.21. Применить теорему о почленном дифференцировании ряда. Для доказательства равномерной на $\mathbf{R}$ сходимости ряда из производных заметить, что

$$\frac{2|x|}{(n^2+x^2)^2}\leqslant\frac{2}{n^4},\quad |x|\leqslant 1;$$

$$\frac{2|x|}{(n^2+x^2)^2}\leqslant\frac{2|x|}{4n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n^2},\quad |x|\geqslant 1.$$

VIII.3.22. Применить с помощью признака Дирихле теорему о почленном дифференцировании.

VIII.3.23. Применить теоремы о почленном дифференцировании и предельном переходе. Для доказательства равномерной сходимости использовать признак Дирихле или оценку остатка ряда Лейбница

$$f'(0)=\ln 2,\quad f'(1)=1-\ln 2,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

VIII.3.24. Проверить, что теоремы о почленном дифференцировании и непрерывности суммы применимы к любому конечному отрезку.

VIII.3.27. Применить теорему о почленном дифференцировании функционального ряда

1) $A=(-1, 1)$; 2) $A=\mathbf{R}$; 3) $A=(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$;

4) $A=(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$; 5) $A=\mathbf{R}\setminus\{0\}$; 6) $A=(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)$;

7) $A=(-1, 1)$; 8) $A=\mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$; 9) $A=(-\infty, 0)\setminus\{-1\}$;

10) $A=(-\infty, -1)$; 11) $A=\mathbf{R}$.

VIII.3.28. Непрерывность f следует из теоремы о непрерывности суммы функционального ряда. Для доказательства существования производных в точке $x>0$ применить теорему о почленном дифференцировании функционального ряда к отрез-

$y\ [\alpha, +\infty)$ с числом $\alpha \in (0, x)$. При $x > 0$ имеем для любого $N \geqslant 1$

$$-\frac{1}{x}(f(0) - f(x)) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-nx}}{x(1+n^2)} \leqslant -\sum_{n=0}^{N} \frac{1 - e^{-nx}}{x(1+n^2)}.$$

Поскольку

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1 - e^{-nx}}{x(1+n^2)} \to \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2}, \quad x \to 0+,$$

то для некоторого $\delta > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leqslant -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2}, \quad 0 < x < \delta.$$

Отсюда легко получить противоречие с существованием $f'(0)$.

VIII.3.29. $A = (-3, -1) \cup (1, 3)$.

VIII.3.32. 1) $A = (-1, 1)$. Для доказательства существования p' доказать существование s', где s — сумма ряда

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + x^n), \quad x \in A,$$

а затем использовать формулу $p(x) = e^{s(x)}$, $x \in A$;
2) $A = (-\infty, 0)$; 3) $A = (-1, 1)$; 4) $A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. 5) $A = \mathbb{R}$.

VIII.3.34. 1) Использовать представление

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n, \quad u \in (-1, 1),$$

а также теорему о непрерывности суммы ряда и логарифмической функции; 2), 3) аналогично.

§ 4

VIII.4.2. 1) — 3) 0; 4), 5) ∞; 6) 2; 7) — 10) 1; 11) $\frac{1}{3}$; 12) e; 13) $\frac{4}{3}$; 14) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 15) 1; 16) 1; 17) 1; 18) $\frac{1}{3}$; 19) ∞; 20) $\frac{1}{e}$; 21) $\frac{1}{e}$; 22) 1.

VIII.4.3. 1) $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$; 2) $\left(2 - \frac{e^2}{2}, 2 + \frac{e^2}{2}\right)$; 3) $(-2, 0)$; 4) $(-\infty, -\operatorname{ctg} 1) \cup (\operatorname{ctg} 1, +\infty)$; 5) $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$; 6) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; 7) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi\right)$; 8) $(-3, 5)$.

VIII.4.4. 1) $\frac{1}{2}r$; 2) $2r$; 3) 0; 4) $+\infty$; 5) r^2.

VIII.4.5. Ряд сходится для каждого x, $|x| < r$. Допустим, что $r = r_1 < r_2$, и пусть $r_1 < x < r_2$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

расходится, поскольку из его сходимости и сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

следовала бы сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

что невозможно.

Если $r_1 = r_2$, то можно утверждать лишь, что $r \geqslant r_1$. Пример: $a_n = 1$, $b_n = -1$, $n \geqslant 0$.

VIII.4.6. Действительно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} (\sqrt[k]{|a_k|}\,\sqrt[k]{|b_k|}) \leqslant \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{|b_k|}).$$

Неравенство может быть строгим. Пример:

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = 1; \quad b_{2n} = 1, \quad b_{2n+1} = 0, \quad n \geqslant 0.$$

VIII.4.7. 1) 1; 2) α; 3) 1; 4) $+\infty$; 5) 0.

VIII.4.8. 1) $A = [-1, 1)$, $B = (-1, 1)$. На C сходится равномерно;

2) $A = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $B = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$. На C сходится равномерно;

3) $A = [1, +\infty)$, $B = (1, +\infty)$. На C сходится равномерно;

4) $A = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, $B = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. На C не сходится равномерно, поскольку при каждом $n \geqslant 1$

$$\sup_{x\leqslant -\frac{1}{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\left(\frac{x+1}{x}\right)^k \geqslant \sup_{x<-1} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\left(\frac{x+1}{x}\right)^k \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2n} \sup_{x<-1} \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{x+1}{x}\right)^k \geqslant \frac{1}{2}.$$

VIII.4.9. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}$,

$$\alpha \bar{\in} \{\pi + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}; \quad +\infty, \text{ если } \alpha \in \{\pi + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

VIII.4.10. 1) $f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)\,a_n x^{n-m}$;

2) $\int_0^x f(u)\,du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$;

3) $\frac{1}{2}\int_{-x}^{x} f(u)\,du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2k+1} x^{2k+1}$;

4) $\int_0^x f(u^2)\,du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2n+1} x^{2n+1}$;

5) $(1-x)f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a_{n-1})x^n, \quad a_{-1}:=0;$

6) $\frac{1}{2}(f(-x)+f(x))=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k};$

7) $\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\dots+a_n)x^n, \quad r_1=\min(1, r);$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{x}{n^2}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}b_mx^m,$

где

$$b_m:=a_m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}, \quad m\geqslant 1.$$

При доказательстве использовать неравенства

$$1<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}<1+\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^{2m}}=1+\frac{1}{2m-1}, \quad m\geqslant 1,$$

а также аналогичные оценки для остатка ряда;

9) $f^2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0a_n+a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\dots+a_na_0)x^n.$

VIII.4.11. Многочлены. Воспользоваться критерием Коши равномерной сходимости, а также тем, что ограниченный на $\mathbf{R}$ многочлен есть постоянная функция.

VIII.4.12. 1) $r=+\infty$. Поскольку

$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dots=f(x), \quad x\in\mathbf{R}$$

(почленное дифференцирование), то

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}f(x))=0, \quad x\in\mathbf{R}.$$

Следовательно,

$$\exists C\in\mathbf{R} \quad \forall x\in\mathbf{R} \ : \ e^{-x}f(x)=C \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=Ce^x.$$

Однако $f(0)=1$, поэтому $C=1$. Таким образом,

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x\in\mathbf{R};$$

2) $r=+\infty$ и $g(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), \quad x\in\mathbf{R};$

3) $r=+\infty$ и $h(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}), \quad x\in\mathbf{R}.$

VIII.4.13. 1) e; 2) e^2; 3) e^{-1}; 4) $6e$; 5) $\frac{1}{2}(e+e^{-1})$.

VIII.4.14. Сходится на R; $a(x)=1-e^{-|x|}, \quad x\in\mathbf{R}.$

VIII.4.15. $r = +\infty$. 1) Проверяется почленным дифференцированием; 2) следствие соотношения 1), записанного в виде

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

VIII.4.17. С помощью почленного интегрирования имеем

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, n!}$$

VIII.4.19. Имеем

$$|a_1(x)| \leqslant Lx, \quad x \in [0, 1],$$

откуда

$$|a_2(x)| \leqslant L \int_0^x u\,du = L\,\frac{x^2}{2!}, \quad x \in [0, 1].$$

Аналогично для любого $n \geqslant 1$ имеем

$$|a_n(x)| \leqslant L\,\frac{x^n}{n!}, \quad x \in [0, 1].$$

VIII.4.20. Для любого N имеем

$$\sum_{n=0}^{N} a_n r^n = \lim_{x\to r-} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant \lim_{x\to r-} a(x).$$

VIII.4.21. Достаточно доказать, что

$$a\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \sum_{n=0}^{m} a_n \to 0, \quad m \to \infty.$$

Действительно,

$$\left| a\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \sum_{n=0}^{m} a_n \right| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{m} a_n \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n - 1\right) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \right| \leqslant \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k +$$

$$+ \sup_{n\geqslant m+1} |na_n| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} |na_n| + \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{m}} \cdot \sup_{n\geqslant m+1} |na_n|.$$

VIII.4.22. Рассмотреть ряд-произведение по Коши абсолютно сходящихся рядов для $f(e^{i\theta})$ и $g(e^{-i\theta})$. Затем, используя равномерную по $\theta \in [0, 2\pi]$ сходимость ряда-произведения, проинтегрировать почленно и применить тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \delta_{mn}.$$

VIII.5.1 Использовать свойства сходящихся рядов, а также то, что степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы.

1), 2) $f(x) \pm g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \quad x \in (-r, r);$

3) $(1+x) f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + a_{n-1}) x^n, \quad x \in (-r, r), \quad a_{-1} := 0;$

4) $f(x^2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}, \quad x \in (-\sqrt{r}, \sqrt{r});$

5) $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \quad x \in (-r, r);$

6) $\int\limits_0^x f(u)\,du = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-r, r);$

7) $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n, \quad x \in (-r, r);$

8) $\int\limits_0^x \frac{f(u)}{u}\,du = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n, \quad x \in (-r, r);$

9) $\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}, \quad x \in (-r, r);$

10) $\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in (-r, r).$

Если f четна на $(-r, r)$, то, согласно 9),

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}, \quad x \in (-r, r),$$

то есть ряд Тейлора содержит только четные степени x. Следовательно,

$$a_{2k+1} = \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = 0, \quad k \geqslant 0.$$

Ряд нечетной функции f содержит только нечетные степени x.

VIII.5.2. 1) $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbf{R};$

2) $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbf{R};$

3) $\sin x^3 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{6k+3}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbf{R};$

4) $\sin^3 x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{3 - 3^{2k+1}}{4} \cdot x^{2k+1}, \quad x \in \mathbf{R}.$

Воспользоваться тождеством $\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$;

5) $\ln(1+x^2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n}$, $x \in (-1, 1]$.

6) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in (-1, 1)$.

7) $\ln(1+x+x^2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1, 1)$;

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n \in \{3k \mid k \in \mathbf{N}\}; \\ -\frac{1}{n}, & n \,\overline{\in}\, \{3k \mid k \in \mathbf{N}\}, \quad n \geqslant 1; \end{cases}$$

8) $(1+x+x^2+x^3)^{-1} = \frac{1-x}{1-x^4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (x^{4n} - x^{4n+1})$, $-1 < x < 1$;

9) $(1-5x+6x^2)^{-1} = \frac{-2}{1-2x} + \frac{3}{1-3x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (3^{n+1} - 2^{n+1})x^n$,

$x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$;

10) $\frac{e^x}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)x^n$, $x \in (-1, 1)$.

VIII.5.3. 1) Рассмотреть функцию

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1-\cos 2x}{2x^2}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что f есть сумма на $\mathbf{R}$ степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n-2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Поэтому $f \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ и

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(0), \quad n \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \quad k \geqslant 0; \\ \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(k+1)(2k+1)}, & n = 2k, \quad k \geqslant 0; \end{cases}$$

2) $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $n \geqslant 0$; 3) $-\frac{n!}{n+2}$, $n \geqslant 0$.

VIII.5.4. 1) $f(x)=\frac{1}{2}(-\sin 2x+\sin 4x)=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4^{2n+1}-2^{2n+1}}{2(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in\mathbf{R};$$

) $f(x)=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x,\quad x\in\mathbf{R};$

) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)\,n!},\quad x\in\mathbf{R};$

) $f(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{x-1}{1+x^2}$. См. также следующую задачу;

) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)x^n,\quad x\in(-1,\ 1).$

VIII.5.5. 1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C^n_{\frac{1}{4}}x^n,\quad x\in(-1,\ 1),$

$$C^n_\alpha:=\frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),\quad n\geqslant 1,\quad \alpha\in\mathbf{R};$$

) $f(x)=\int\limits_0^x f'(u)\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}C^n_{-\frac{1}{2}}x^{2n+1},\quad x\in(-1,\ 1);$

) $f(x)=\int\limits_0^x f'(u)\,du=\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^u\frac{dv}{1+v^2}\right)du=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)\,2m}x^{2m},\quad x\in[-1,\ 1];$

) $f(x)=\int\limits_0^x f'(u)\,du=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2n(2n-1)(2n)!!}x^{2n},\quad x\in(-1,\ 1);$

) $f(x)=(1+x)\frac{x}{1-x^4}=(x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{4n+1}-x^{4n+2}),\quad x\in(-1,\ 1);$

) проверить, что $f'(x)=xf(x)+1$, $x\in\mathbf{R}$, откуда следует, что при $n\geqslant 2$

$$f^{(n)}(0)=(n-1)f^{(n-2)}(0).$$

аким образом,

$$f^{2k}(0)=0,\quad f^{(2k+1)}(0)=2\cdot 4\ldots(2k),\quad k\geqslant 1,$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!},\quad x\in\mathbf{R}.$$

VIII.5.6. 1) $(x+1)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(n+2)}{n!}(x-1)^n,\quad x\in\mathbf{R};$

) $\frac{e^x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)(x-1)^n,\quad x\in(0,\ 2);$

3) $\frac{x+1}{x} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \quad x \in (0, 2);$

4) $\frac{\ln x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) (x-1)^n, \quad x \in (0, 2);$

5) $x(\ln x - 1) = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n} (x-1)^n, \quad x \in (0, 2);$

6) воспользоваться представлением

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 1 \cdot \cos (x-1) - \sin 1 \cdot \sin (x-1)}{1 + (x-1)}, \quad x \neq 0;$$

7) использовать 2).

VIII.5.7. 1) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}.$

2) $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1+x^n)^m dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_m^k}{(nk+p+1) 2^{nk+p+1}}.$

Глава IX

§ 1

IX.1.2. Если f монотонно не убывает на $[a, b]$, то для любого разбиения $\lambda = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k)) = f(b) - f(a).$$

Пусть теперь $V(f, [a, b]) = f(b) - f(a)$ и $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$. Тогда имеем

$$f(b) - f(a) \leqslant |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(b) - f(x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant V(f, [a, b]) = f(b) - f(a).$$

Отсюда при $x_2 = b$ для любого $x_1 \in [a, b]$ следует, что

$$f(b) - f(a) = |f(x_1) - f(a)| + |f(b) - f(x_1)|.$$

Это равенство возможно тогда и только тогда, когда $f(a) \leqslant f(x_1) \leqslant f(b)$. Учитывая это, имеем

$$f(b) - f(a) = f(x_1) - f(a) + |f(x_2) - f(x_1)| + f(b) - f(x_2),$$

или

$$f(x_2) - f(x_1) = |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant 0.$$

IX.1.3. Пусть $\lambda = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ — любое разбиение отрезка $[a, b]$, а $\lambda' = \lambda \cup \lambda^* = \{s_0, s_1, \ldots, s_N\}$. Проверить, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |f(s_{k+1}) - f(s_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |f(t^*_{k+1}) - f(t^*_k)|.$$

IX.1.4. 1) 4; 2) 20; 3) $\frac{5}{2}$; 4) 2; 5) 4; 6) 13.

IX.1.5 1) Действительно,

$$\forall c>0 \quad \exists \lambda=\left\{0,\ \frac{1}{c},\ 1\right\}:$$

$$\left|f\left(\frac{1}{c}\right)-f(0)\right|+\left|f(1)-f\left(\frac{1}{c}\right)\right|=c+|1-c|>c;$$

2) действительно,

$$\forall c>0 \quad \exists \lambda=\left\{0,\ \frac{1}{2n},\ \frac{\sqrt{2}}{2n-1},\ \frac{1}{2n-2},\ \ldots,\ \frac{\sqrt{2}}{3},\ 1\right\},\quad n>c+2;$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}|f(t_{k+1})-f(t_k)|=n-2>c.$$

Отметим, что $f\in C([0,1])$;

3) для разбиения

$$\lambda=\left\{0,\ \frac{1}{2n+1},\ \frac{1}{2n},\ \frac{1}{2n-1},\ \ldots,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{m-1}|f(t_{k+1})-f(t_k)|=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1,\quad n\geqslant 1;$$

4) для разбиения

$$\lambda=\left\{0,\ \frac{2}{4n+1},\ \frac{2}{4n-1},\ \frac{2}{4n-3},\ \frac{2}{4n-5},\ \ldots,\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{3},\ 1\right\}$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{m-1}|f(t_{k+1})-f(t_k)|=4n-1.$$

IX.1.10. Использовать то, что

$$|a-b|=||a|-|b||$$

для чисел a и b одного знака, и теорему Вейерштрасса о промежуточном значении. Заметим также, что в этом случае

$$V(f,\ [a,b])=V(|f|,\ [a,b]).$$

Пример: $f(x)=1,\ x\in\mathbf{Q};\ f(x)=-1,\ x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

IX.1.11. Пусть λ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, а λ' — подразбиение λ, полученное из λ добавлением точек, в которых не существует f'. Для $\lambda'=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(t_{k+1})-f(t_k)|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}f'(x)\,dx\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}|f'(x)|\,dx=\int_a^b|f'(x)|\,dx.$$

Кроме того, согласно теореме Лагранжа, для разбиения λ' имеем также

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(t_{k+1})-f(t_k)|=\sum_{k=0}^{n-1}|f'(\xi_k)|\,\Delta t_k,$$

где $\xi_k\in[t_k,t_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Если $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\Delta t_k\to 0$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} | f'(\xi_k) | \Delta t_k \to \int_a^b | f'(x) | dx.$$

IX.1.14. 1) Сходится условно; 2) сходится; 3) сходится; 4) сходится; 5) сходится.

IX.1.15. Использовать критерий интегрируемости.

