

حلول الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2017
مادة الرياضيات - شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

التمرين الأول :

<p>1- أ- لتكن : $ax + by + cz + d = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) وبما أن : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) فإن : $a=1$ و $b=0$ و $c=-1$ ومنه معادلة المستوى (P) تصبح : $x - z + d = 0$ وبما أن : المستوى (P) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ فإن : $0 - 1 + d = 0$ أي أن : $d=1$ ومنه فإن : $x - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P).</p>
<p>1- بـ + لنحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى (P) : $x - z + 1 = 0$ لدينا : $d(\Omega, (P)) = \frac{ x_\Omega - z_\Omega + 1 }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ يعني : $d(\Omega, (P)) = \frac{ 0 - (-1) + 1 }{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}}$ أي : $d(\Omega, (P)) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ وبما أن شعاع الفلكة (S) هو : $R = \sqrt{2}$ وأن : $d(\Omega, (P)) = \sqrt{2}$ أي : $d(\Omega, (P)) = R = \sqrt{2}$ فإن : المستوى (P) مماس للفلكة (S).</p> <p>+ لنتحقق من أن النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S)</p> <p>■ لنتحقق من كون $B \in (P)$: $-1 - 0 + 1 = 0$ أي أن : $0 = 0$ إذن : $B \in (P)$</p> <p>■ لنتحقق من كون $B \in (S)$: لدينا مركز الفلكة (S) هو $\Omega(0,1,-1)$ وشعاعها $R = \sqrt{2}$ أي أن : $(S) : (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{2}^2 = 2$ أي أن : $(S) : x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$ ولدينا : $B \in (S)$: $(-1)^2 + (1-1)^2 + (0+1)^2 = 2$ إذن : $B \in (S)$ ومنه فإن : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S).</p>
<p>2- أ- لدينا : المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ وبما أن : $(\Delta) \perp (P)$ فإن : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (P)</p> <p>تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) : $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \\ z = 1 - 1t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ فإن :</p>
<p>2- بـ ولدينا : $d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\ \vec{\Omega A} \wedge \vec{n}\ }{\ \vec{n}\ } = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = R$ ومنه (Δ) مماس للفلكة (S)</p> <p>لدينا : $(S) : x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$ و $C(1,1,0)$ وبما أن : $1^2 + (1-1)^2 + (0+1)^2 = 2$ أي $2 = 2$ فإن : $C \in (S)$</p> <p>ولدينا من جهة أخرى : $(\Delta) : \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \\ z = 1 - 1t \end{cases}$ أي $\begin{cases} 1 = 0 + 1t \\ 1 = 1 + 0t \\ 0 = 1 - 1t \end{cases}$ أي $\begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$ ومنه : $C \in (\Delta)$ وبالتالي (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$</p>
<p>3- + حساب $\vec{OC} \wedge \vec{OB}$</p>

$$\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k} : \text{اذن } \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

+ حساب مساحة المثلث OCB

$$S_{OCB} = 1 : \text{اذن } S_{OCB} = \frac{|\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB}|}{2} = \frac{2}{2}$$

التمرين الثاني :

$$1- \text{ لدينا : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \quad \text{و : } p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{7}$$

$$2- \text{ أ- لدينا : } p(X=16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

ب- 2

القيم التي يأخذها X : $X(\Omega) = \{0, 4, 8, 16\}$

$$\text{لدينا : } p(X=0) = 1 - p(\overline{X=0}) = 1 - \frac{C_6^3}{C_8^3} = 1 - \frac{20}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$

$$\text{و : } p(X=4) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

$$\text{و : } p(X=8) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

$$\text{و : } p(X=16) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28} \quad (\text{حسب نتيجة السؤال السابق})$$

وبالتالي :

$X = x_i$	0	4	8	16
$p(X = x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

التمرين الثالث :

$$1- \text{ أ- لدينا : } (1+i)a = (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1 = \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1) = b$$

$$\text{اذن : } b = (1+i)a$$

$$1- \text{ ب- لدينا : } b = (1+i)a \quad \text{يعني : } |b| = |(1+i)a| = |1+i| \times |a| = \sqrt{1^2+1^2} \times \sqrt{3^2+1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{لدينا : } \arg b \equiv \arg[(1+i)a] \equiv \arg(1+i) + \arg(a)$$

$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] : \text{أي أن } 1+i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\arg(a) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] : \text{أي أن } a = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{و :}$$

$$\arg b \equiv \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) [2\pi] \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \quad \text{وبالتالي :}$$

$$1- \text{ ج- لدينا : } b = \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1) \quad \text{و : } |b| = 2\sqrt{2} \quad \text{يعني : } b = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{يعني : } b = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right) \quad \text{وبما أن : } \arg b \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \quad \text{فان : } \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$2- \text{ أ- لدينا : } ia = i(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}i+i^2 = -1+\sqrt{3}i \quad \text{اذن : } c = ia$$

