

Examen de la session Ordinaire (DEUX pages)

Exercice 0 :

- 1) COMMENCER par inscrire votre numéro de table sur la copie et éteindre le PORTABLE !
- 2) L'énoncé étant clair, Vous êtes priés de ne poser aucune question .
- 3) Toute réponse non justifiée de façon rigoureuse sera considérée comme fausse...
- 4) Pour traiter une question, on peut admettre les résultats des questions précédentes.

Exercice 1 :

On considère la fonction f , à variable réelle, définie par

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)(1+x^2)}$$

1. Expliquer pourquoi f admet une primitive, que l'on notera F , sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
2. Décomposer la fraction rationnelle $f(x)$ en éléments simples.
3. En déduire $F(x)$.

Soit (EC) l'équation différentielle suivante :

$$xy' = y + \frac{2x^2}{(x-1)(1+x^2)}$$

4. Dire pourquoi l'équation (EC) admet des solutions sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
5. Résoudre l'équation incomplète $xy' = y$.
6. Proposer une solution particulière y_p de l'équation complète (EC) .
7. En déduire la solution générale y_g de l'équation (EC) .

Exercice 2 :

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 x^2 \ln(x) dx$ est convergente.
2. Calculer sa valeur.

Tournez la page s'il vous plaît

Exercice 3 :

Soient f, g et h trois fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$, par

$$f(x) = 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1$$

$$g(x) = x$$

$$h(x) = x \text{ si } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 1$$

1. En utilisant le critère d'intégrabilité de Cauchy, montrer que f est intégrable sur $[0, 1]$.
2. Montrer que f n'a pas de primitive sur $[0, 1]$.

On pourra se servir, sans le démontrer, du théorème suivant :

Si F est une fonction réelle dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} , alors

$$(\forall (a, b) \in F'(I)^2) \left(a < b \implies (\forall c \in]a, b[) (\exists x \in I) : F'(x) = c \right)$$

3. Donner une primitive de g sur l'intervalle $[0, 1]$.
4. Vérifier que

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad h(x) = g(x) + f(x)$$

5. En déduire que la fonction h n'a pas de primitive sur $[0, 1]$.

Exercice 4 :

On rappelle la règle d'Abel, sur la convergence d'une intégrale généralisée :

Si f est une application continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ telle que

$$(\exists M \geq 0) : (\forall x \in [1, +\infty[) \left| \int_1^x f(t) dt \right| \leq M$$

Et si g est une application de classe C^1 et décroissante sur $[1, +\infty[$ avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

ALORS, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ est convergente.

1. Vérifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ est convergente.

2. Montrer que

$$(\forall x > 0) \quad |\cos(x)| \geq (\cos(x))^2$$

3. En déduire que

$$(\forall x > 0) \quad 2|\cos(x)| \geq 1 + \cos(2x)$$

4. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{x} dx$ est divergente.