IX.1.19. Пример: $f(x) = \sqrt{x}$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ x^2 \sin^2 \dfrac{1}{x}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

IX.1.20. Пусть $V(f, [a, +\infty)) = c$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > a \quad \forall b' > B \quad \forall b'' > b' \quad \text{!}$$
$$V(f, [b', b'']) < \varepsilon,$$

а потому

$$| f(b') - f(b'') | \leqslant V(f, [b', b'']) < \varepsilon.$$

Поэтому предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ существует в силу критерия Коши.

Заметим, что из существования последнего предела не следует, что $V(f, [a, +\infty)) < +\infty$. Пример: $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$, $x \geqslant 1$.

IX.1.21. Проще всего воспользоваться теоремой Жордана.

IX.1.22. Воспользоваться теоремой Жордана.

IX.1.24. 1) $F(x) = x + 1$, $x \in [-1, 1]$.

$$2)\ F(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ 2 - \sin x, & x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]; \\ 4 + \sin x, & x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]; \end{cases}$$

$$3)\ F(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ 2 - \sin x, & x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]; \\ 2 + \sin x, & x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]; \\ 4 - \sin x, & x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]; \end{cases}$$

$$4)\ F(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1); \\ 2 + x, & x \in [1, 2); \\ 4 + x, & x \in [2, 3); \\ 6, & x = 3; \end{cases}$$

$$5)\ F(x) = \begin{cases} 2 + x - x^2, & x \in \left[-1, \dfrac{1}{2}\right]; \\ \dfrac{5}{2} - x + x^2, & x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

IX.1.25. 1) Поскольку

$$f(x) = 1 + 2\int_{-1}^{x} u\,du, \quad x \in [-1, 1],$$

то

$$f(x) = g(x) - h(x), \quad x \in [-1, 1],$$

где

$$g(x) := 1 + 2\int_{-1}^{x} (u)_+\,du, \quad h(x) := 2\int_{-1}^{x} (u)_-\,du, \quad x \in [-1, 1],$$

$$(u)_+ = \begin{cases} u, & u > 0; \\ 0, & u < 0, \end{cases} \quad (u)_- = \begin{cases} 0, & u \geqslant 0; \\ -u, & u < 0. \end{cases}$$

2), 3) аналогично.

§ 2

IX.2.1. 1) $\underline{\int} f d\alpha = -1, \quad \overline{\int} f d\alpha = 1; \quad f \overline{\in} RS(\alpha, [-1, 1]).$

2) $\underline{\int} f d\alpha = 0, \quad \overline{\int} f d\alpha = \alpha(1) - \alpha(0);$

если $\alpha(1) > \alpha(0)$, то $f \overline{\in} RS(\alpha, [0, 1])$;

3) пусть $\lambda = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ — разбиение отрезка $[0, 1]$. Имеем

$$L(f, \alpha; \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k (t_{k+1}^2 - t_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k (t_{k+1} + t_k)\,\Delta t_k \geqslant 2L(x^2, \lambda),$$

откуда следует, что

$$\underline{\int} f d\alpha \geqslant 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Аналогично получим

$$\overline{\int} f d\alpha \leqslant 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\underline{\int} f d\alpha = \overline{\int} f d\alpha = \frac{2}{3}$$

и $f \in RS(\alpha, [0, 1])$.

IX.2.5. Согласно условию задачи,

$$\int_0^{\pi} (1 - \sin x)\, d\alpha(x) = 0.$$

Поэтому для любых $0 < u < \frac{\pi}{2} < v < \pi$ имеем равенство

$$\int_0^{u} (1 - \sin x)\, d\alpha(x) + \int_u^{v} (1 - \sin x)\, d\alpha(x) + \int_v^{\pi} (1 - \sin x)\, d\alpha(x) = 0,$$

в котором все три интеграла неотрицательны. Следовательно,

$$\int_0^u (1-\sin x)\,d\alpha(x) = 0, \quad \int_v^{\pi} (1-\sin x)\,d\alpha(x) = 0,$$

а поэтому на основании теоремы о среднем значении

$$\alpha(u) = \alpha(0), \quad \alpha(v) = \alpha(\pi)$$

для любых $0 < u < \frac{\pi}{2} < v < \pi$. Таким образом,

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(0), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \\ \alpha(\pi), & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

IX.2.6. Для $f(x) = 1$, $x \in [0, 2]$ условие задачи приводит к равенству

$$\alpha(2) - \alpha(1) = 1.$$

Пусть теперь $f \in \mathbf{C}([0, 2])$ функция такая, что

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, u] \cup [v, 2]; \\ 0, & x = 1; \\ \text{линейна на каждом из отрезков } [u, 1], \ [1, v] \end{cases}$$

для $0 < u < 1 < v < 2$. Согласно условию задачи,

$$\int_0^u d\alpha(x) + \int_u^v f(x)\,d\alpha(x) + \int_v^2 d\alpha(x) = 0,$$

откуда $\alpha(u) = \alpha(0)$ и $\alpha(v) = \alpha(2)$.

IX.2.8.

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(0), & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right); \\ \alpha(0) + \frac{k}{n}, & x \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1; \\ \alpha(1) = \alpha(0) + 1. \end{cases}$$

IX.2.9. Из первого равенства следует, что функция α постоянна на $(0, 1)$. Из второго находим

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(0), & x = 0; \\ \frac{1}{3}\alpha(0) + \frac{2}{3}\alpha(1), & x \in (0, 1); \\ \alpha(1), & x = 1. \end{cases}$$

IX.2.10. Рассмотрим для $u \in (0, 1)$ функцию

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(a), & x \in [0, u); \\ \alpha(b), & x \in (u, 1], \end{cases}$$

причем $\alpha(b) - \alpha(a) \neq 0$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(u)\,(\alpha(b) - \alpha(a)) = \alpha(b) - \alpha(a)$$

и, следовательно, $f(u) = 1$. Аналогично доказывается, что $f(0) = f(1) = 1$.

IX.2.13. 1) Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$0 \leqslant \int_0^\varepsilon x^n d\alpha(x) \leqslant \varepsilon^n (\alpha(\varepsilon) - \alpha(0)) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Кроме того,

$$\int_{1-\frac{1}{n^2}}^1 x^n d\alpha(x) \leqslant \int_{1-\varepsilon}^1 x^n d\alpha(x) \leqslant \alpha(1) - \alpha(1-\varepsilon)$$

для номеров n, для которых $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ и

$$\int_{1-\frac{1}{n^2}}^1 x^n d\alpha(x) \geqslant \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\alpha(1) - \alpha\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$

$$\alpha(1) - \alpha(1-) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{I}_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathcal{I}_n \leqslant \alpha(1) - \alpha(1-\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{I}_n := \int_0^1 x^n d\alpha(x), \quad n \geqslant 1;$$

2) $\alpha(0+) - \alpha(0) + \alpha(1) - \alpha(1-)$.

IX.2.14. Рассматривая функции из $\mathbf{C}([0, 2])$ вида

$$f(x) = 0, \quad x \in [0, 1]; \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \in [1-\varepsilon, 2]; \\ \text{линейна на } [1, 1+\varepsilon], \end{cases}$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$, доказать сначала, что $\alpha(x) = \alpha(1)$, $x \in [1, 2]$. Далее возьмем в условии вместо f функцию $h(x) = 2^{-nx}$, $x \in [0,2]$,

$$\int_0^1 2^{-nx} d\alpha(x) = 1 + \int_0^1 2^{-nx} dx, \quad n \geqslant 1.$$

При $n \to \infty$ в силу предыдущей задачи получим

$$\alpha(0+) - \alpha(0) = 1.$$

Пусть теперь $u \in (0, 1)$ фиксировано и

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, u]; \\ 2^{-n(x-u)}, & x > 0, \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

Имеем при $n \to \infty$ из условия

$$\alpha(u) - \alpha(0) + \alpha(u+) - \alpha(u) = 1 + u,$$

или $\alpha(u+) - \alpha(0) = 1 + u$.

IX.2.15. Пусть $u \in (a, b)$ фиксировано и

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, u]; \\ 2^{-n(x-u)}, & x \in [u, b], \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$0 = \int_a^b f_n(x)\,dx = \alpha(u) - \alpha(a) + \int_u^b 2^{-n(x-u)}d\alpha(x) \to \alpha(u) - \alpha(a) +$$

$$+ \alpha(u+) - \alpha(u) = \alpha(u+) - \alpha(a), \quad n \to \infty.$$

Аналогично доказывается, что $\alpha(a) = \alpha(a+)$, $\alpha(b) = \alpha(b-)$. Следовательно, α постоянна на $[a, b]$.

IX.2.16. α постоянна на $[a, b]$. Использовать теорему Вейерштрасса о приближении многочленами, а также утверждения задач IX.2.12 и IX.2.15.

IX.2.17. $\alpha(x) = \alpha(1)$, $x \in (0, 1]$.

IX.2.18. Достаточно ограничиться случаем неотрицательной функции f. Рассмотреть суммы Дарбу — Стилтьеса.

IX.2.19. 1) $\frac{\pi}{2} - 1$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}(N-1)N$; 4) $2\sum_{k=1}^{N}(-1)^k k^2$;

5) $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k(3k^4 + (k-1)^4)$; 6) $2\sum_{k=1}^{2N-1}(1+k)k^2(-1)^k +$

$$+ (1+2N)\,4N^2 + \sum_{k=1}^{2N}(-1)^{k-1}\left(2k - 1 + \frac{2}{3}(2k^2 - 1)\right).$$

§ 3

IX.3.1. Отметим, что $\{f, g, h\} \subset C(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ и ограничены на $\mathbf{R}$. Поэтому каждая из функций f, g, h интегрируема по Риману по любому отрезку. Пусть

$$F(x) := \int_0^x \sin\frac{1}{u}\,du, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Тогда для любого $x \neq 0$ $F'(x) = \sin\frac{1}{x}$. Кроме того, имеем

$$\frac{1}{x}(F(x) - F(0)) = \frac{1}{x}\int_0^x \sin\frac{1}{u}\,du \to 0, \qquad x \to 0.$$

Действительно, например, для $x > 0$

$$\int_0^x \sin\frac{1}{u}\,du = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^x \sin\frac{1}{u}\,du,$$

$$\left|\int_\varepsilon^x \sin\frac{1}{u}\,du\right| = \left|\begin{matrix}\frac{1}{u} = v\\ -\frac{1}{u^2}\,du = dv\end{matrix}\right| = \left|\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin v}{v^2}\,dv\right| =$$

$$= \left|\int_{\frac{1}{x}}^{k\pi} \frac{\sin v}{v^2}\,dv - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin v}{v^2}\,dv + \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{\sin v}{v^2}\,dv - \cdots\right|,$$

откуда следует неравенство

$$\left|\int_0^x \sin\frac{1}{u}\,du\right| \leqslant 4x^2.$$

Решение для g аналогично. Для функции h функция

$$H(x) := \int_0^x \sin^2 \frac{1}{u}\, du, \quad x \in \mathbf{R},$$

для каждого $x \neq 0$ имеет производную $H'(x) = h(x)$ и непрерывна в точке 0. При этом $H'(0) = \frac{1}{2}$. Если G — примитивная функция h на $\mathbf{R}$, то

$$G(x) = H(x) + c_1, \quad x \in (-\infty, 0); \quad G(x) = H(x) + c_2, \quad x \in (0, +\infty),$$

с некоторыми числами c_1 и c_2. Поскольку $G \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$, то $c_1 = c_2$ и тогда

$$G'(0) = h(0) = 0 = H'(0) = \frac{1}{2}.$$

IX.3.2. Поскольку $f \in \mathbf{C}((0, +\infty))$, то для любого $x > 0$ определено значение

$$F(x) := \int_1^x \frac{1}{\sqrt{u}} \sin \frac{1}{u}\, du,$$

при этом $F'(x) = f(x)$, $x > 0$. Кроме того, существует предел

$$\lim_{x \to 0+} F(x).$$

Для доказательства используем критерий Коши существования предела функции в точке:

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{u}} \sin \frac{1}{u}\, du \right| = \left| \int_{\frac{1}{x_2}}^{\frac{1}{x_1}} \frac{\sin v}{v^{\frac{3}{2}}}\, dv \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\frac{1}{x_2}}^{\frac{1}{x_1}} \frac{dv}{v^{\frac{3}{2}}} = 2\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)$$

для $0 < x_1 < x_2$. Положим

$$F(0) := \lim_{x \to 0+} F(x)$$

и проверим, что $F'(0) = 0$. Эта проверка аналогична решению предыдущей задачи.

IX.3.3. $\frac{1}{m+1}$. Преобразовать к интегральной сумме. Можно также воспользоваться теоремой Штольца.

IX.3.4. Для каждого $x \in [0, 1]$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) \to \int_0^1 f(u)\, du, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $f(x) = 1$, $x \in [0, 1]$.

IX.3.5. $f(x) = \frac{f(0)}{2x}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad x \neq 0.$

IX.3.7. Предположить, что f есть отношение многочленов, не имеющих общего множителя x, и найти f'. Подробное решение см. в кн.: **Дороговцев А. Я.** Интеграл

та його застосування. К. : Вища шк., 1974.— С. 110, 111.

IX.3.9. $(f(0)+f(1))^{-1}\int_0^1 f(x)\,dx$.

IX.3.10. Пусть $\{f, g\}\subset D$, тогда

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx = 0,\quad \int_0^1 x\,(f(x)-g(x))\,dx = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим функцию $g_0(x) = u + vx$, $x\in[0, 1]$, которая входит в D, если

$$\int_0^1 (u+vx)\,dx = L,\qquad \int_0^1 x\,(u+vx)\,dx = M,$$

то есть если $u = 2\,(2L-3M)$, $v = 6\,(2M-L)$. Для функции g_0 имеем также в силу (1)

$$\int_0^1 (f(x)-g_0(x))\,g_0(x)\,dx = 0$$

для любой $f\in D$. Отсюда

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 (f(x)-g_0(x)+g_0(x))^2\,dx = \int_0^1 (f(x)-g_0(x))^2\,dx +$$

$$+\int_0^1 g_0^2(x)\,dx \geqslant \int_0^1 g_0^2(x)\,dx.$$

Таким образом, искомый минимум равен

$$\int_0^1 g_0^2(x)\,dx$$

и достигается для функции $f = g_0$.

IX.3.11. $3a^2$; $f(x) = \frac{a}{2}(x^3-3x^2+2x)$, $x\in[0, 1]$.

IX.3.12. Сначала заметить, что

$$\int_a^b P(x)\,f(x)\,dx = 0$$

для каждого многочлена P. На основании теоремы Вейерштрасса существует последовательность многочленов $\{P_n(x),\ x\in[a, b] : n\geqslant 1\}$, равномерно на $[a, b]$ сходящихся к f. Использовав теорему о предельном переходе под знаком интеграла Римана, получаем

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_a^b P_n(x)\,f(x)\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

IX.3.13. Применить утверждение предыдущей задачи к функции $g(x) = f(x)+f(-x)$, $x\in[-1, 1]$.

IX.3.16. Сделать замену $x^3 = u$ и использовать задачу IX.3.12.

IX.3.20. Рассмотреть точку x_0, в которой $f(x_0)>0$, и окрестность, в которой $f(x)\geqslant \frac{1}{2}f(x_0)$.

IX.3.21. Детальное решение этой задачи можно найти в кн.: **Дороговцев А. Я.** Інтеграл та його застосування. К. : Вища шк., 1974.— С. 114, 115.

IX.3.22. См. решение задачи VI.2.25.

IX.3.23. Следствие неравенства Юнга для $f(x) = x^{p-1}$, $x \geqslant 0$.

IX.3.24. e.

IX.3.25. Поскольку при $x \geqslant 1$, $u \geqslant 0$

$$|\ln(x+u) - \ln x| = \left|\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)\right| \leqslant \frac{u}{x},$$

то

$$\max_{x\in[1,2]}\left|\ln\left(x+\frac{x^5}{n}\right) - \ln x\right| \leqslant \frac{16}{n}, \quad n \geqslant 1,$$

и можно перейти к пределу под знаком интеграла. Предел равен $2\ln 2 - 1$.

IX.3.26. Представить стоящую под знаком предела сумму в виде

$$\int_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx,$$

затем обосновать предельный переход под знаком интеграла. Предел равен $e - 1$.

IX.3.28. $-\int_0^1 f(x)\ln(1-x)\,dx := -\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon} f(x)\ln(1-x)\,dx.$

IX.3.29. $\int_0^1 \ln f(x)\,dx.$

IX.3.30. Детальное решение задачи см. в статье: **Дороговцев А. Я., Кукуш А. Г.** Избранные задачи университетского тура олимпиады «Студент и научно-технический прогресс» по математике // Математика сегодня.— К., 1983.— С. 126, 127.

IX.3.31. 1. Детальное решение этой задачи см. в статье: **Дороговцев А. Я., Кукуш А. Г.** Избранные задачи университетского тура олимпиады «Студент и научно-технический прогресс» по математике // Математика сегодня.— К., 1983.— С. 130, 131.

IX.3.34 Воспользоваться тождеством Абеля.

IX.3.35. При любом $N \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int_1^{N+1} \frac{dx}{1+\varepsilon x^a} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+\varepsilon n^a} < \int_0^N \frac{dx}{1+\varepsilon x^a},$$

откуда следует

$$\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{a}}}\left(c - \int_0^{\sqrt[a]{\varepsilon}} \frac{du}{1+u^a}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\varepsilon n^a} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{a}}}\,c,$$

где

$$c = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{du}{1+u^a}.$$

При $a = 2$ число $c = \dfrac{\pi}{2}$.

IX.3.38. Воспользоваться неравенством

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_{0}^{N} f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\left(f(n) - \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left|\int_{n-1}^{n}\left(\int_{x}^{n} f'(u)\,du\right)dx\right| \leqslant \int_{0}^{N} |f'(u)|\,du \leqslant c, \quad N \geqslant 1.$$

IX.3.39. Проверить, что

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_{1}^{N} f(x)\,dx\right| \leqslant V(f, [0, N]), \quad N \geqslant 1.$$

IX.3.40. Если условие об ограничении выполнено, то ряд сходится абсолютно в силу признака Коши. Если последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|} : n \geqslant 1\}$ не является ограниченной, то можно построить последовательность $\{b_n : n \geqslant 1\}$, удовлетворяющую условию задачи, для которой ряд расходится.

IX.3.41. $(a^2 + 2a + 2)\ e$.

IX.3.42. Заметить, что

$$a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{n-1}(a_{n-1} - a_{n-2}) = \cdots = (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}, \quad n \geqslant 2.$$

Предел равен e^{-1}.