المزيد من الامتحانات مع التصحيح قم بزيارة www.Taalime.ma

$\left\{ \begin{array}{l} c = a \\ \arg \frac{c}{a} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right\} \text{ يعني } \left\{ \begin{array}{l} \left \frac{c}{a} \right = 1 \\ \frac{c}{a} = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \end{array} \right.$	<p>لدينا : $c = ia$ يعني أن : $\frac{c}{a} = i$ يعني أن : $\frac{c}{a} = i$</p> <p>يعني : $\left\{ \begin{array}{l} c - o = a - o \\ \arg \frac{c - o}{a - o} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$ إذن : $\left\{ \begin{array}{l} OA = OC \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$</p>
<p>2-ب تذكران : ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالازاحة T التي متجهتها \overrightarrow{OC}. يعني : $T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow z' - z = c$</p> <p>لدينا : $\text{Aff}(\overrightarrow{OC}) = c = ia$ هو : $\text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = b - a = (1+i)a - a = ia$ هو : $\text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = b - a = (1+i)a - a = ia$</p> <p>إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ أي : $b - a = c$</p> <p>ومنه فإن : النقطة B هي صورة النقطة A بالازاحة التي متجهتها \overrightarrow{OC}.</p>	<p>2-ج لدينا : B هي صورة النقطة A بالازاحة التي متجهتها \overrightarrow{OC} يعني : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$</p> <p>أي أن : $OABC$ متوازي أضلاع</p> <p>وبما أن : $OA = OC$ وان : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ (حسب نتيجة السؤال 2أ)</p> <p>فان : $OABC$ مربع.</p>

المسألة :

<p>I- 1. لدينا : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$ و : $D_g =]0, +\infty[$ و : $1 \in]0, +\infty[$</p> <p>يعني : $g(1) = 1^2 + 1 - 2 + 2 \ln 1$ إذن : $g(1) = 0$</p>	<p>2. ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$ ، يعني : $x \in]0, 1[$ أو $x \in]1, +\infty[$</p> <p>■ إذا كان : $x \in]0, 1[$ لدينا $x \leq 1$ وبما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x) \leq g(1)$</p> <p>ومنه فان : $g(x) \leq 0$ $\forall x \in]0, 1[$</p> <p>■ إذا كان : $x \in]1, +\infty[$ لدينا $x \geq 1$ وبما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x) \geq g(1)$</p> <p>ومنه فان : $g(x) \geq 0$ $\forall x \in]1, +\infty[$</p>
<p>II- 1. لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + (1 - \frac{2}{x}) \ln x$</p> <p>وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{2}{x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$</p> <p>فان : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$</p> <p>بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ فان : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C) على يمين 0.</p>	<p>2. لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + (1 - \frac{2}{x}) \ln x$</p> <p>$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln x - 2 \frac{\ln x}{x}$</p> <p>وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$</p> <p>فان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p>
<p>2-ب لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p>	

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} - 2 \frac{\ln x}{x^2}$
فان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

ولدينا من جهة أخرى : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{2}{x}) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 2 \frac{\ln x}{x}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$

ومنه فان : المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$

3-أ. ليكن x عنصراً من المجال $]0, +\infty[$ ، ولدينا : $f(x) = x + (1 - \frac{2}{x}) \ln x$

اذن : $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + (1 - \frac{2}{x}) \cdot \frac{1}{x}$ يعني : $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + \frac{x-2}{x^2}$

يعني : $f'(x) = \frac{x^2 + x - 2 + 2 \ln x}{x^2}$ اذن : $\forall x \in]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3-ب. لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ و $\forall x \in]0, +\infty[$: $x^2 > 0$

اذن إشارة f' هي نفسها إشارة $g(x)$ لكل $x \in]0, +\infty[$

وحسب نتيجة السؤال (2-1) :

لدينا : $\forall x \in]0, 1[$ $g(x) \leq 0$ ومنه : $\forall x \in]0, 1[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \leq 0$ اذن : f تناقصية على $]0, 1[$

ولدينا : $\forall x \in [1, +\infty[$ $g(x) \geq 0$ ومنه : $\forall x \in [1, +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \geq 0$ اذن : f تزايدية على $[1, +\infty[$

3-ج.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

4-أ. لدينا : $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$ يعني : $\ln x = 0$ أو $1 - \frac{2}{x} = 0$ يعني : $x = 1$ أو $x = 2$

اذن مجموعة حلول المعادلة $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$ على المجال $]0, +\infty[$ هي : $S = \{1, 2\}$

لاحظ ان : $1 \in]0, +\infty[$ وان : $2 \in]0, +\infty[$

4-ب. لدينا : $f(x) = x$ يعني : $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$ يعني : $x = 1$ أو $x = 2$