IX.3.43. 1) $(1, 3)$; 2) $\mathbf{R} \setminus \left\{m\frac{\pi}{2} + n\pi m \mid m \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{Z}\right\}$;

3) см. 2); 4) $(-1, 1)$; 5) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

IX.3.44. Воспользоваться неравенством

$$e^u \geqslant 1 + u, \quad u \geqslant 0.$$

IX.3.45. Сначала имеем для $n \geqslant 1$ и $x \in [0, 1]$

$$\sqrt{x} - f_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - f_n(x))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x))\right).$$

Отсюда по индукции следует, что

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \sqrt{x}$$

и, кроме того, что последовательность $\{f_n(x) : n \geqslant 1\}$ монотонно возрастает при каждом x. Таким образом, $\{f_n : n \geqslant 1\}$, монотонно возрастая, сходится поточечно к непрерывной функции f. Согласно теореме Дини, эта сходимость равномерна.

IX.3.46. Использовать функцию наклона и ее свойства. Полное решение этой задачи содержится в кн.: Rădulescu S., Rădulescu M. Teoreme si probleme de analiză matematică.— Bucureşti, 1982.— 3.— P. 48, 161.

IX.3.47. Функция f монотонно не убывает на $[0, 1]$ и, следовательно, $f \in \mathbf{R}([0, 1])$.

П е р в о е   р е ш е н и е. f есть сумма равномерно на $[0, 1]$ сходящегося ряда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x),$$

где

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_n; \\ \dfrac{1}{2^n}, & x > x_n, \quad x \in [0, 1], \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

Затем проинтегрировать почленно.

Второе решение. С помощью формулы интегрирования по частям имеем

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(1) - \int_0^1 x\,df(x),$$

где $f(1) = 1$, и поскольку f есть функция скачков, то с помощью теоремы Хелли можно показать, что

$$\int_0^1 x\,df(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}.$$

IX.3.48. Для доказательства непрерывности заметить, что ряд, определяющий f, составлен из непрерывных на $\mathbf{R}$ функций и сходится равномерно на $\mathbf{R}$ в силу признака Вейерштрасса. Пусть $x = 0, x_1, x_2 \ldots$ — двоичное разложение $x \in (0, 1)$ и

$$\Delta x_m = \begin{cases} 2^{-m}, & x_m = 0; \\ -2^{-m}, & x_m = 1. \end{cases}$$

Проверить, что

$$\frac{1}{\Delta x_m}\left(f(x + \Delta x_m) - f(x)\right) \to +\infty, \quad m \to \infty.$$

IX.3.49. При каждом $n \in \mathbf{N}$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} e^{-nk(x-u)}, \quad u \in [0, 1],$$

сходится равномерно по u на $[0, 1]$ в силу признака Вейерштрасса и имеет сумму

$$s_{x,n}(u) = \exp\{-e^{-n(x-u)}\}, \quad u \in [0, 1].$$

Согласно теореме о почленном интегрировании,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 e^{-nk(x-u)} f(u)\,du = \int_0^1 s_{x,n}(u) f(u)\,du.$$

Теперь заметим, что

$$s_{x,n}(u) \to \begin{cases} 1, & u \in [0, x); \\ 0, & u \in (x, 1], \quad n \to \infty, \end{cases}$$

и что $s_{x,n}(u) \leqslant 1$, $n \geqslant 1$, $u \in [0, 1]$.

IX.3.50. Из условия задачи следует, что $f(1) = 0$ (разделить неравенства на $\int_0^1 e^{nx}\,dx$ соответственно и найти пределы). Применим теперь соотношение предыду-

щей задачи к функции $h(x) = e^{mx} f(x)$, $x \in [0, 1]$, с $m \in \mathbf{N}$. Для $x \in [0, 1]$ получим

$$\left|\int_0^x e^{mu} f(u)\,du\right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 e^{-nk(x-u)} e^{mu} f(u)\,du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{-nkx} c = c,$$

следовательно, как и выше, $f(x) = 0$.

IX.3.51. Использовать неравенство

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sum_{m=N+1}^{\infty} a_{nm} \leqslant \sup_{1\leqslant n\leqslant K} \sum_{m=N+1}^{\infty} a_{nm} + \sup_{n\geqslant K} \left|\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} - \sum_{m=1}^{\infty} a_m\right| +$$

$$+ \sum_{m=N+1}^{\infty} a_m + \sup_{n\geqslant K} \left|\sum_{m=1}^{N} (a_{nm} - a_m)\right|, \quad N \geqslant 1, \quad K \geqslant 1.$$

IX.3.53. $f(x) = e^x$, $x \in (-r, r)$.

IX.3.54. Заметить, что

$$\frac{a_n}{A_n} \to 0, \quad n\to\infty \ \Rightarrow\ \frac{A_n}{A_{n-1}} \to 1, \quad n\to\infty \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{A_n} \to 1, \quad n\to\infty.$$

IX.3.55. Заметить, что

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^4}, \quad x \in (-1, 1),$$

и представить f в виде суммы степенного ряда.

IX.3.56. Имеем $s(0) = \dfrac{1}{m!}$ и

$$s(x) = \frac{1}{x^m}\left(e^x - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!}\right), \quad x \neq 0.$$

IX.3.57. 1) Имеем

$$\operatorname{sh} x - x = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots < \frac{x^2}{6}\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right);$$

2), 3) аналогично; 4) имеем для $x \in \mathbf{R}$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \frac{2^2}{4!} + \cdots + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \frac{2^n}{(2n)!} + \cdots$$

$$\cdots \leqslant 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} + \cdots + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!} + \cdots$$

IX.3.58. $\sqrt{\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2(b+3) + \cos 2a)}$.

IX.3.59. 1) В равенстве

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C},$$

положить $z = e^{ix}$ и использовать формулу Эйлера

$$z^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx,$$

$$e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} (\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)).$$

Поэтому искомая сумма равна

$$e^{\cos x} \cos(\sin x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

2) $e^{\cos x} \sin(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$. 3) $\operatorname{ch}(\sin x) \sin(\cos x)$, $x \in \mathbf{R}$.
4) $\operatorname{ch}(\sin x) \cos(\cos x)$, $x \in \mathbf{R}$.

IX.3.61. Пусть Q — многочлен, равномерно приближающий $f^{(n)}$. Рассмотреть многочлен

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} Q(u)\, du,$$

$$x \in [a, b].$$

Глава X

§ 1

X.1.1. 1) Да. Для доказательства неравенства треугольника использовать неравенство

$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0.$$

2) да; 3) нет. Не выполняется неравенство треугольника: $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$; 4) да; 5) да. Воспользоваться неравенством

$$\frac{u}{1+u} \leqslant \frac{v}{1+v}, \quad 0 < u \leqslant v;$$

6) пусть в $\mathbf{R}^2$ ось абсцисс есть X. Рассмотрим точки $A = (0, 1)$, $B = (x, 0)$, $C = (y, 0)$ и заметим, что $d(x, y) = 2 \sin \widehat{BAC}$. Использовать также неравенство $\sin(\alpha + \beta) \leqslant \sin \alpha + \sin \beta$, если α, β, $\alpha + \beta$ лежат на $[0, \pi]$; 7)—9) да. Для доказательства неравенства треугольника использовать неравенство Коши

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \sum_{k=1}^{m} b_k^2,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — числа из $\mathbf{R}$. 11) — 14) да; 15) да. Сначала с помощью неравенства

$$(a-b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2), \quad \{a, b\} \subset \mathbf{R},$$

проверить, что d определено на $l_2 \times l_2$. Для доказательства неравенства треугольника использовать неравенство Коши и предельный переход; 16), 17) да; 18) функция d есть расстояние, если $\alpha_k > 0$, $k \geqslant 1$; 19) — 25) да; 26) нет; 27) — 33) да; 34) нет; 35), 36) да.

X.1.7. $x_n \to x$, $n \to \infty$, в (X, d) $\Leftrightarrow$ $\exists N \quad \forall n \geqslant N : \quad x_n = x$.

X.1.11. Равносильна равномерной на $[a, b]$ сходимости.

X.1.13. 1) Для доказательства необходимости использовать неравенство

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2 \leqslant 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 + 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2d^2(x^{(n)}, x) + 2 \sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - x_k)^2 + 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2.$$

Достаточность следует из неравенства

$$d^2(x^{(n)}, x) \leqslant \sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - x_k)^2 + 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2 + 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2;$$

2) аналогично.

X.1.14. В случае метрики d из 24) сходимость равносильна равномерной сходимости на $\mathbf{R}$. Для метрики d из 25) сходимость равносильна равномерной сходимости на отрезке $[-A, A]$ для каждого $A > 0$. Равномерной на оси сходимости может не быть. Пример: $x(t) = 0$, $t \in \mathbf{R}$;

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant n; \\ t - n, & n < t \leqslant n + 1, \quad n \geqslant 1; \\ 1, & t > n + 1. \end{cases}$$

X.1.15. Равносильна в обоих случаях равномерной на $[a, b]$ сходимости последовательности функций и последовательности их производных, что равносильно сходимости последовательности функций в одной точке, например в точке a, и равномерной на $[a, b]$ сходимости последовательности производных.

X.1.17. 1) Следует из неравенства треугольника; 2) достаточно доказать, что

$$\forall x \in X \quad \forall y \in X \quad : \quad |\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leqslant \rho(x, y).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $z \in A$ такой, что

$$\rho(y, A) \leqslant \rho(y, z) \leqslant \rho(y, A) + \varepsilon,$$

поэтому

$$\rho(x, A) - \rho(y, A) \leqslant \rho(x, z) - \rho(y, z) + \varepsilon \leqslant \rho(x, y) + \varepsilon,$$

и, следовательно, $\rho(x, A) - \rho(y, A) \leqslant \rho(x, y)$. Вследствие симметрии получаем требуемое неравенство.

X.1.19. Множество A предельных точек не имеет.

X.1.20. Множество $\{n \in \mathbf{N} \mid x_n \neq x\}$ бесконечно.

X.1.21. 1) $A' = [0, 1]$, $A^0 = (0, 1)$; 2) $A' = \mathbf{R}$, $A^0 = \varnothing$,

$\bar{A} = [0, 1] \cup \{2\}$; $\bar{A} = \mathbf{R}$.

3) $A' = \{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{3^{-n} \mid n \in \mathbf{N}\}$, $A^0 = \varnothing$, $\bar{A} = A \cup A'$;

4) $A' = \mathbf{R}$, $A^0 = \varnothing$, $\bar{A} = \mathbf{R}$; 5) $A' = [-1, 1]$, $A^0 = \varnothing$, $\bar{A} = [-1, 1]$;

6) $A' = A$, $A^0 = \varnothing$, $\bar{A} = A$; 7) $A' = \mathbf{R}^2$, $A^0 = \varnothing$, $\bar{A} = \mathbf{R}^2$;

8) $A' = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ x_1 x_2 = 1\}$, $A^0 = \varnothing$, $\bar{A} = A'$;

9) $A' = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, $A^0 = A$, $\bar{A} = A'$;

10) $A' = \{x \mid \forall t \in [a, b] \ : \ x(t) \geqslant t\}$, $A^0 = A$, $\bar{A} = A'$;

11) $A' = C([a, b])$, $A^0 = \varnothing$, $\bar{A} = A'$;

12) $A' = \left\{x \;\middle|\; \int_a^b x(t)\,dt \geqslant 0\right\}$, $A^0 = A$, $\bar{A} = A'$.

X.1.22. Пример: пространство задачи X.1.1,35), x — любой элемент X и $r = 1$, $C(x, 1) = \{x\}$, $\bar{B}(x, 1) = X$.

X.1.25. Проверить, что каждая точка множества $A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ внутренняя. Пример: $X = \mathbf{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $A = \mathbf{R}$, $\{x_n : n \geqslant 1\} = \mathbf{Q}$.

X.1.29. Предположим, что $\rho(x, A) = 0$. Тогда

$$\forall n \geqslant 1 \quad \exists y_n \in A \quad : \quad \rho(x, y_n) < \frac{1}{n}.$$

При этом $y_n \to x$, $n \to \infty$ и, в силу замкнутости A, $x \in A$, что невозможно.

X.1.34. Необходимость очевидна. Счетным всюду плотным множеством будет $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} C_n$, где C_n — не более чем счетная $\frac{1}{n}$-сеть для X.

X.1.35. Доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ в Y существует счетная ε-сеть. Рассмотреть счетную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для X и в каждом шаре $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, для которого x из $\frac{\varepsilon}{2}$-сети и $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap Y \neq \varnothing$, взять по точке $z \in Y$. Набор выбранных точек есть счетная ε-сеть для Y.

X.1.36. 1), 2), 4)—6) Сепарабельны, $\mathbf{Q}$ — счетное всюду плотное множество для каждого из них; 10)—14) сепарабельны, счетное всюду плотное множество $\mathbf{Q}^m$; 15)—18) с $\alpha_k > 0$, $k \geqslant 1$. Сепарабельны. Счетное всюду плотное множество

$$\{(r_1, \ldots, r_m) \mid r_i \in \mathbf{Q}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m; \quad m \in \mathbf{N}\};$$

19)—23) сепарабельны. Счетное всюду плотное множество

$$\left\{\sum_{k=0}^{m} r_k t^k \mid r_i \in \mathbf{Q}, \quad 0 \leqslant i \leqslant m; \quad m \in \mathbf{N}\right\};$$

24) несепарабельно. Пусть

$$g(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{2}, & t \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]; \\ \frac{1}{2} - t, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

и

$$f_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n g(t-n), \quad t \in \mathbf{R},$$

для каждой последовательности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots,)$, в которой каждое $\alpha_i = 0$ или $\alpha_i = 1$. Получим континуум функций $\{f_\alpha\}$, причем для различных последовательностей α' и α'' $d(f_{\alpha'}, f_{\alpha''}) = \frac{1}{2}$; 25) сепарабельно; 27) —29) сепарабельны, см. задачу IX.3.61; 30) сепарабельно; 31) несепарабельно. Рассмотреть семейство функций

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, \alpha); \\ 1, & t \in [\alpha, b], \quad \alpha \in [a, b]; \end{cases}$$

35) сепарабельно, если X счетно; 36) несепарабельно. Рассмотреть семейство функций

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & t = \alpha; \\ 0, & t \in \mathbf{R} \setminus \{\alpha\}, \quad \alpha \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

X.1.42. Согласно критерию Коши сходимости последовательности чисел, пространство $(\mathbf{R}, \rho)$ полно. 1) Последовательность $\left\{\frac{1}{n} : n \geqslant 2\right\} \subset (0, 1)$ фундаментальна, причем $\frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$, в $(\mathbf{R}, \rho)$. Поэтому эта последовательность не может иметь предел в $(0, 1)$ (в силу единственности предела в $(\mathbf{R}, \rho)$). Аналогично фундаментальная последовательность $\left\{1 - \frac{1}{n} : n \geqslant 2\right\}$ не имеет предела в $((0, 1), \rho)$; 2) доказательство аналогично, рассмотреть число $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ и последовательность чисел из $\mathbf{Q}$, сходящуюся в $(\mathbf{R}, \rho)$ к $\sqrt{2}$.

X.1.44. 1) Полно. Проверить, что фундаментальность в $(\mathbf{R}, d)$ влечет фундаментальность в $(\mathbf{R}, \rho)$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}$ и воспользоваться критерием Коши сходимости числовой последовательности; 2) не является полным. Последовательность $\{n : n \geqslant 1\}$ фундаментальна, однако, для любого $x \in \mathbf{R}$

$$d(x, n) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} n| \to \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \neq 0, \quad n \to \infty;$$

4)—6) полно. Решение аналогично решению 1); 7)—14) полно. Проверить, что фундаментальность в (X, d) влечет покоординатную фундаментальность и воспользоваться полнотой $(\mathbf{R}, \rho)$; 15) полно. Пусть $\{x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots) : n \geqslant 1\}$ — фундаментальная в (l_2, d) последовательность. Тогда при каждом $k \geqslant 1$ $\{x_k^{(n)} : n \geqslant 1\}$ — фундаментальна в $(\mathbf{R}, \rho)$ и, следовательно $x_k^{(n)} \to x_k$, $n \to \infty$, $x_k \in \mathbf{R}$. Кроме того, для любого $N \geqslant 1$ в силу фундаментальности имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n \geqslant N_0 \quad \forall m \geqslant N_0 \ :$$

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2.$$

Поэтому при фиксированном $m \geqslant N_0$

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k - x_k^{(m)})^2 \leqslant \varepsilon^2$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k^{(m)})^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Таким образом, элемент $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in \mathrm{l}_2$ и является пределом последовательности $\{x^{(n)} : n \geqslant 1\}$; 16) не является полным. Рассмотреть последовательность

$$x^{(n)} = (\ln^{-2} 2, \ \ln^{-2} 3, \ \ldots, \ \ln^{-2}(n+1), \ 0, \ 0, \ldots), \quad n \geqslant 1;$$

17) не является полным. Рассмотреть последовательность из 16); 18) $\alpha_k > 0$, $k \geqslant 1$. Полно, если $\inf\limits_{k \geqslant 1} \alpha_k > 0$. Не является полным, если $\inf\limits_{k \geqslant 1} \alpha_k = 0$;

19) полно в силу критерия Коши равномерной сходимости; 20) не является полным. Пусть $c = \frac{1}{2}(a + b)$ и

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, c]; \\ n(t - c), & t \in \left[c, \ c + \dfrac{1}{n}\right]; \\ 1, & t \in \left[c + \dfrac{1}{n}, \ b\right], \quad n > \dfrac{2}{b - a}. \end{cases}$$

Проверить, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Пусть $x \in C([a, b])$, для которой

$$d(x_n, x) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда

$$d(x_n, x) \geqslant \int_a^{c-\varepsilon} |x_n(t) - x(t)|\, dt + \int_{c+\varepsilon}^{b} |x_n(t) - x(t)|\, dt =$$

$$= \int_a^{c-\varepsilon} |x(t)|\, dt + \int_{c+\varepsilon}^{b} |1 - x(t)|\, dt$$

для $\varepsilon \in (0, c)$ и $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, $x(t) = 0$, $t \in [a, c)$ и $x(t) = 1$, $t \in (c, b]$, что невозможно для $x \in C([a, b])$;

21) полно; 22) неполно. Рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t-a}}, & \in \left[a+\dfrac{1}{n},\ b\right]; \\ n\sqrt{n}\,(t-a), & t\in\left[a,\ a+\dfrac{1}{n}\right], \quad n > \dfrac{1}{b-a}. \end{cases}$$

Тогда для $1 \leqslant m < n$ имеем

$$d(x_m,\ x_n) = \max_{a\leqslant t\leqslant a+\frac{1}{m}} (t-a)\,|\,x_m(t) - x_n(t)\,| = \sup_{a<t\leqslant a+\frac{1}{m}} (t-a)\frac{2}{\sqrt{t-a}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

Кроме того,

$$\forall\, t\in(a,\ b]\ :\ x_n(t)\to\frac{1}{\sqrt{t-a}},\quad n\to\infty;$$

23) неполно, см. решение 20);
24) полно; 25) неполно. Рассмотреть последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} t^2, & |t| \leqslant n; \\ n, & |t| > n, \quad n\geqslant 1; \end{cases}$$

27), 28) полно; 29) неполно; 30) полно; 31) полно; 35) полно; 36) полно.

X.1.45. 1) $([0,\ 1],\ \rho)$; 2) $(\mathbf{R},\ \rho)$; 3) $(\mathbf{R}\cup\{-\infty,\ +\infty\},\ d)$.

§ 2

X.2.3. 1) $\rho(f(x),\ f(y)) \leqslant e\rho(x,\ y)$; 2) $\rho(f(x),\ f(y)) \leqslant \rho(x,\ y)$;
3) $\rho(f(x),\ f(y)) \leqslant e\rho(x,\ y)$.

X.2.6. Следствие теоремы о характеризации непрерывности, поскольку функции

$$X \ni x \to d(x,\ a) + d(x,\ b),$$
$$X \ni x \mapsto d(x,\ a)\cdot d(x,\ b)$$

непрерывны на X, а множества $(-\infty,\ 1)$ и $[1,\ +\infty)$ соответственно открыто и замкнуто в $(\mathbf{R},\ \rho)$.

X.2.7. Следует из теоремы о характеризации непрерывности, см. задачу X.2.4.

X.2.9. Проверить сначала, что функция

$$f(x) = \frac{d(x,\ A)}{d(x,\ A) + d(x,\ B)},\quad x\in X,$$

непрерывна на X. Затем положить

$$G = \left\{x\ \middle|\ f(x) < \frac{1}{2}\right\},\quad H = \left\{x\ \middle|\ f(x) > \frac{1}{2}\right\}.$$

X.2.11. 1), 2) Следует из теоремы о характеризации непрерывности; 3) представить заданное множество как пересечение двух открытых множеств.

X.2.12. 1) Замкнуто. Функция

$$C([a,\ b]) \ni x \mapsto x(a) \in \mathbf{R}$$

непрерывна на $C([a,\ b])$, а множество $[0,\ +\infty)$ замкнуто в $(\mathbf{R},\ \rho)$, $\rho(x,\ y) = |\,x-y\,|$;
2) открыто. Функция

$$C([a,\ b]) \ni x \mapsto \int_a^b t\sin(x(t))\,dt \in \mathbf{R}$$

непрерывна на $C([a,\ b])$, а множество $(-\infty,\ 1)$ открыто в $(\mathbf{R},\ \rho)$;

3) **замкнуто**. Представить заданное множество в виде

$$\{x \in C([a, b]) \mid x(a) \leqslant 1\} \cap \{x \in C([a, b]) \mid x(b) \geqslant 1\};$$

4) **открыто**. Функция

$$C([a, b]) \ni x \mapsto y, \quad y(t) = \int_a^t \sin(x(u))\, du, \quad t \in [a, b],$$

непрерывна на $C([a, b])$ и множество

$$\{z \in C([a, b]) \mid \forall t \in [a, b] : z(t) > t\}$$

открыто в $C([a, b])$ с равномерной метрикой;

5) **замкнуто**. Заметить, что заданное множество равно

$$\bigcap_{t \in A} \{x \in C([a, b]) \mid x(t) = 0\}.$$

X.2.13. Для доказательства замкнутости графика использовать определение непрерывности. Для доказательства обратного утверждения использовать теорему о характеризации непрерывности. Другое решение: предположить, что f не является непрерывной в некоторой точке.

X.2.15. *Необходимость*. Пусть $f \in C([0, 1], l_2)$. Тогда условие 1) выполнено. Кроме того, функция

$$\|f(t)\|^2 := \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(t), \quad t \in [0, 1],$$

непрерывна на $[0, 1]$, поскольку

$$|\|f(t)\| - \|f(s)\|| = |d(f(t), \bar{0}) - d(f(s), \bar{0})| \leqslant d(f(t), f(s))$$
$$(t, s) \in [0, 1]^2], \quad \bar{0} = (0, \ldots, 0, \ldots).$$

Поэтому условие 2) выполнено в силу теоремы Дини.

Достаточность. Проверить, что

$$d^2(f(t), f(s)) = \|f(t)\|^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) f_n(s) + \|f(s)\|^2 \to 0,$$

если $s \to t$, при выполнении условий 1) и 2).

§ 3

X.3.1. $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2}\right) : n \geqslant 1\right\}$.

X.3.2. $\left\{\left\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 > \frac{1}{n}\right\} : n \geqslant 1\right\}$.

X.3.3. Если любое открытое покрытие X содержит счетное подпокрытие, то для любого $\varepsilon > 0$ существует счетная ε-сеть. Далее см. задачу X.1.34. Предположим, что (X, d) сепарабельно. Пусть $\{O_\alpha, \alpha \in T\}$ — открытое покрытие X. Для любого $x \in X$ существует $B(x, r(x))$ такой, что

$$x \in B(x, r(x)) \subset O_{\alpha(x)}.$$

Пусть $\mathcal{S}$ — счетное всюду плотное подмножество в X. Существуют $z \in \mathcal{S}$, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, такие, что

$$x \in B(z, r) \subset B(x, r(x)) \subset O_{\alpha(x)}.$$

Семейство $\{B(z, r) \mid z \in \mathcal{S}, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ покрывает X и счетно. Выберем теперь для каждого $B(z, r)$ по одному $O_{\alpha(x)} \supset B(z, r)$.

X.3.4. Множество A замкнуто и ограничено, следовательно, компактно. Пусть $O_{\alpha_1}, \ldots, O_{\alpha_n}$ — конечное подпокрытие. Взять число $\varepsilon > 0$ меньшим

$$\inf_{x \in A} \rho\left(x, \mathbf{R}^2 \setminus \bigcup_{k=1}^{n} O_{\alpha_k}\right) > 0.$$

X.3.5. 1) Пересечение — замкнутое подмножество компактного множества. Следовательно, компактно; 2) воспользоваться определением.

3) примеры: $[0, 1] \setminus [2, 3]$; $[0, 1] \setminus \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ в $(\mathbf{R}, \rho)$;

4) пример: $\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbf{R}$ в $(\mathbf{R}, \rho)$.

X.3.6. Пусть $e_n := (0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots)$, $n \geqslant 1$. Последовательность $\{e_n : n \geqslant 1\} \subset \overline{B}(\overline{0}, 1)$ не может сходиться в (l_2, ρ), поскольку она не фундаментальна

$$\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2}, \quad m \neq n.$$

X.3.7. Проверить, что последовательность функций $\{t^n, t \in [0, 1] : n \geqslant 1\}$ не содержит сходящейся подпоследовательности (эта подпоследовательность должна бы сходиться равномерно на $[0, 1]$, а следовательно, и поточечно на $[0, 1]$).

X.3.8. Использовать критерий Хаусдорфа.

X.3.9. Использовать критерий Хаусдорфа.

X.3.10. 1) Не является компактным, поскольку не ограничено; 2) не является компактным, так как не замкнуто; 3) компактно; 4) компактно.

X.3.11. Использовать критерий Хаусдорфа. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Возьмем $N \in \mathbf{N}$ таким, чтобы

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in A \ : \ \sum_{k=N+1}^{\infty} x_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Множество $B = \{(x_1, \ldots, x_N) \mid \exists\, x = (x_1, \ldots, x_N, \ldots) \in A\}$ есть ограниченное подмножество $\mathbf{R}^N$ с евклидовым расстоянием ρ и потому его замыкание компактно в $(\mathbf{R}^N, \rho)$. Следовательно, для множества B существует конечная $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$-сеть:

$$(x_1^{(i)}, \ldots, x_N^{(i)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Проверить, что набор

$$(x_1^{(i)}, \ldots, x_N^{(i)}, 0, 0, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

есть ε-сеть для множества A.

X.3.13. Использовать критерий Хаусдорфа.

X.3.17. Использовать теорему Асколи — Арцела или критерий Хаусдорфа.

X.3.19. Пример: $(\mathbf{R}^2, \rho)$,

$$K_n = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [0, 1], \quad x_2 \geqslant 4n x_1 (1 - x_1)\}, \quad n \geqslant 1.$$

§ 4

X.4.1. Следствие того, что образ компакта K при непрерывном отображении

$$K \ni x \mapsto d(x, z) \in \mathbf{R}$$

есть ограниченное замкнутое множество.

X.4.2. Конечность диаметра K есть следствие ограниченности множества K. Множество $K \times K$ компактно в декартовом произведении пространств (X, d), (X, d), а отображение

$$K \times K \ni (x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbf{R}$$

непрерывно на $K \times K$, следовательно, образ множества $K \times K$ при этом отображении замкнут.

X.4.3. Аналогично решению предыдущей задачи доказать, что нижняя грань достигается.

X.4.4. График f есть образ компакта K при непрерывном отображении

$$K \ni x \mapsto (x, f(x)) \in X \times \mathbf{R}.$$

X.4.7. Для $X = \mathbf{R}^2$ пусть $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Для доказательства второго утверждения проверить, что $\mathbf{l}_2$ не есть объединение счетного набора компактов. Последнее утверждение следует из теоремы Бэра. См.: **Люстерник Л. А., Соболев В. И.** Краткий курс функционального анализа.— М. : Высш. шк. 1982.— 271 с.

X.4.8. Проверить сначала, что $f \in \mathbf{C}(\mathbf{C}([0, 1]), \mathbf{R})$. Затем доказать, что

$$1)\ \sup \{ f(x) \mid x \in \overline{B}(x_0, 1) \} = 1,$$

2) не существует функции $x \in \overline{B}(x_0, 1)$, для которой $f(x) = 1$.

X.4.10. Пример: $X = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$, $A = (0, 1]$ и $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$.

§ 5

X.5.2. 1) Неподвижная точка $x_0(t) = 0$, $t \in [0, 1]$. Не является сжимающим, так как $\rho(-x, -x_0) = \rho(x, x_0)$ для любого $x \in \mathbf{C}([0, 1])$; 2) неподвижной точкой этого преобразования является любая неотрицательная на $[0, 1]$ функция. Не является сжимающим, так $\rho(|x|, |y|) = \rho(x, y)$ для любых неотрицательных на $[0, 1]$ функций x и y; 3) неподвижная точка x должна удовлетворять условию

$$\forall t \in [0, 1] \ : \ x(t) = x\left(\frac{t}{2}\right).$$

Отсюда для фиксированного $t > 0$ имеем

$$x(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) = x\left(\frac{t}{4}\right) = \cdots = x\left(\frac{t}{2^n}\right)$$

для любого $n \in \mathbf{N}$. Следовательно, $x(t) = x(0)$, $t \in [0, 1]$. Неподвижными точками являются постоянные функции. Преобразование не является сжимающим; 4) неподвижная точка должна удовлетворять условию

$$\forall t \in [0, 1] \ : \ x(t) = \int_0^t x(u)\, du,$$

откуда

$$x'(t) = x(t), \quad t \in (0, 1]; \quad x(0) = 0.$$

Поэтому $x(t) = 0$, $t \in [0, 1]$. Преобразование не является сжимающим, так как

$$\rho(f(x_1), f(x_0)) = \rho(x_1, x_0)$$

для $x_0(t) = 0$, $x_1(t) = 1$, $t \in [0, 1]$; 5) неподвижные точки определяются условием

$$\forall t \in [0, 1] \ : \ x(t) = \int_0^t x(u)\, du + 1, \quad t \in [0, 1].$$

Переходя к дифференциальному уравнению и решая его, получаем $x(t) = e^t$, $t \in [0, 1]$. Преобразование не является сжимающим, так как

$$\rho(f(x_1), f(x_0)) = \rho(x_1, x_0)$$

для функций x_1 и x_0 из 4);

6) неподвижные точки определяются условием

$$\forall t \in [0, 1] \quad : \quad x(t) = \int_0^t (t - u)\, x(u)\, du.$$

Отсюда получим

$$x''(t) = x(t), \quad t \in (0, 1], \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Неподвижная точка $x_0(t) = 0$, $t \in [0, 1]$. Преобразование является сжимающим, так как

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \frac{1}{2} \rho(x, y), \quad \{x, y\} \subset C([0, 1]).$$

X.5.6. Рассмотреть преобразование

$$C([a, b]) \ni g \mapsto A(g), \quad A(g)(x) = g(x) - F(x, g(x)), \quad x \in [a, b].$$

X.5.8. Проверить, что $A(\overline{B}(x_0, r)) \subset \overline{B}(x_0, r)$ и применить принцип сжимающих отображений к пространству $(\overline{B}(x_0, r), d)$.

X.5.9. Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)^t$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m)^t$ пусть

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{k=1}^{m} |x_k - y_k|.$$

Тогда $(\mathbf{R}^m, d)$ — полное метрическое пространство, а преобразование

$$\mathbf{R}^m \ni \vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{x} - \vec{a}$$

есть преобразование сжатия с коэффициентом λ. Для любого $\vec{x}^{(0)}$ последовательность итераций определяется следующим образом:

$$\vec{x}^{(n+1)} = A\vec{x}^{(n)} + \vec{x}^{(n)} - \vec{a}, \quad n \geqslant 0.$$

X.5.10. Рассмотреть расстояние в $\mathbf{R}^m$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k - y_k|.$$

X.5.11. Доказать, что f есть преобразование сжатия. Функция $X \ni x \mapsto d(x, f(x)) \in \mathbf{R}$ непрерывна на X и принимает наименьшее значение в точке x_*. При этом $d(x_*, f(x_*)) = 0$. Если $d(x_*, f(x_*)) > 0$, то, согласно условию,

$$d(f(x_*), f^2(x_*)) < d(x_*, f(x_*)),$$

что невозможно.

X.5.15. A — семейство всех многочленов, рассматриваемых на отрезке $[a, b]$; $\overline{A} = C([a, b])$;

X.5.16. $\overline{A} = C([a, b])$.

X.6.17. Применить теорему Стоуна — Вейерштрасса.

Глава XI

§ 1

XI.1.1. 6. XI.1.2. (a, a), $(a, -a)$, $a \neq 0$. Производная равна 0.

XI.1.3. $(a, 0)$, $(0, a)$, $a \neq 0$.

XI.1.4. Для $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ с $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

XI.1.5. 0, 0. Не существует.

XI.1.6. $\frac{\partial f}{\partial x_k}=b_k+\sum_{j=1}^{m}(c_{kj}+c_{jk})x_j,\quad 1\leqslant k\leqslant m;$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}=c_{jk}+c_{kj},\quad 1\leqslant j,\quad k\leqslant m.$$

XI.1.8. $f''_{12}(0,0)=-1,\quad f''_{21}(0,0)=1.$ XI.1.11. 0. XI.1.12. Использовать теорему о среднем значении для производной по направлению.

XI.1.14. $f'(\vec{x})=\nabla f(\vec{x})=(a_1, a_2, \ldots, a_m),$

$$g'(\vec{x})=\left(\sum_{j=1}^{m}(b_{1j}+b_{j1})x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m}(b_{mj}+b_{jm})x_j\right).$$

§ 2

XI.2.1. $a_1=a_2=\ldots=a_m=0.$ XI.2.2. 1) Поскольку

$$f'_1(x_1, x_2)=\frac{1}{3}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{3}},\quad f'_2(x_1, x_2)=\frac{1}{3}x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{2}{3}},\quad x_1x_2\neq 0,$$

и непрерывны на $\mathbf{R}^2\setminus\{(x_1, x_2)\mid x_1x_2=0\}$, то f дифференцируема в каждой точке (x_1, x_2) с $x_1x_2\neq 0$; 3) не является дифференцируемой, поскольку $f'_{\vec{a}}(0, 0)$ не существует для каждого $\vec{a}$.

XI.2.3. 2) Проверить, что f не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

XI.2.4. Для всех направлений. Не является дифференцируемой. Действительно,

$$f(h_1, h_2)-f(0, 0)-0\cdot h_1-0\cdot h_2=\sqrt[3]{h_1^2h_2},$$

и

$$\frac{\sqrt[3]{h_1^2h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\begin{cases}0, & h_1=0,\quad h_2\neq 0;\\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & h_1=h_2>0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$f(h_1, h_2)-f(0, 0)-0\cdot h_1-0\cdot h_2\neq o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right),\quad (h_1, h_2)\to(0, 0).$$

XI.2.5. 3) Имеем

$$\frac{f(h_1, h_2)-f(0, 0)-h_1-h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\begin{cases}0, & h_1=0,\quad h_2\neq 0;\\ 3\sqrt{2}, & h_1=h_2>0.\end{cases}$$

XI.2.8. Дифференцируема на $\mathbf{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$, поскольку $\{f'_1, f'_2, f'_3\}\subset C(\mathbf{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\})$. Не является дифференцируемой в $(0, 0, 0)$, так как в этой точке не существуют частные производные.

XI.2.9. Частные производные $\{f'_k(\vec{0})\}$ существуют только при $\alpha>1$, при этом $f'_k(\vec{0})=0,\ 1\leqslant k\leqslant m$. Тогда функция f дифференцируема в точке $\vec{0}$, так как

$$\frac{f(\vec{x})-f(\vec{0})-\sum_{k=1}^{m}0\cdot x_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}x_k^2}}=\left(\sum_{k=1}^{m}x_k^2\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}\to 0$$

при $\vec{x}\to\vec{0}$.

XI.2.15. Использовать одномерную формулу и теорему единственности.

XI.2.15.

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x_1 - 1)^k (x_2 + 1)^{n-k}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

XI.2.16.