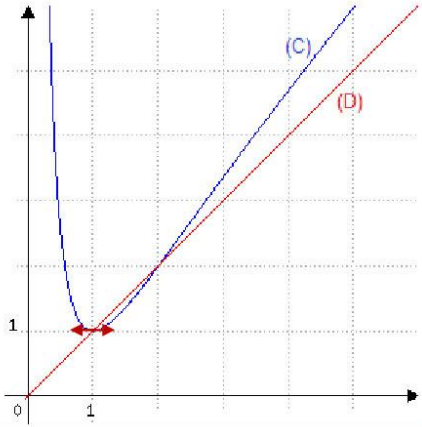
ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين هما : $M(1,1)$ و $N(2,2)$

4-ج. لدينا : $f(x) - x = (1 - \frac{2}{x}) \ln x = \frac{x-2}{x} \cdot \ln x$; $\forall x \in]0, +\infty[$

وبما أن : $\forall x \in [1, 2]$ $\ln x \geq 0$ و $\forall x \in [1, 2]$ $x - 2 \leq 0$ و $\forall x \in [1, 2]$ $x \geq 0$

فان : $\forall x \in [1, 2]$ $\frac{x-2}{x} \cdot \ln x \leq 0$ أي ان : $\forall x \in [1, 2]$ $f(x) - x \leq 0$

وبالتالي فان : $\forall x \in [1, 2]$ $f(x) \leq x$

<p>بما أن : $f(x) \leq x \quad \forall x \in [1,2]$ فإن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[1,2]$</p>	<p>5- تمثيل المنحنى (C) والمستقيم (D) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث : $\vec{i} = \vec{j} = 1cm$</p>
	<p>6- $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \ln x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\ln 2)^2$</p>
<p>6- لدينا : $H(x) = 2 \ln x - x$ و $h(x) = \frac{2}{x} - 1$ لدينا : H دالة متصلة على المجال $]0, +\infty[$ لأنها مجموع دوال متصلة على $]0, +\infty[$ ولدينا : $H'(x) = h(x)$ يعني : $H'(x) = (2 \ln x - x)' = \frac{2}{x} - 1$ اذن : H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0, +\infty[$.</p>	<p>6-ج لدينا : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = \left[(2 \ln x - x) \cdot \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2 \ln x - x}{x} dx = (2 \ln 2 - 2) \cdot \ln 2 - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx + [x]_1^2$ يعني : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = 2(\ln 2)^2 - 2 \ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 = (\ln 2)^2 - 2 \ln 2 + 1$ اذن : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (\ln 2 - 1)^2 = (1 - \ln 2)^2$</p>
<p>6-د لتكن \mathcal{A} مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=2$. لدينا : $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x) - x dx$ وحسب نتيجة السؤال (II-4-ج) : $\forall x \in [1,2] \quad f(x) \leq x$ أي أن : $\forall x \in [1,2] \quad f(x) - x \leq 0$ أي أن : $\forall x \in [1,2] \quad f(x) - x = -(f(x) - x) = \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \cdot \ln x$ ومنه : $\mathcal{A} = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2 cm^2$</p>	<p>III-1. بالنسبة ل $n=0$ لدينا : $u_0 = \sqrt{3}$ ومنه $1 \leq u_0 \leq 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n=0$) نفترض أن : $1 \leq u_n \leq 2$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ لدينا : $1 \leq u_n \leq 2$ أي أن : $u_n \in [1,2] \subset]1, +\infty[$ وبما أن : f تزايدية على $]1, +\infty[$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ فان : $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$ أي أن : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n+1$)</p>

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 2$
<p>2. لدينا حسب نتيجة السؤال (II-4-ج) : $\forall x \in [1,2] ; f(x) \leq x$</p> <p>ولدينا من جهة أخرى : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 2$ أي أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \in [1,2]$</p> <p>اذن : $\forall n \in \mathbb{N} ; f(u_n) \leq u_n$ يعني : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} \leq u_n$</p> <p>وبالتالي فان المتتالية (u_n) تناقصية</p>
<p>3. + لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq 2$ يعني ان المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1 وبما أن المتتالية (u_n) تناقصية فانها متقاربة.</p> <p>+ لدينا f متصلة على المجال $]0,+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[1,2]$</p> <p>و : $f([1,2]) = [1,2]$ أي ان : $f([1,2]) \subset [1,2]$ وبما أن (u_n) متقاربة و $u_0 \in [1,2]$ فان النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق : $f(l) = l$</p> <p>وحسب نتيجة السؤال (II-4-ب) : $l = 1$ أو $l = 2$</p> <p>وبما أن (u_n) تناقصية فان : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_0$ أي : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq \sqrt{3}$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \sqrt{3}$</p> <p>وبالتالي فان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$</p>