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n)!} \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} x_1^{2k} x_2^{2(n-k)},$$

$$(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

§ 3

XI.3.6. 1) Критические точки: (0, 0), (1, 1), (—1, —1). Точка (0, 0) не есть точка локального экстремума (рассмотреть поведение функции в окрестности этой точки). Точки (1, 1) и (—1, —1) — точки локального минимума, так как

$$\vec{f}''(1, 1) = \vec{f}''(-1, -1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix};$$

2) (0, 0, 0) — локальный минимум, так как

$$f''(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

3) при любом $a \in \mathbf{R}$ точка $(a, 0, -a)$ не есть точка экстремума, так как

$$f''(a, 0, -a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

4) (0, 0, 0) не есть точка экстремума, так как

$$f''(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

5) (0, 0, 0) — точка локального минимума, так как

$$f''(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

6) нет критических точек;

7) $\left(\frac{1}{\sqrt{2m}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2m}}\right)$ — точка локального максимума, так как в этой точке

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = -\frac{4}{\sqrt{2m}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = -\frac{2}{\sqrt{2m}}, \quad 1 \leqslant k, \quad j \leqslant m,$$

и матрица f'' отрицательно определена;

8) $\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} a_i x_1^{(i)}}{\sum\limits_{i=1}^{N} a_i}, \ldots, \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} a_i x_m^{(i)}}{\sum\limits_{i=1}^{N} a_i}\right)$ — точка минимума.

XI.3.8 $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3}{2}}$.

XI.3.11. Нет. Пример: $P(x_1, x_2) = (x_1x_2 - 1)^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

XI.3.12. Проверить, что функция f на множестве $\{x_i > 0,\ i = 1, 2, 3\}$ и её сужения на множествах

$\{x_1 = 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0\}$, $\{x_1 > 0,\ x_2 = 0,\ x_3 > 0\}$ $\{x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 = 0\}$

не имеют критических точек. Наибольшие значения на полуосях $\{x_1 > 0,\ x_2 = x_3 = 0\}$, $\{x_2 > 0,\ x_1 = x_3 = 0\}$, $\{x_3 > 0,\ x_1 = x_2 = 0\}$ равны соответственно e^{-1}, $\frac{1}{2}e^{-1}$ и $\frac{1}{3}e^{-1}$. Наибольшее значение равно e^{-1}, наименьшее равно 0.

XI.3.13. Пусть C положительно определена. Тогда для некоторого $\lambda > 0$

$$\vec{x}^t C \vec{x} \geqslant \lambda \|\vec{x}\|^2, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^m,$$

откуда следует, что

$$f(\vec{x}) \to +\infty, \quad \|\vec{x}\| \to +\infty.$$

Таким образом,

$$\exists \vec{x}_* \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^m \quad : \quad f(\vec{x}_*) \leqslant f(\vec{x}).$$

Точка $\vec{x}_*$ — точка локального минимума, поэтому $\vec{x}_*$ — критическая точка и $\vec{x}^* = \vec{x}^\circ$.

Если $\vec{x}^\circ$ — точка локального минимума, то матрица C положительно определена, поскольку $f''(\vec{x}^\circ) = 2C$.

Глава XII

§ 1

XII.1.3. 1) Взаимно однозначно и непрерывно; 2) непрерывно, но не взаимно однозначно, так как $\vec{f}((0, 1)) = \vec{f}((0, -1))$; 3) непрерывно и взаимно однозначно; 4) непрерывно. Взаимно однозначно на A_1 и не является взаимно однозначным на A_2, так как $\vec{f}((1, 0)) = \vec{f}((1, 2\pi))$; 5) непрерывно. Взаимно однозначно на A_1 и не взаимно однозначно на A_2; 6) непрерывно и взаимно однозначно.

XII.1.5.

1) $\vec{f}'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{f}'\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$d\vec{f}(\vec{x}^\circ, \vec{a}) = (a_1, 0)^t, \quad \vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2;$$

2) $\vec{f}'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{f}'(\vec{x}^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$d\vec{f}(\vec{x}^\circ, \vec{a}) = (-a_2, a_1)^t;$$

3) $\vec{f}'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} e^r\cos\varphi & -e^r\sin\varphi \\ e^r\sin\varphi & e^r\cos\varphi \end{pmatrix}$,

$$d\vec{f}(\vec{x}^\circ, \vec{a}) = (e^{r^\circ}(a_1\cos\varphi^\circ - a_2\sin\varphi^\circ), \quad e^{r^\circ}(a_1\sin\varphi^\circ + a_2\cos\varphi^\circ))^t;$$

4) $\vec{f}'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$;

$$\vec{df}(\vec{x^\circ}, \vec{a}) = (2(a_1x_1^\circ - a_2x_2^\circ), \quad 2(a_1x_2^\circ + a_2x_1^\circ))^t;$$

5) $\vec{f}'(r, \varphi, x_3) = \begin{pmatrix} \cos\varphi - r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$\vec{df}(\vec{x^\circ}, \vec{a}) = (a_1\cos\varphi^\circ - a_2r^\circ\sin\varphi^\circ, \ a_1\sin\varphi^\circ + a_2r^\circ\cos\varphi^\circ, \ a_3)^t,$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3;$$

6) $\vec{f}'(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix},$

$$\vec{df}(\vec{x^\circ}, \vec{a}) = (a_1\cos\varphi^\circ\sin\theta^\circ - a_2r^\circ\sin\varphi^\circ\sin\theta^\circ + a_3r^\circ\cos\varphi^\circ\cos\theta^\circ,$$

$$a_1\sin\varphi^\circ\sin\theta^\circ + a_2r^\circ\cos\varphi^\circ\sin\theta^\circ + a_3r^\circ\sin\varphi^\circ\cos\theta^\circ, \ a_1\cos\theta^\circ - a_3r^\circ\sin\theta^\circ)^t.$$

XII.1.6. $\{(x_1, x_2) \mid x_1 - x_2 \neq 0, \ x_1 + x_2 \neq 0\}$.

$\vec{f}'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det \vec{f}'(x_1, x_2) = 2, \quad x_1 - x_2 > 0, \quad x_1 + x_2 > 0;$

$\vec{f}'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det \vec{f}'(x_1, x_2) = -2, \quad x_1 - x_2 < 0, \quad x_1 + x_2 > 0;$

$\vec{f}'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \vec{f}'(x_1, x_2) = 2, \quad x_1 - x_2 < 0, \quad x_1 + x_2 < 0;$

$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \vec{f}'(x_1, x_2) = -2, \quad x_1 - x_2 > 0, \quad x_1 + x_2 < 0.$

$\vec{f}^{-1}(\{(1, 1)\}) = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}.$

XII.1.7. $\mathbf{R}^2$.

$\vec{f}'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$, $\det \vec{f}'(x_1, x_2) = 4(x_1^2 - x_2^2),$

$$(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Множество критических гочек $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^2\}$,

$$\vec{f}^{-1}(A) = \{(x_1, x_2) \mid x_1x_2 = 0\}.$$

XII.1.8. Отображения, заданные в задаче XII.1.1: 1) — 1, нет; 2) $2x_2$, прямаи $x_2 = 0$; 3) -2, нет; 4) r, отрезок $r = 0$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; 5) e^{2r}, нет; 6) $4(x_1^2 + x_2^2)$, (0, 0). Отображения, заданные в вадаче XII.1.4: 1) r. $\{(0, \varphi, x_3) \mid \varphi \in [0, 2\pi], \ x_3 \in \mathbf{R}\}$. 2) $r^2 \sin\theta$.

XII.1.9. $\vec{f}'(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det \vec{f}' = r;$

$$\vec{g}'(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} \cos y_3 & 0 & -y_1\sin y_3 \\ 0 & \cos y_3 & -y_2\sin y_3 \\ \dfrac{y_1\sin y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} & \dfrac{y_2\sin y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} & \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\cos y_3 \end{pmatrix},$$

$$\det \vec{g}' = \cos y_3 \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

$$\vec{h}'(r, \varphi, \theta) = \vec{g}'(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \theta)\vec{f}'(r, \varphi, \theta),$$

$$\det \vec{h}' = \det \vec{g}' \cdot \det \vec{f}' = r^2 \cos\theta.$$

Заметим также, что

$$\vec{h}(r, \varphi, \theta) = (r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta)^t.$$

XII.1.10. Проверить, что $\vec{f}$ есть преобразование сжатия в $\mathbf{R}^2$.

§ 2

XII.2.1. 1) $\vec{g}(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{3}(y_1 + 2y_2),\ \frac{1}{3}(y_1 - y_2)\right)^t,\ (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2;$

2) $\vec{g}(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{y_1^2 + y_2^2} + y_1},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - y_1}\right)^t,$

$(y_1, y_2) \in (0, +\infty)^2;$

3) $\vec{g}(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{2y_1 - y_2^2}),\ \frac{1}{2}(-y_2 + \sqrt{2y_1 - y_2^2})\right)^t,$

$(y_1, y_2) \in \{(y_1, y_2) \mid y_2^2 \leqslant 2y_1\};$

4) $g_1(y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$

$$g_2(y_1, y_2) = \begin{cases} \arccos \dfrac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, & y_2 \geqslant 0; \\ -\arccos \dfrac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, & y_2 < 0, \end{cases}$$

$(y_1, y_2) \neq (0, 0).$

XII.2.2. $\vec{g}(y_1, y_2) = \left(\frac{y_2 - y_1}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^t,\quad y_1 \geqslant 0,\quad y_2 \geqslant 0.$

XII.2.3.

$$\vec{g}_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{y_1 + y_2} + \sqrt{y_1 - y_2},\ \sqrt{y_1 + y_2} - \sqrt{y_1 - y_2}\right)^t,$$

$$\vec{g}_2(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{y_1 - y_2} - \sqrt{y_1 + y_2},\ -\sqrt{y_1 + y_2} - \sqrt{y_1 - y_2}\right)^t;$$

$y_1 \geqslant 0,\quad y_1 \geqslant y_2.$

XII.2.8. 4) Применить теорему о существовании обратного отображения. В некоторой окрестности $B((1, 0), r_1)$

$$\vec{g}_1(y_1, y_2) = \left(\ln\sqrt{y_1^2 + y_2^2},\ \operatorname{arctg}\frac{y_2}{y_1}\right)^t.$$

В некоторой окрестности $B((1, 0), r_2)$

$$\vec{g}_2(y_1, y_2) = \left(\ln\sqrt{y_1^2 + y_2^2},\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y_2}{y_1}\right)^t.$$

XII.2.9. $\vec{g}'(0, 2) = (\vec{f}'(0, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

XII.2.10. $\vec{g}'(0, 2) = (\vec{f}'(1, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

XII.2.11. $\vec{g}'(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

XII.2.12. $\vec{g}(y_1, y_2) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}(y_1 + y_2)}, \sqrt{\frac{1}{2}(y_1 - y_2)}\right),$

$(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2;$

$$\det \vec{f}'(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 3x_2^2 \\ 3x_1^2 & -3x_2^2 \end{pmatrix} = -18x_1^2x_2^2.$$

XII.2.13. Применить теорему о существовании и свойствах неявной функции к функции

$$F(x, y) = e^{2x\cos y} + e^{y\cos 2x} - 2, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

и точке $(x^\circ, y^\circ) = (0, 0)$; $f'(0) = -2$.

XII.2.16. $f_1'(0, 0) = f_2'(0, 0) = -1.$

XII.2.17. $f_1'(1, 1) = (2 - e^2)(1 + e^2)^{-1}, \quad f_2'(1, 1) = -1.$

XII.2.18. $\vec{f}(1) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)^t.$

§ 3

XII.3.1. Критические точки функции Лагранжа $\vec{x}^{(1)} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Функция f непрерывна на компакте $\{x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Следовательно, она принимает наименьшее и наибольшее значения в точках $\vec{x}_*$ и $\vec{x}^*$. Эти точки будут также точками локального относительного экстремума и потому критическими точками функции Лагранжа. Поскольку $f(\vec{x}^{(1)}) < 0$, $f(\vec{x}^{(2)}) > 0$, то $\vec{x}_* = \vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^* = \vec{x}^{(2)}$;

2) критические точки функции Лагранжа:

$$\vec{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 1), \quad \vec{x}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, -1).$$

Аналогично случаю 1) заключаем, что $\vec{x}^{(1)}$ — точка максимума f, а $\vec{x}^{(2)}$ — точка минимума f;

3) критические точки функции Лагранжа:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Первые две точки — точки относительного максимума, вторые две — точки относительного минимума; 4) одна критическая точка функции Лагранжа: $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Функция f удовлетворяет условию

$$f(x) \to +\infty, \quad \|\vec{x}\| \to +\infty.$$

Поэтому

$$\exists \vec{x}_* \quad \forall \vec{x} \in \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \quad : \quad f(\vec{x}_*) \leqslant f(\vec{x}).$$

Следовательно, $\vec{x}_*$ есть также точка локального относительного минимума и потому должна быть критической. Таким образом, критическая точка есть точка относительного минимума; 5) функция Лагранжа имеет одну критическую точку (2, 2, 1). Эта точка — точка локального относительного минимума. Заметить, что при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ с учетом условия

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3} + \frac{2}{x_2} + 2x_2x_3;$$

6) функция Лагранжа имеет одну критическую точку (0, 0, 0), которая не является точкой локального относительного экстремума, так как

$$f(x_1, x_2, x_1^2 - x_2^2 - x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2;$$

7) метод множителей Лагранжа неприменим. Заметить, что $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$. Следовательно, при условии задачи

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2, \quad x_1 \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, точка (0, 0) есть точка абсолютного условного минимума f.

XII.3.2. Рассмотреть квадрат расстояния

$$f(x_1, x_2) := (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2, \quad x_1, x_2) \in \Gamma.$$

Проверить, что критическая точка функции Лагранжа (2, 2) соответствует искомому минимуму расстоянии, равного $\sqrt{5}$.

XII.3.3. Рассмотреть квадрат расстояния $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$ до точки (x_1, x_2) на эллипсе. Максимальное расстояние равно 2, минимальное — 1;

XII.3.4. Рассмотреть квадрат расстояния

$f(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma$. Критические точки функции Лагранжа: (1, 0, 0) и $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Первая точка соответствует максимальному, а вторая — минимальному расстоянию, равному $\sqrt{11}$, от точки (0, 3, 3) до Г.

XII.3.5. Рассмотреть квадрат расстояния

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2,$$
$$(x_1, x_2) \in \Gamma_1, \ (x_3, x_4) \in \Gamma_2.$$

Функция Лагранжа имеет критические точки $\left(2, 1, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ и $\left(-2, -1, -\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$.

Минимальное расстояние равно $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

XII.3.6. 1) Сначала рассмотрим функцию f на множестве A° всех внутренних точек множества A. При этом $f \in C^1(A^\circ)$ и имеет критическую точку $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, которая не является точкой локального экстремума. Таким образом, наименьшее и наибольшее значения f, которые, согласно теореме Вейерштрасса, достигаются в A, не достигаются в точках A°. Далее рассмотрим f на $A \setminus A^\circ$: нужно найти минимальное и максимальное f при условии $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Функция Лагранжа в этом случае имеет критические точки (1, 0), (0, 1), (—1, 0), (0, —1), причем $f(-1, 0) = f(1, 0) = 1$, $f(0, 1) = f(0, -1) = -1$; 2) $f(2, 0) = 25$, $f(-2, 0) = 1$. Решение аналогично 1); 3) экстремальные значения достигаются на множестве $A \setminus A^\circ$,

которое здесь состоит из следующих частей:

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 1, \quad x_2 \in [-1, 3]\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = -2, \quad x_2 \in [-1, 3]\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [-2, 1], \ x_2 = 3\},$$

$$\Gamma_4 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [-2, 1], \ x_2 = -1\}.$$

На Γ_1 $f(x_1, x_2) = 1 + x_2^2$ и, следовательно,

$$\min_{\Gamma_1} f = f(1, 0) = 1, \quad \max_{\Gamma_1} f = f(1,3) = 10.$$

Аналогично

$$\min_{\Gamma_2} f = f(-2, 0) = 16, \ \max_{\Gamma_2} f = f(-2, 3) = 25;$$

$$\min_{\Gamma_3} f = f(1, 3) = 10, \quad \max_{\Gamma_3} f = f(-2, 3) = 25;$$

$$\min_{\Gamma_4} f = f(1, -1) = 2, \quad \max_{\Gamma_4} f = f(-2, -1) = 17.$$

Поэтому

$$\min_{A} f = f(1, 0) = 1, \quad \max_{A} f = f(-2, 3) = 25;$$

4) функция f в A° имеет критические точки: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$. При этом $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = -1$, $f(0, -1) = -1$, $f(1, 0) = 1$, $f(-1, 0) = 1$. На множестве $A \setminus A^\circ$ функция $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2)\, e^{-3}$, а соответствующая функция Лагранжа имеет критические точки

$$(0, -2), \quad (0, 2), \quad (-2, 0), \quad (2, 0),$$

для которых

$$f(0, -2) = f(0, 2) = -4e^{-3}, \quad f(-2, 0) = f(2, 0) = 4e^{-3}.$$

Поэтому

$$\max_{A} f = f(1, 0) = 1, \quad \min_{A} f = f(0, 1) = -1;$$

5) значения функции f в критических точках множества A° равны:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, \pm 1) = 1, \quad f(\pm 1, 0) = 2.$$

На множестве $A \setminus A^\circ$ функция f равна $f(x_1, x_2) = (2x_1^2 + x_2^2)\, e^{-3}$, а соответствующая функция Лагранжа имеет критические точки $(0, \pm 2)$, $(\pm 2, 0)$, в которых

$$f(0, \pm 2) = 4e^{-3}, \ f(\pm 2, 0) = 8e^{-3}.$$

Поэтому

$$\max_{A} f = f(\pm 1, 0) = 2, \quad \min_{A} f = f(0, 0) = 0;$$

6) значение f в критической точке из A° есть

$$f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Функция Лагранжа для f на $A \setminus A^\circ$ имеет среди критических точек точки вида

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{n}}, \ldots, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right),$$

в которых значение f равно $\sqrt{n}$.

XII.3.7. Цилиндр с высотой $\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

XII.3.8. Задача состоит в определении наибольшего значения функции $f(x_1, x_2) = 4x_1x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ при условии $x_1^2a_1^{-2} + x_2^2a_2^{-2} = 1$. Стороны прямоугольника имеют длину $a_1\sqrt{2}$, $a_2\sqrt{2}$.

XII.3.9. Наименьшее значение равно $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^{-1}\right)^{-1}$. Отметим, что простое решение этой задачи следует также из неравенства Коши

$$1^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} \sqrt{a_k}x_k \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_kx_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} a_k^{-1},$$

причем равенство достигается, если $x_k = \dfrac{\lambda}{a_k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, с некоторым $\lambda \in \mathbf{R}$.

XII.3.10. Наибольшее значение равно $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^2}$. Простое решение получается также с помощью неравенства Коши.

XII.3.11. Наибольшее значение равно m^{-m}. Кроме метода множителей Лагранжа можно воспользоваться неравенством между средними значениями

$$(x_1^2x_2^2 \ldots x_m^2)^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_k^2.$$

XII.3.12. С помощью метода множителей Лагранжа находим расстояние

$$\|\vec{a}\|^{-1}\,|\vec{a}^t\vec{x}^0 - b|.$$

Простое решение получается также с помощью неравенства Коши

$$|\vec{a}^t\vec{x}^0 - b|^2 = |\vec{a}^t(\vec{x} - \vec{x}^0)|^2 \leqslant \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{x} - \vec{x}^0\|^2.$$

XII.3.13. Использовать метод множителей Лагранжа или неравенство между средними значениями.

§ 4

XII.4.7. На $\mathbf{N}$ определим функцию $\rho(k, k) = 0$, $k \geqslant 1$. Для $\{k, j\} \subset \mathbf{N}$ и $k < j$ положим $\rho(k, j) = \rho(j, k) = 1 + \dfrac{1}{2^k}$. Проверить, что $(\mathbf{N}, \rho)$ — полное метрическое неравенство. В этом пространстве шары

$$\bar{B}\left(k, 1 + \frac{1}{2^k}\right), \quad k \geqslant 1,$$

обладают требуемыми свойствами.

Замечание. Описанная ситуация невозможна в банаховом пространстве.

XII.4.17. Минимум в точке (0, 0).

Глава XIII

§ 1

XIII.1.1. 1) 1; 2) $((b-1)\,a^{b-1})^{-1}$; 3) π; 4) $\frac{1}{8}$; 5) $\frac{15}{4}$; 6) $\frac{8}{3}$; 7) π; 8) 3; 9) $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$; 10) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$.

XIII.1.4. 1) -1; 2) 1; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $n!$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$.

XIII.1.5. 1) Использовать неравенство

$$\frac{\sin^2 x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R};$$

2) использовать неравенство $e^{-x^x} \leqslant e^{-x}$, $x \geqslant 1$.

3) поскольку при $x \geqslant 1$ $\ln x \leqslant x$, то $\ln xe^{-x} \leqslant xe^{-x}$, $x \geqslant 1$. 4) см. 3); 5) можно воспользоваться сходящимся интегралом из XIII.1.4, 4). Более предпочтительно следующее рассуждение. Подынтегральная функция непрерывна на $[1, +\infty)$ и $x^{a+2}\, e^{-x} \to 0$, $x \to +\infty$. Поэтому

$$\exists L > 0 \quad \forall x \geqslant 1 \quad : \quad x^a e^{-x} \leqslant \frac{L}{x^2};$$

6) поскольку $\ln(x+1) > \ln x$, $x > 0$, то

$$\frac{1}{x \ln^2(x+1)} < \frac{1}{x \ln^2 x}, \quad x \geqslant 2.$$

7) заметим, что $x(e^x - 1)^{-1} \to 1$, $x \to 0$. Поскольку

$$e^x \geqslant 1 + x, \quad x \geqslant 0, \text{ то } e^x - 1 > \frac{x}{1+x} e^x, \quad x > 0.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{e^x - 1} \leqslant (1+x)\, e^{-x}, \quad x > 0;$$

8) заметим, что $\frac{x}{\operatorname{sh} x} \to 1$, $x \to 0$. Поскольку $\operatorname{sh} x \sim \frac{1}{2} e^x$, $x \to +\infty$, то

$$\exists A > 0 \quad \forall x > A \quad : \quad \operatorname{sh} x > \frac{1}{4} e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\operatorname{sh} x} < 4xe^{-x};$$

9) воспользоваться неравенством $e^{\sqrt{x}} - 1 \geqslant \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$;

10) заметим, что

$$x^{a-1} e^{-x} \sim x^{a-1}, \quad x \to 0+;$$

11) проверить, что $x \ln \frac{1}{x} \to 0$, $x \to 0+$;

12) заметить, что $\frac{1}{1+x} \ln \frac{1}{x} < \ln \frac{1}{x}$, $x > 0$.

XIII.1.6. 1) Для сходящегося интеграла

$$\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} f(u)\, du \to 0, \quad x \to +\infty;$$

2) пусть $f(x) \geqslant 0$, $x \geqslant a$, и f монотонно не возрастает. Тогда

$$\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} f(u)\, du \geqslant \frac{1}{2} x f(x), \quad x > 2a.$$

XIII.1.7. Предположим, что f неотрицательна и убывает на $(0, 1]$. Тогда

$$\int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\, dx \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int\limits_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\, dx$$

для $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Поэтому при каждом $n \geqslant 3$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx+\frac{1}{n} f(1).$$

Для получения последнего равенства рассмотреть случай $f(x)=\ln x,\ x>0$.

XIII.1.8. 1) Сходится при $a>-1$ и расходится при $a \leqslant -1$; 2) сходится при $a<1$ и $b<1$, расходится в остальных случаях; 3) сходится при $a>4$ и расходится при $a \leqslant 4$. Использовать неравенства

$$\frac{n\pi}{1+(n+1)^{a} \pi^{a} \sin^{2} x} \leqslant \frac{x}{1+x^{a} \sin^{2} x} \leqslant \frac{(n+1)\pi}{1+(n\pi)^{a} \sin^{2} x},$$

$$n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi, \quad n \geqslant 0,$$

а также то, что

$$\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+A \sin^{2} x}=\frac{\pi}{\sqrt{1+A}}, \quad A>0.$$

Подробное решение этого примера и аналогичных ему см. в кн.: **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т.— М. : Физматгиз, 1958—1960.— Т. 2.— С. 578—581. 4) сходится при $a \geqslant 0$ и $b>a+1$ и при $a<0$ и $b-a>1$. Расходится в остальных случаях; 5), 6) сходится; 7) сходится, поскольку для $n \geqslant 1$ имеем

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x\,|\sin x|^{x^{3}}\,dx \leqslant \pi(n+1) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^{(n\pi)^{3}}\,dx=$$

$$=\pi(n+1) \int_{0}^{\pi} |\sin x|^{(n\pi)^{3}}\,dx=2\pi(n+1) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{(n\pi)^{3}}\,dx=$$

$$=2\pi(n+1) \int_{0}^{1} t^{(n\pi)^{3}} \sqrt{1-t^{2}}\,dt \leqslant \frac{2\pi(n+1)}{(n\pi)^{3}+1};$$

8) сходится при $a>\frac{3}{4}$.

XIII.1.9. 1) Сходится при $b_j<1,\ 1 \leqslant j \leqslant n$, и $b_1+\ldots+b_n>1$; 2) сходится.

XIII.1.10. 1) Сходится в силу признака Дирихле. Не сходится абсолютно, так как

$$\int_{0}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx=\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \geqslant 1;$$

2) сходится в силу Дирихле. См. 1); 4) для доказательства сходимости применить признак Дирихле к подынтегральной функции, представленной в виде

$$\sin(x^{2})=2x \sin(x^{2}) \cdot \frac{1}{2x}, \quad x>0.$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^A |\sin(x^2)|\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{A^2} \frac{|\sin u|}{\sqrt{u}}\,du, \quad A>0.$$

Далее рассуждаем аналогично 1);
5) сходится в силу признака Абеля. Кроме того,

$$\int\limits_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\operatorname{arctg} x\,dx > \operatorname{arctg}\pi \int\limits_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx, \quad n \geqslant 2.$$

6), 7) аналогично 5); 8) сходимость можно получить из следующих рассуждений:

$$\int\limits_0^A (-1)^{[x^2]}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{A^2} \frac{(-1)^{[u]}}{\sqrt{u}}\,du, \quad A>0,$$

интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(-1)^{[u]}}{\sqrt{u}}\,du$ сходится в силу признака Дирихле;

11) из признака Дирихле следует сходимость интегралов

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{\sin x}\,\frac{\cos x}{x}\,dx, \qquad \int\limits_1^{+\infty} (e^{\sin x} + e^{\sin x}\sin x)\,\frac{\cos x}{x}\,dx.$$

XIII.1.11. 1) Сходится абсолютно при $a > 1$, условно при $0 < a \leqslant 1$ в силу признака Дирихле. Расходится при $a \leqslant 0$;
2) сходится условно в силу признака Дирихле;
3) сходится абсолютно при $a > 2$, условно при $0 < a \leqslant 1$;
4) сходится абсолютно при $-1 < \frac{a+1}{b} < 0$, условно при $0 \leqslant \frac{a+1}{b} < 1$ для $b \neq 0$, расходится при $b = 0$; 5) сходится в силу признака Дирихле, сходимость условна; 6) сходится в силу признака Дирихле. Сходимость условна, так как

$$\int\limits_0^{+\infty} |\cos(x+x^3)|\,dx \geqslant \int\limits_0^{+\infty} \cos^2(x+x^3)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} (1+\cos(2(x+x^3)))\,dx;$$

7), 8) сходится условно, см. решение 6); 9) сходится абсолютно.

XIII.1.13. Использовать соотношение

$$|f(A_1) - f(A_2)| = \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f'(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{A_1}^{A_2} |f'(x)|\,dx,$$

где $A_1 \leqslant A_2$ и критерий Коши сходимости несобственного интеграла и существования предела функции в точке.

XIII.1.16. С помощью интегрирования по частям доказать неравенство

$$\sup_{A \geqslant a} \int\limits_a^A (f'(x))^2\,dx < +\infty.$$

XIII.1.17. 1) Предел равен 0. Заметим, что при $x > 1$

$$x\int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,du = x\left(I - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin u}{u^2}\,du\right),$$

где

$$I := \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\, du.$$

Проверить, что правило Лопиталя непосредственно неприменимо. Преобразовать с помощью интегрирования по частям

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin u}{u^2}\, du = -\frac{\cos u}{u^2}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{2\cos u}{u^3}\, du.$$

2) $\frac{1}{2}$; 3) 1.

§ 2

XIII.2.1. 1) Функция $[0, 2] \times [-1, 1] \ni (x, \alpha) \mapsto \sqrt{x} \cos(\alpha x)$ непрерывна на $[0, 2] \times [-1, 1]$, поэтому функция

$$\mathcal{I}(\alpha) := \int_0^2 \sqrt{x} \cos(\alpha x)\, dx, \quad \alpha \in [-1, 1]$$

непрерывна на $[-1, 1]$ и тогда

$$\lim_{\alpha \to 0} \mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}(0) = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

2) 1; 3) $\frac{\pi}{4}$. Заметить, что

$$\left| \int_0^{\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2} \right| \leqslant |\alpha|, \quad \left| \int_1^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2} \right| \leqslant |\alpha|;$$

4) $\ln \frac{2e}{1+e}$. Заметить, что

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} - \frac{1}{1 + e^x} \right| \leqslant \frac{1}{4} \sup_{x \in [0,1]} \left(e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right), \quad n \geqslant 1.$$

XIII.2.2. Предел равен 1. Перейти к пределу под знаком интеграла нельзя. Имеем

$$\forall x \in [0, 1] \ : \ \frac{2x}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) \to 0, \quad \alpha \to 0.$$

Однако

$$\sup_{x \in [0,1]} \frac{2x}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) \geqslant 2e^{-\alpha^2}.$$

XIII.2.3. Воспользоваться равенствами

$$\int_a^b (f(x+\alpha)-f(x))\,dx=\int_{a-\alpha}^{b-\alpha} f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a-\alpha}^{a} f(x)\,dx-\int_{b-\alpha}^{b} f(x)\,dx.$$

XIII.2.5. 0.
XIII.2.6. 0.

XIII.2.8. 1) $\mathscr{F}'(\alpha)=\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x)(1+\alpha x)}$, $\alpha>0$;

2) $\mathscr{F}'(\alpha)=-\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 x}}$, $\alpha\in(0,1)$;

3) $\mathscr{F}'(\alpha)=-\int_\alpha^{\alpha^2}((x+\alpha)^2+2\alpha(x+\alpha))\exp(-\alpha(x+\alpha)^2)\,dx+$

$+2\alpha\exp(-\alpha^3(1+\alpha)^2)-\alpha\exp(-4\alpha^3)$, $\alpha\in\mathbf{R}$;

4) $\mathscr{F}'(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\exp(\alpha\sqrt{1-x^2})\,dx-\exp(\alpha|\sin\alpha|)\sin\alpha-$

$-\exp(\alpha|\cos\alpha|)\cos\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$;

5) $\mathscr{F}'(\alpha)=\int_{-\alpha^2}^{\alpha^2}\exp(\alpha^4y^3)\,dy+\int_0^\alpha\left\{x^3\int_{-\alpha x}^{\alpha x}\exp(x^3y^3\alpha)\,y^3dy+x\exp(\alpha^4x^4)-\right.$

$\left.-x\exp(-\alpha^4x^4)\right\}dx.$

XIII.2.9. $\mathscr{F}''(\alpha)=0$, $\alpha<0$ и $\alpha>1$; $\mathscr{F}''(\alpha)=2f(\alpha)$, $\alpha\in(0,1)$.

XIII.2.10. $\mathscr{F}'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}f(1)\operatorname{sign}(\sin\alpha)-\frac{1}{\alpha}\mathscr{F}(\alpha)-$

$-\frac{1}{\alpha}\int_0^1 x f'(x)\operatorname{sign}(\sin(\alpha x))\,dx$, $\alpha\,\bar{\in}\,\{n\pi\mid n\in\mathbf{Z}\}$.

Если $f(1)=0$, то $\mathscr{F}'$ существует на $\mathbf{R}$.

XIII.2.11. $\ln\frac{1+b}{1+a}$. Использовать теорему об интегрировании по параметру.

§ 3

XIII.3.1. Проверить, что

$$\sup_{\alpha\geqslant 2}\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\leqslant\frac{1}{A},\quad A>1;\quad \sup_{\alpha>1}\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=+\infty,\quad A>0.$$

XIII.3.3. Проверить, что

$$\sup_{\alpha\leqslant n}\int_A^{+\infty} e^{-x+\alpha}dx \leqslant e^{n-A}, \quad A \geqslant n;$$

$$\sup_{\alpha\geqslant 0}\int_A^{+\infty} e^{-|x-\alpha|}dx \geqslant \int_A^{+\infty} e^{-x+A}dx = 1, \quad A > 0.$$

XIII.3.4. Заметим, что

$$\sup_{\alpha\leqslant n}\int_A^{+\infty}\frac{xdx}{1+(x-\alpha)^6} \leqslant \int_A^{+\infty}\frac{xdx}{(x-n)^6} = \frac{1}{4(A-n)^4}+\frac{n}{5(A-n)^5}, \quad A>n;$$

$$\sup_{\alpha\geqslant 0}\int_A^{+\infty}\frac{xdx}{1+(x-\alpha)^6} \geqslant \int_A^{+\infty}\frac{dx}{1+(x-A)^6} = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}, \quad A > 1.$$

XIII.3.6. 1)—5) Использовать признак Вейерштрасса равномерной сходимости; 6) проверить, что

$$I_\varepsilon := \sup_{\alpha\in M}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\frac{dx}{|x-\alpha|^\alpha} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Действительно,

$$I_\varepsilon = \sup_{\alpha\in M}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{du}{|u|^\alpha} \leqslant 2\int_0^{\varepsilon}\frac{du}{u^{\frac{2}{3}}}, \quad \varepsilon > 0;$$

7) аналогично 6).

XIII.3.7. Воспользоваться признаком Дирихле.

XIII.3.9. Воспользоваться признаком Абеля равномерной сходимости.

XIII.3.11. 1) Интеграл под знаком предела есть непрерывная на $[0, +\infty)$ функция от α по теореме о непрерывности несобственного интеграла по параметру; 2)—4) применить теорему о предельном переходе; 7), 8) при $\alpha > 0$ сделать замену переменной $\alpha x = u$.

XIII.3.13. 0.

XIII.3.14. 1) Применить теорему о непрерывности равномерно сходящегося несобственного интеграла по параметру; 2) для доказательства непрерывности $\mathcal{F}$ в точке $\alpha_0 > 0$, применить теорему о непрерывности к множеству $[\gamma, +\infty)$ с фиксированным $\gamma \in (0, \alpha_0)$; 3), 4) применить теорему о непрерывности; 5) для доказательства непрерывности $\mathcal{F}$ в точке α_0 применить теорему о непрерывности к множеству $(-\infty, \gamma]$, где $\gamma > \alpha_0$; 6)—11) аналогично 5).

XIII.3.16. К интегралу

$$\int_0^{+\infty} f'(\alpha x)\,dx, \quad \alpha \in [a, b]$$

(при $a < b$) применить теорему об интегрировании по параметру.

XIII.3.17. 1) $-(b-a)\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\dfrac{\pi\alpha}{2}$; 3) $\dfrac{\pi\alpha}{2}$; 4) $\ln\dfrac{a}{b}$; 5) $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{b}{a}$.

XIII.3.18. $\mathcal{F}(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\dfrac{\alpha^2}{4}\right), \quad \alpha \in \mathbf{R}.$

XIII.3.19. $\mathcal{F}'(\alpha) = -\dfrac{\sin\alpha^2}{1+\alpha^3} + \displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \dfrac{x\cos\alpha x}{1+x^3}\,dx, \quad \alpha \geqslant 0.$

XIII.3.20. $\displaystyle\int_{R} f_1(x)\,dx \cdot \int_{R} f_2(x)\,dx.$

§ 4

XIII.4.2. 1) $\dfrac{1}{a}\Gamma\left(\dfrac{1}{a}\right)$; 2) $\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)$; 3) $\dfrac{1}{b}\Gamma\left(\dfrac{a+1}{b}\right)$;
4) $2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)a^{-\frac{n}{2}}$; 5) $\Gamma(a+1)$.

XIII.4.3. 1) $\dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{b+1}{2}\right)$; 2) $\dfrac{1}{a}B\left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{2}\right)$;
3) $\dfrac{1}{b}B\left(c+1, \dfrac{a+1}{b}\right)$; 4) $B(a, b)$; 5) $a^{b+c-1}B(b, c)$.

XIII.4.4. 1), 2) Использовать разложение синуса в бесконечное произведение; 3)—5) воспользоваться представлением Вейерштрасса.

XIII.4.5. 1) 1; 2) $\Gamma(\alpha)$.

Глава XIV

§ 1

XIV.1.2. 1) $n2^n$; 2) $\sqrt{n^{-2}+4\cdot 2^{-2n}}$; 3) Если $n=km$ с некоторым $k\in\mathbf{N}$, $k>1$.

XIV.1.3. 1) $L(f, \lambda_{mn}) = \displaystyle\sum_{\nu_1=0}^{m-1}\sum_{\nu_2=0}^{n-1}\left(2\frac{\nu_1}{m} - 3\frac{\nu_2+1}{n}\right)\frac{2}{mn} = 2\left(1-\frac{1}{m}\right) -$
$-3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,

$$U(f, \lambda_{mn}) = \sum_{\nu_1=0}^{m-1}\sum_{\nu_2=0}^{n-1}\left(2\frac{\nu_1+1}{m} - 3\frac{\nu_2}{n}\right)\frac{2}{mn} = 2\left(1+\frac{1}{m}\right) - 3\left(1-\frac{1}{n}\right);$$

$$S(f, \lambda_{mn}, \{\vec{\xi}(\nu_1, \nu_2)\}) = \sum_{\nu_1=0}^{m-1}\sum_{\nu_2=0}^{n-1}\left(2\frac{\nu_1+1}{m} - 3\frac{\nu_2+1}{n}\right)\frac{2}{mn} =$$
$$= 2\left(1+\frac{1}{m}\right) - 3\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

2) $L(f, \lambda_{mn}) = L(g, \lambda_m) + 2L(h, \lambda_n)$,
$U(f, \lambda_{mn}) = U(g, \lambda_m) + 2U(h, \lambda_n)$,
$S(f, \lambda_{mn}, \{\vec{\xi}(\nu_1, \nu_2)\}) = S\left(g, \lambda_m, \left\{2\dfrac{\nu_1+1}{m}\right\}\right) + 2S\left(h, \lambda_n, \left\{\dfrac{\nu_2+1}{n}\right\}\right)$.
3) $L(f, \lambda_{mn}) = L(g, \lambda_m)\cdot L(h, \lambda_n)$,
$U(f, \lambda_{mn}) = U(g, \lambda_m)\cdot U(h, \lambda_n)$,

$S(f, \lambda_{mn}) = S(g, \lambda_m) \cdot S(h, \lambda_n)$.

XIV.1.4. 1) $\int\limits_0^2 g(x_1)\,dx_1 \cdot \int\limits_0^1 h(x_2)\,dx_2$; 2) **0**, 2.

XIV.1.8. $f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2) - f(b_1, a_2) + f(a_1, a_2)$.

XIV.1.9. Для $1 \leqslant k \leqslant m-1$

$$\int\limits_{a_{k+1}}^{x_{k+1}} \ldots \int\limits_{a_m}^{x_m} f(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_{m-k})\,du_1 \ldots du_{m-k}$$

и $f(x_1, \ldots, x_m)$, $k = m$.

XIV.1.11. $f(0, 0)$.

XIV.1.12. Сначала проверить, что $\theta(n) \to 0$, $n \to \infty$, затем для интеграла в правой части равенства применить теорему о среднем значении. Предел равен

$$\frac{1}{f(0, 0)} \int\limits_{[0,1]^2} f(\vec{x})\,d\vec{x}.$$

XIV.1.13.

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 (f(x_1, 1) - f(x_1, 0))\,dx_1 + \int\limits_0^1 (f(1, x_2) - f(0, x_2))\,dx_2\right).$$

XIV.1.14. Сначала рассмотреть случай функции $f(x_1, x_2) = x_1^k x_2^m$, $\{k, m\} \subset \mathbf{N}$. Затем использовать теорему Вейерштрасса о равномерном приближении многочленами. Предел равен $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Подробное решение этой и следующей задачи см. в статье: Решения задач, опубликованных в сборнике «Математика сегодня», 1983 г. // Математика сегодня.— К., 1986.— С. 200, 201.

XIV.1.15. Использовать теорему Вейерштрасса о равномерном приближении многочленами. Предел равен $f(0)$. Возможно другое доказательство, использующее методы теории вероятностей. Пусть $\{\xi_n : n \geqslant 1\}$ — последовательность независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных велнчин. Тогда

$$\mathbf{M} \ln \xi_1 = \int\limits_0^1 \ln x\,dx = -1$$

в, согласно усиленному закону больших чисел,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k \to -1, \quad n \to \infty,$$

с вероятностью 1. Отсюда следует, что

$$\prod_{k=1}^{n} \xi_k \to 0, \quad n \to \infty,$$

с вероятносгью 1, а потому, согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\mathbf{M} f\left(\prod_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to f(0), \quad n \to \infty.$$

XIV.1.16. $F'(t) = \int\limits_0^t f(x_1, t)\,dx_1 + \int\limits_0^t f(t, x_2)\,dx_2$, $t \in [0, 1]$.

XIV.1.17. Использовать правило Лопиталя. Предел равен $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)$.

XIV.1.18. $\frac{\pi}{2}$. XIV.1.19. $\frac{1}{2}$. XIV.1.20. $\frac{k}{m}$.

XIV.1.21. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$.

§ 3

XIV.3.1. $\frac{2a^5}{15}$. XIV.3.2. $F'(t)=\int\limits_0^t f(t-u,\ u)\,du,\quad t\geqslant 0$.

XIV.3.3. $F'(t)=\int\limits_t^{t+1} f(u,\ t+(u-t)(1-u+t))(2u-2t-1)\,du-$

$$\int\limits_t^{t+1} f(u,\ t)\,du,\quad t\geqslant 0.$$

XIV.3.5. Рассмотреть соответствующий двойной интеграл и представить его через однократные, изменив порядок интегрирования по сравнению с заданным.

Значения интегралов: 1) $\frac{8}{15}$; 2) $\frac{2}{15}$. 3) 2; 4) $\frac{\sin 1}{12}$; 5) $\frac{\pi-2}{2}$.

XIV.3.6. 1) $\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{\arcsin x_2}^{2\pi+\arcsin x_2} f(x_1,\ x_2)\,dx_1\right)dx_2$;

$$2)\ \int\limits_{-2}^{-1}\left(\int\limits_{-\sqrt{4-x_2^2}}^{\sqrt{4-x_2^2}} f(x_1,\ x_2)\,dx_1\right)dx_2+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-\sqrt{4-x_2^2}}^{1-\sqrt{1-x_2^2}} f(x_1,\ x_2)\,dx_1+\int\limits_{1+\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{4-x_2^2}} f(x_1,\ x_2)\,dx_1\right)dx_2+$$

$$+\int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{-\sqrt{4-x_2^2}}^{\sqrt{4-x_2^2}} f(x_1,\ x_2)\,dx_1\right)dx_2.$$

XIV.3.7. $\frac{1}{a+b+2}B(a+1,\ b+1)$.

XIV.3.8. 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{3^4\cdot 2}$; 3) $\frac{1}{k!}$.

XIV.3.9. 1) Интеграл равен интегралу по множеству $\{(x_1, \ldots, x_k) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant t\}$ от функции $\varrho(x_1, \ldots, x_k) = f(x_k)$. Чтобы получить правую часть, нужно изменить порядок интегрирований: сначала проинтегрировать по x_1, затем по x_2 и т. д. Второе решение следует из того, что производная по t левой части равна

$$f(t)\,\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

2) заметить, что левая часть как значение k-кратного интеграла равна

$$\frac{1}{k!}\int\limits_{[0,t]^k}\prod_{j=1}^{k} f(x_j)\,dx_j.$$

Второе решение получим, вычислив производную левой части и применив метод математической индукции по k.

XIV.3.11. $\frac{8}{3}\pi + 4\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

§ 4

XIV.4.1. 1) $\frac{2^6}{15}$; 2) $\pi - \sqrt{3} - \frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi^2}{6}(7\pi - 3\sqrt{3})$. Перейти к полярным координатам.

XIV.4.2. $\frac{\pi \ln 2}{4}$. **XIV.4.3.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4(1-a)}$.

XIV.4.4. $F'(t) = 30t^3$.

XIV.4.5. $F'(t) = t\int\limits_0^{2\pi} f(t\cos\varphi,\ t\sin\varphi)\,d\varphi, \quad t \geqslant 0.$

XIV.4.6. Доказать сначала, что

$$F(t) = \frac{3}{2}\,t^2(\operatorname{arctg} 2t - \operatorname{arctg} t), \qquad t \geqslant 1.$$

XIV.4.7. πt^4.

XIV.4.8. 1) $\frac{1}{2a}(e^a - 1)$ при $a \neq 0$ и $\frac{1}{2}$ при $a = 0$. Перейти к новым переменным $u_1 = x_1$, $u_2 = x_1 + x_2$;

2) 2. Перейти к новым переменным $u_1 = x_1x_2$, $u_2 = \frac{x_2}{x_1}$;

3) $\frac{1}{2}$. Перейти к новым переменным $u_1 = x_1^2 + x_2^2$, $u_2 = x_1^2 - x_2^2$;

4) $\frac{3}{2} + \frac{14\ln 2}{3}$. Перейти к новым переменным $u_1 = x_1^2 - x_2^2$, $u_2 = x_1x_2$.

XIV.4.9. $\int\limits_A f(u_1,\ u_1^2u_2)\,u_1^2\,du_1\,du_2, \quad A = [1,\ 2] \times [1,\ 4]$.

XIV.4.10. $\frac{\pi^2}{4}$. Перейти к новым переменным r_1, φ_1, r_2, φ_2: $x_1 = r_1 \cos\varphi_1$, $x_2 = r_1 \sin\varphi_1$, $x_3 = r_2 \cos\varphi_2$, $x_4 = r_2 \sin\varphi_2$.

XIV.4.11.

$$F'(t) = r^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi\cos\psi,\ r\sin\varphi\cos\psi,\ r\sin\psi)\cos\psi d\psi \right) d\varphi \Big|_{r=t}^{r=t+1}.$$

XIV.4.12. 1) $\frac{1}{k!}$ Перейти к новым переменным $u_i = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $u_k = x_1 + \cdots + x_k$; 2) $\frac{1}{(k+a)(k-1)!}$.

§ 5

XIV.5.1. Сходится при $a > 1$ и расходится при $a \leqslant 1$.

XIV.5.2. Сходится при $a < 1$ и расходится при $a > 1$.

XIV.5.3. 1) Сходится, если $a > 1$ и $b > 1$, расходится в остальных случаях; 2) сходится при $a > 1$ и расходится при $a \leqslant 1$. Использовать новые переменные: $x_1 + \frac{1}{2} = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$; 3) сходится при $a > b > 1$; 4) сходится при $a > \frac{1}{2}$. Перейти к новым переменным: $x_1 = r\sqrt{\cos\varphi}$, $x_2 = r\sqrt{\sin\varphi}$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$.

XIV.5.4. 1) Расходится. Рассмотреть последовательности множеств

$$D_n' = \{(x_1,\ x_2)\ \mid\ |x_1| \leqslant n,\ \ |x_2| \leqslant n\},$$

$$D_n'' = \{(x_1,\ x_2)\ \mid\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2\pi n\};\quad n \geqslant 1;$$

2) расходится.

XIV.5.5. 1) π; 2) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

XIV.5.6. 1) $\frac{\pi}{4}\Gamma(a+1)$; 2) $\frac{\pi}{4a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)$; 3) $\frac{\pi}{4a}\Gamma\left(\frac{3}{2a}\right)$; 4) $\frac{\pi}{4} B(a+1,\ b+1)$. Заметим, что интеграл этой задачи не является простым несобственным интегралом, поскольку каждая точка множества A, лежащая на окружности радиуса 1 с центром в (0, 0), возможно, является особой. Предложенный интеграл можно понимать как предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{A(\varepsilon)} (x_1^2 + x_2^2)^a (1 - x_1^2 - x_2^2)^b\, dx_1 dx_2,$$

где $A(\varepsilon) = \{(x_1,\ x_2)\ \mid\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 - \varepsilon\}$. Формула замены переменных доказывается с помощью предельного перехода;

5) $\Gamma(a+1)$; 6) $\Gamma(a+2)$; 7) $\frac{B(a+1,\ b+1)}{a+b+2}$; 8) $\frac{B(a+1,\ b+1)}{a+b+2}$;

9) $\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}$; 10) $\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}$.

Глава XV

§ 1

XV.1.1. 1) $+1$; 2) -1; 3) -1; 4) $+1$; 5) -1.

XV.1.3. 1) На множестве $\vec{g}^{-1}(G)$ форма равна

$$\omega = f(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x_1, x_2)} dx_1 \wedge dx_2;$$

2) $\omega = (1 - x_2^{-1} - x_2^{-\frac{3}{2}})\, dx_2$ на луче $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 1, \quad x_2 > 0\}$.

3) $\omega = -\frac{x_1 + x_2}{2} dx_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} dx_2$ на окружности $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 2\}$.

XV.1.11. 1) $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2;$

2) $d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 +$

$+ \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2;$

3) $d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3;$

4) $d\omega = 0;$

5) $d\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{(m-1)(j-1)} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m;$

6) $d\omega = \left(f_1 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_j^2} - f_2 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j^2}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m.$

§ 2

XV.2.1. 1) $\frac{9}{2}$; 2) $-\frac{27}{2}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) -4; 5) $2\pi + \frac{8}{3}$; 6) $-\frac{1}{6}$.

XV.2.2. $f'(t) = 2t^2, \quad t > 0$.

XV.2.3. 1) $-\frac{1}{6}$; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) $-\pi$.

XV.2.4. $f'(t) = 2\pi t^2$.

XV.2.7. 1) 0; 2) $-\pi a_1 a_2$; 3) 0.

XV.2.8. 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{28}{3}\pi$.

XV.2.11. 0. XV.2.12. 0.

XV.2.13. 0. Использовать формулу Стокса.

XV.2.14. 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) да; 7) нет; 8) да.

XV.2.15. 2) $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 x_2 + C, \quad C \in \mathbf{R}$; 4) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_3 +$ ($C \in \mathbf{R}$; 6) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} + C, \quad C \in \mathbf{R}$;

3) $f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1} + C, \quad C \in \mathbf{R}.$

8) $f(x_1, x_2, x_3) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} + C, \quad C \in \mathbf{R}.$

XV.2.16. 2π. **XV.2.17.** Пусть r — радиус сферы и

$$\omega_1 = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Имеем, очевидно,

$$\int\limits_S \omega = \frac{1}{r^3}\int\limits_S \omega_1.$$

Согласно формуле Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_S \omega_1 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

откуда следует нужный результат (обратим внимание на то, что к форме ω и поверхности S формула Гаусса — Остроградского непрнменима).

XV.2.18. $f(x_1, x_2) = x_1 \sin x_2^2 + C, \quad C \in \mathbf{R}.$

XV.2.19. $f(x_1, x_2, x_3) = \sum\limits_{k=1}^{3} \int\limits_0^{x_k} f_k(u)\, du + C, \quad C \in \mathbf{R}.$

XV.2.20. $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,$ то есть функция f не должна зависеть от x_2, x_3.

§ 3

XV.3.1. 1) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$;

2) $\dfrac{1}{2}(2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}))$;

3) $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

XV.3.2. 1) $\dfrac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$; 2) $2\pi r^2\left(1 - \dfrac{r_0}{r}\right)$;

3) $\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.

XV.3.3. 1) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2} + \dfrac{13\sqrt{2}}{4}$; 2) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$;

3) $\dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{12}\left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right)$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$; 5) $\dfrac{2\sqrt{2} - 1}{2}$;

6) $\dfrac{1}{3}\left((1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$; 7) $2\pi^2 b\sqrt{a^2 + b^2}$.

XV.3.4. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{120}$; 2) $\dfrac{32}{3}$; 3) $\dfrac{3\pi}{2}$; 4) $\dfrac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

Глава XVI

§ 1

XVI.1.1. 1) $3(\alpha+\beta)+2\alpha\beta=-6$; 2) при любых; 3) $m=2(k+l)$, $n=2(k-l)$, $\{k, l\}\subset \mathbf{N}\cup\{0\}$.

4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k=0$.

XVI.1.4. Сначала заметить, что f ортогональна на $[a, b]$ к любому многочлену. Для любого $\varepsilon>0$, согласно теореме Вейерштрасса, существует многочлен P_ε такой, что

$$\forall t\in[a, b]\ :\ |f(t)-P_\varepsilon(t)|<\varepsilon.$$

Для многочлена P_ε имеем

$$\int\limits_a^b f^2(t)\,dt=\int\limits_a^b f(t)(f(t)-P_\varepsilon(t))\,dt\leqslant\varepsilon\int\limits_a^b|f(t)|\,dt.$$

XVI.1.5. Решение аналогично решению прелыдущей задачн.

XVI.1.9. 1) $1,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,t,\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2-1)$; 2) $1,\ \sqrt{3}(2t-1),\ 6\sqrt{5}\times\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)$.

XVI.1.11. Аксиомы метрики проверяются непосредственно. Пусть $[a, b]=[0, 1]$ н $f_n(t)=0$, $t\in\left[0, \frac{1}{n}\right]$ и $f_n(t)=t^{-\frac{1}{4}}$, $t\in\left(\frac{1}{n}, 1\right]$ для $n\geqslant 1$. Последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна и не имеет предела в $\mathbf{R}([0, 1])$.

XVI.1.12 Совпадает во всех точках непрерывности с функцией $f^*(t)=\alpha_0+\alpha_1\cos t+\beta_1\sin t$, $t\in[0, 2\pi]$. Действительно,

$$\int\limits_0^{2\pi}(f(t)-a-b\cos t-c\sin t)^2\,dt\geqslant\int\limits_0^{2\pi}(f(t)-P^*(t))^2\,dt,$$

где

$$P^*(t)=\left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)+\left(f, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}}\right)\cos t+\left(f, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}}\right)\sin t,\quad t\in[0, 2\pi].$$

XVI.1.13. $f(t)=a+bt$, $t\in[0, 1]$; $\{a, b\}\subset\mathbf{R}$.

XVI.1.14. $T_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{k}$, $t\in[0, 2\pi]$.

XVI.1.15. Проверить, что фуикцни $t\to\cos kt$, $k=0, 1, 2$, попарно ортогональны на $[0, 3\pi]$. Поэтому для искомого многочлена

$$\alpha_k=\left(\int\limits_0^{3\pi}\cos^2 kt\,dt\right)^{-1}\int\limits_0^{3\pi}f(t)\cos kt\,dt,\quad k=0, 1, 2.$$

XVI.1.16. Для минимизирующего многочлена

$$\beta_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}t\sin kt\,dt=(-1)^{k+1}\frac{2}{k},\quad k\geqslant 1.$$

Для нечетной функции $[-\pi, \pi] \ni t \mapsto t$ определить тригонометрический многочлен степени n, приближающий ее наилучшим образом в смысле среднего квадратичного расстояния.

XVI.1.17. 1) Утверждение равносильно теореме Вейерштрасса о равномерном приближении многочленами непрерывной функции; 2) сначала доказать, что

$$\forall f \in \mathbf{R}([a, b]) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g_\varepsilon \in \mathbf{C}([a, b]) \quad : \quad \int_a^b (f(t) - g_\varepsilon(t))^2\, dt \leqslant \varepsilon^2,$$

а затем использовать утверждение 1).

XVI.1.18. 1) Утверждение равносильно теореме Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной периодической функции тригонометрическими многочленами; 2) см. указание к задаче XVI.1.17.

XVI.1.20. Пусть $\{f_n\colon\ n \geqslant 1\}$ — замкнутая последовательность и функция $f \in \mathbf{R}([a, b])$ такова, что

$$(f, f_n) = \int_a^b f(t) f_n(t)\, dt = 0, \quad n \geqslant 1.$$

Поскольку $\{f_n\colon\ n \geqslant 1\}$ замкнута, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sum_{k=1}^{N} a_k f_{n(k)} \quad : \quad \left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k f_{n(k)} \right\| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2(t)\, dt = \int_a^b f(t) \left(f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k f_{n(k)}(t) \right) dt \leqslant \|f\| \cdot \left\| f - \sum_{k=1}^{N} a_k f_{n(k)} \right\| < \varepsilon \|f\|.$$

Таким образом, $\|f\| = 0$.

XVI.1.21. 1) Из теоремы Вейерштрасса о приближении многочленами следует, что для четной на отрезке $[-b, b]$ функции существует четный многочлен, приближающий ее равномерно с заданной точностью. Заданную функцию из $\mathbf{R}([a, b])$ продолжить на отрезок $[-b, b]$ четным образом, положив равной 0 на $(-a, a)$ при $a > 0$; 2) воспользоваться неравенством

$$\int_a^b \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^{3+k} \right)^2 dt \leqslant b^6 \int_a^b \left(t^{-3} f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \right)^2 dt, \quad \{a_0, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R};$$

3) воспользоваться равенством

$$\int_a^b \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^{3k} \right)^2 dt = \int_{a^3}^{b^3} \left(f(\sqrt[3]{u}) - \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \right)^2 \frac{du}{3u^{\frac{2}{3}}};$$

4), 5) аналогично случаю 3); 6), 7) см. указание к 1).

XVI.1.22. 1) Для любой нечетной на $[-1, 1]$ функции $f \in \mathbf{R}([-1, 1])$, имеем

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, t^{2n} dt = 0, \quad n = 0, 1, \ldots;$$

2) аналогично 1); 3) использовать равенства для $f \in \mathbf{R}([0, 3\pi])$

$$\int_0^{3\pi} f(t) \cos nt dt = \int_0^{2\pi} (f(t) + f(t + 2\pi)\, \chi_{[0,\pi]}(t)) \cos nt dt, \quad n \geqslant 0;$$

$$\int_0^{3\pi} f(t) \sin nt dt = \int_0^{2\pi} (f(t) + f(t + 2\pi)\, \chi_{[0,\pi]}(t)) \sin nt dt, \quad n \geqslant 1,$$

а также полноту данной последовательности в $\mathbf{R}([0, 2\pi])$.

XVI.1.23. 1) Учесть замкнутость последовательности в $\mathbf{R}$ ([0, π]) и записать равенство Парсеваля для функции $f(t) = t$, $t \in [0, \pi]$; 2) аналогично рассмотреть функцию

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ 0, & t \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

XVI.1.24. См. указание к задаче XVI.1.23.

§ 2

XVI.2.1. Ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},$$

ряд сходится на $\mathbf{R}$ и его сумма s равна

$$s(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi); \\ 0, & x \in \{-\pi, 0, \pi\}. \end{cases}$$

Равенство из условия задачи равносильно равенству $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Равенство Парсеваля имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

XVI.2.2. Ряд Фурье

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

сходится на $\mathbf{R}$ и имеет сумму

$$s(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi); \\ \dfrac{1}{2}, & x \in \{0, -\pi, \pi\}. \end{cases}$$

Равенство Парсеваля

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

XVI.2.3. Ряд Фурье имеет вид

$$\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \cos nx,$$

сходится на $\mathbf{R}$ к сумме

$$s(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi, -\alpha) \cup (-\alpha, \alpha) \cup (\alpha, \pi]; \\ \dfrac{1}{2}, & x \in \{-\alpha, \alpha\}. \end{cases}$$

Равенство 1) следует из равенства Парсеваля, а равенство 2) — из 1) и XVI.1.23, 1).

XVI.2.4. Ряд Фурье имеет вид

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},$$

сходится на $\mathbf{R}$ к сумме

$$s(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi,\ \pi);\\ 0, & x=\pi.\end{cases}$$

Равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

откуда снова получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

XVI.2.5. Использовать ряд задачи XVI.2.4. Ряд имеет вид

$$\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

XVI.2.6. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$;

$$\frac{\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

XVI.2.7. 1) Заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}+\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4},$$

и воспользоваться результатом задачи XVI.1.24. Сумма равна $\frac{\pi^4}{90}$; 2) заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2},$$

и использовать результат задачи XVI.1.23. Сумма равна $\frac{\pi^2}{12}$; 3) $\frac{7\pi^4}{720}$. Аналогично 2).

XVI.2.9. Следствие равенства Парсеваля и неравенства Коши.

XVI.2.11. Оценить остаток ряда с помощью неравенств из XVI.2.10.

XVI.2.13. Достаточно доказать только утверждение 1). Пусть

$$s_n(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k(f)\cos kx$$

— n-я частичная сумма ряда Фурье для f

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\left(s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)\right).$$

Из представления

$$\sigma_n(0) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2u)\frac{\sin^2 nu}{\pi n \sin^2 u}\,du, \quad n \geqslant 1,$$

следует ограниченность последовательности $\{\sigma_n(0) \ : \ n \geqslant 1\}$. Кроме того,

$$s_n(0) \leqslant \frac{1}{n}(s_n(0) + s_{n+1}(0) + \cdots + s_{2n-1}(0)) \leqslant 2\sigma_{2n}(0), \quad n \geqslant 1.$$

XVI.2.14. 1) $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi];$

2) $x^3 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(2\pi^2 - \dfrac{12}{n^2}\right)\dfrac{\sin nx}{n}, \quad x \in (-\pi, \pi).$

XVI.2.16. Заметить, что $f(\pi) = 0$, $f'(\pi) = -\dfrac{\pi^2}{12}$;

$$f(x) = \frac{1}{12}((x-\pi)^3 - \pi^2(x-\pi)), \quad x \in (0, 2\pi).$$

XVI.2.17. К предложенному ряду георема о почленном дифференцировании не применима. Используем так называемый **принцип выделения особенности:**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^4+1}\,\frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n^4+1)}.$$

Согласно XVI.2.5,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi),$$

следовательно, $g \in C^{\infty}((0, 2\pi))$. К ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n^4+1)}, \quad x \in \mathbf{R},$$

применима теорема о почленном дифференцировании. Получим

$$f^{(IV)}(x) = -f(x), \quad x \in (0, 2\pi).$$

XVI.2.18. См. задачу XVI.2.9.

XVI.2.19. Пусть s — сумма ряда Фурье. Доказать, что 1) $s \in C(\mathbf{R})$;

2) $\int\limits_0^x f(u)\,du = \int\limits_0^x s(u)\,du, \quad x \in \mathbf{R}.$

XVI.2.20. 1) $\dfrac{1}{2}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Использовать лемму Римана;

2) 0; 3) $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Использовать разложение в ряд Фурье функции φ, почленное интегрирование, предельный переход и лемму Римана.

XVI.3.1. 1) $\dfrac{\sin\lambda a}{\lambda a}$ 2) $\dfrac{1}{1+i\lambda}$; 3) $\dfrac{a^2}{a^2+\lambda^2}$; 4) $e^{-|\lambda|}$; 5) $e^{ia\lambda-\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2}$.

XVI.3.2. Использовать формулу обращения для XVI.3.1, 3)—5). В 4) сначала продолжить на **R** правую часть до четной на **R** функции.

XVI.3.3. Пусть g — четная на **R** функция такая, что при $x \geqslant 0$ $g(x) = f(x)$. Тогда

$$\hat{g}(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \frac{2}{1+\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Согласно формуле обращения, имеем

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\hat{g}(\lambda)\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda, \quad x \in \mathbf{R}.$$

С учетом XVI.3.2, 1) получаем

$$g(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

XVI.3.4. Пусть g — четная на **R** функция такая, что при $x \geqslant 0$ $g(x) = f(x)$. Тогда

$$\hat{g}(\lambda) = 2\,\frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2} = 4\,\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

а согласно формуле обращения

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda x\hat{g}(\lambda)\,d\lambda = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda.$$

Далее см. XVI.3.2, 4). Поэтому

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0, 1]; \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

XVI.3.5. Имеем $\hat{f}(\lambda) = 2\,\dfrac{\sin\lambda}{\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Согласно формуле обращеняя, для $x \in (-1, 1)$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\,\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x d\lambda = 1,$$

откуда при $x = 0$ получаем

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

XVI.3.6. Функцию из правой части равенства продолжить до четной на **R** функции и рассмотреть ее преобразование Фурье.

XVI.3.9. Проинтегрировать по частям.

XVI.3.10. $\hat{g}(\lambda) = \begin{cases} (1-|\lambda|)\hat{f}(\lambda), & \lambda \in [-1, 1]; \\ 0, & |\lambda| > 1. \end{cases}$

XVI.3.11. $f(x)$. Эта задача содержит в простой форме важную идею. См.: Ахиезер Н. И. Лекции об интегральных преобразованиях.— Харьков : Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984.— 120 с.

§ 4

XVI.4.1. Нет. Да.

XVI.4.2. Сначала проверить, что достаточно рассмотреть случай, когда функции f_n, $n \geqslant 1$, неотрицательны на $[0, +\infty)$. Затем для неотрицательных функций f_n, $n \geqslant 1$, при любом $r > 0$ имеем

$$\int_0^r \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^r f_n(t)\, dt \qquad (1)$$

в силу теоремы о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда. Ряд в правой части (1) сходится равномерно по $r \in [0, +\infty)$ согласно признаку Вейерштрасса, а потому по теореме о предельном переходе

$$\lim_{r \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^r f_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt.$$

XVI.4.8. Сначала проверить, что

$$f^{\alpha}(x) \to 1, \quad \alpha \to 0$$

равномерно на $[0, 1]$. Затем использовать правило Лопиталя

$$\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)} = \left(\int_0^1 f^{\alpha}(x)\, dx\right)^{-1} \int_0^1 f(x)^{\alpha} \ln f(x)\, dx \to \int_0^1 \ln f(x)\, dx, \quad \alpha \to 0.$$

Обосновать дифференцирование и предельный переход под знаком интеграла.

XVI.4.9. Доказательство основано на следующих утверждениях:

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad n^{\frac{1}{\alpha}} \int_{\varepsilon}^{1} (1 - x^{\alpha} \cos x)^n\, dx \to 0, \quad n \to \infty;$

(ii) $\forall x \in [0, \varepsilon]\ (\varepsilon \in (0, 1)) \qquad \cos \varepsilon \leqslant \cos x \leqslant 1;$

(iii) $\forall \{\varepsilon, \delta\} \subset (0, 1), \quad \varepsilon < \delta$:

$$n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\varepsilon} (1 - \delta x^{\alpha})^n\, dx \to \delta^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad n \to \infty.$$

Доказательство (iii) состоит в следующем:

$$n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\varepsilon} (1 - \delta x^{\alpha})^n\, dx = \left| \begin{array}{l} \delta x^{\alpha} = u, \quad x = \left(\frac{u}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ dx = \frac{1}{\alpha\delta}\left(\frac{4}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha} - 1} \end{array} \right| = \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha\delta^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} (1 - u)^n u^{\frac{1}{\alpha} - 1}\, du$$

откуда

$$\lim_{n \to \infty} \left(n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\varepsilon} (1 - \delta x^{\alpha})^n\, dx\right) = \frac{1}{\alpha\delta^{\frac{1}{\alpha}}} \lim_{n \to \infty} \left(n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^1 (1 - u)^n u^{\frac{1}{\alpha} - 1}\, du\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha\delta^{\frac{1}{\alpha}}} \lim_{n \to \infty} \left(n^{\frac{1}{\alpha}} B\left(n + 1, \frac{1}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \delta^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

XVI.4.10. $\pi \int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

XVI.4.11. $\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 (f(1, y) - f(0, y))\,dy + \int\limits_0^1 (f(x, 1) - f(x, 0))\,dx\right)$.

XVI.4.12. Сначала показать, что $\theta(n) \to 0$, $n \to \infty$, затем воспользоваться теоремой о среднем значении. Предел равен

$$\left(\frac{1}{\pi f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int\limits_{[0,1]^2} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

XVI.4.13. $\frac{k}{n}\left(\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right)^n$

XVI.4.14. Заметить, что

$$\int\limits_{[0,1]^n} \min(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1}^n f(x_j)\,dx_j = n! \int\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1} x_1 \prod_{j=1}^n f(x_j)\,dx_j =$$

$$= n! \int\limits_0^1 x_1 f(x_1)\left(\int\limits_{x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1} \prod_{j=2}^n f(x_j)\,dx_j\right) dx_1 =$$

$$= n! \int\limits_0^1 x_1 f(x_1) \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{[x_1,1]^n} \prod_{j=2}^n f(x_j)\,dx_j dx_1 =$$

$$= n \int\limits_0^1 x_1 f(x_1)\left(\int\limits_{x_1}^1 f(u)\,du\right)^{n-1} dx_1 = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x_1}^1 f(u)\,du\right)^n dx_1.$$

XVI.4.17. Сначала перейти к полярным координатам, а затем к интегралу по отрезку $[n-1, n]$, применить теорему о среднем значении, $n \geqslant 1$.

XVI.4.18. $\pi\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)$.

XVI.4.19. Сделать замену переменных и воспользоваться теоремой о среднем значении.

XVI.4.20. Воспользоваться неравенством

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

XVI.4.21. Перейти к новым переменным с помощью ортогонального преобразования, приводящего A к диагональному виду.

XVI.4.22. Использовать неравенство Коши.

XVI.4.24. Заметить, что равенства (II) можно записать в виде

$$\int\limits_0^{2\pi} (f(x) + f(2\pi + x)\,\chi_{[0,\pi]}(x)) \cos nx\,dx = \int\limits_0^{2\pi} (f(x) + f(2\pi + x)\,\chi_{[0,\pi]}(x)) \sin nx\,dx = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi} (f(x) + f(2\pi + x)\,\chi_{[0,\pi]}(x))^2\,dx = 0,$$

а потому f в точках непрерывности совпадает с учетом (1) с функцией

$$g(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,\ \pi);\\ 0, & x\in(\pi,\ 2\pi);\\ -(x-2\pi)^2, & x\in(2\pi,\ 3\pi).\end{cases}$$

XVI.4.25. 1) Проинтегрировать почленно степенной ряд для подынтегральной функции и воспользоваться равенством XVI.2.7, 2); 2) аналогично 1).

XVI.4.26. 1) Пусть $z=\cos x+i\sin x$, $x\in\mathbf{R}$, тогда $z=e^{ix}$, $z^n=e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$.

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin nx=\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^n\right)=\operatorname{Im}\frac{1}{1-az}=$$

$$=\operatorname{Im}\frac{1-a\bar z}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2},\quad x\in\mathbf{R}.$$

Аналогично

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx=\frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2},\quad x\in\mathbf{R};$$

2) аналогично 1). Сумма ряда равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=e^{\cos x}\sin(\sin x),\quad x\in\mathbf{R};$$

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cos(\sin x),\quad x\in\mathbf{R};$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n\frac{\sin nx}{n!}=e^{a\cos x}\sin(a\sin x),\quad x\in\mathbf{R}.$

XVI.4.27. Проинтегрировать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad x\in(0,\ 2\pi),$$

см. XVI.2.5. 1) $\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{\pi x}{2}+\dfrac{x^2}{4}$, см. также XVI.2.4;

2) $\dfrac{\pi^2x}{6}-\dfrac{\pi x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}$; 3) $\dfrac{\pi^4}{90}-\dfrac{\pi^2x^2}{12}+\dfrac{\pi x^3}{12}-\dfrac{x^4}{48}$,

см. также XVI.2.7.

XVI.4.32. $\pi^2\,|A_m|$, где

$$|A_m|:=\max\{|A_n|\,|n\geqslant 0\}.$$

Максимум достигается, например, для функции

$$f(x)=\cos mx,\quad x\in\mathbf{R}.$$

XVI.4.33. С помощью равенства Парсеваля получить представление

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\,dx+\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,dx=$$

$$= \frac{(a_0(f) - a_0(g))^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(a_k(f) \sqrt{1+\lambda k^2} - \frac{a_k(g)}{\sqrt{1+\lambda k^2}} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda k^2}{1+\lambda k^2} a_k^2(g) + \left(b_k(f) \sqrt{1+\lambda k^2} - \frac{b_k(g)}{\sqrt{1+\lambda k^2}} \right)^2 + \frac{\lambda k^2}{1+\lambda k^2} b_k^2(g) \right).$$

Минимальное значение равно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda k^2}{1+\lambda k^2} \left(a_k^2(g) + b_k^2(g)\right)$$

и достигается на функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k(g)}{1+\lambda k^2} \cos kx + \frac{b_k(g)}{1+\lambda k^2} \sin kx \right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

XVI.4.36. Совпадает на $[0, 1]$ с функцией

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{c_n(g)}{1 + 4\pi^2 n^2} e^{2\pi i n x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Заметим, что $\tilde{f} \in C^3(\mathbf{R})$.

XVI.4.37. $\mathscr{D} = \left\{ f \in \mathbf{R}([0, 2]) \;\middle|\; \int_0^1 (f(x) + f(1+x))^2 \, dx = 0 \right\},$

$f^*(x) = \frac{1}{2}$, $x \in [0, 1]$ и $f^*(x) = -\frac{1}{2}$, $x \in (1, 2]$. Минимум равен $\frac{13}{6}$.