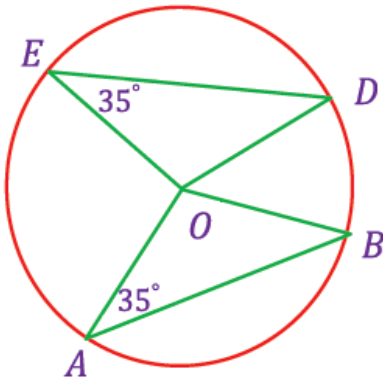


علوم للجميع

تم التحميل من موقع علوم للجميع

<http://www.3lom4all.com>

تطبيق 2 صفحة 48:



في الشكل المجاور برهن أن القوسان \widehat{AB} , \widehat{ED} طبوقان
وان الوترين $[AB]$, $[ED]$ طبوقان

الحل :

1 - "يقاس القوس بقياس زاويته المركزية" أي: $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$ لنحسبها:

المثلث AOB متساوي الساقين (لأن $AO = OB = R$)

ومنه $\hat{A} = \hat{B} = 35^\circ$

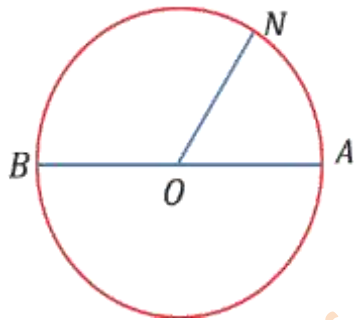
ومنه $\widehat{AB} = 110^\circ$ $\widehat{AOB} = 180 - (35^\circ + 35^\circ) = 110^\circ$

بنفس الطريقة في المثلث EOD نجد: $\widehat{ED} = 110^\circ$ ومنه $\widehat{AB} = \widehat{ED}$

2 - بما أن $\widehat{AB} = \widehat{ED} = 110^\circ$

"إذا تطابق قوسان تطابق وتراهما" ومنه $AB = ED$

حاول أن تحل صفحة 48 :



(1) في الشكل المجاور

لدينا $\widehat{BON} = 2 \widehat{AON}$ أوجد قياس كل من القوسين \widehat{BN} , \widehat{AN}

الحل :

"يقاس القوس بقياس زاويته المركزية": $\widehat{BON} = 2 \widehat{AON}$, $\widehat{AON} = \widehat{AN}$

نعلم أن: $\widehat{AON} + \widehat{BON} = 180^\circ$

نعوض الفرض: $\widehat{AON} + 2 \widehat{AON} = 180^\circ$

ومنه $3 \widehat{AON} = 180^\circ$ ومنه $\widehat{AON} = 60^\circ$

ومنه $\widehat{BON} = 2 (60^\circ) = 120^\circ$

نعوض: $\widehat{AON} = \widehat{AN} = \boxed{60^\circ}$, $\widehat{BON} = \widehat{BN} = \boxed{120^\circ}$

2 - أوجد قياس القوس \widehat{AM}

1- من الشكل : $MN = AB = 4$

الأوتار الطبوقة تحدد أقواس طبوقة ومنه $\widehat{MN} = \widehat{AB}$

"يقاس القوس بقياس زاويته المركزية" ومنه $M\hat{O}N = A\hat{O}B$ ونحسب $A\hat{O}B$:

المثلث AOB متساوي الساقين (لأن فيه: $AO = OB = R$) ومنه $\hat{A} = \hat{B} = 25^\circ$

$$M\hat{O}N = A\hat{O}B = 130^\circ \text{ ومنه } A\hat{O}B = 180^\circ - (25^\circ + 25^\circ) = 130^\circ \text{ ومنه}$$

2 - "القوس يقاس بقياس زاويته المركزية" ومنه $\widehat{AM} = A\hat{O}M$

إن \hat{OM} مكملة للزاوية \hat{MON}

$$\widehat{AM} = \widehat{AOM} = 50^\circ \text{ ومنه } \widehat{AOM} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ \text{ ومنه}$$

تطبيق صفحة 50:

بين فيما إذا كان (KL) مماساً للدائرة $C(O, OK)$ في كل من الشكلين التاليين :

فكرة الحل: يكون المستقيم LK مماس للدائرة إذا كان عمودي على نصف القطر أي: $KL \perp KO$ ؟

لمعرفة ذلك نطبق مبرهنة عكس فيثاغورث

$$OL = ON + NL = 2 + 1 = 3 \quad , \quad ON = R = 2 - \mathbf{1}$$

محقة $KL^2 + OK^2 = OL^2$ نعوض: $5 + 4 = 9$

فالمثلث OKL قائم الزاوية في K

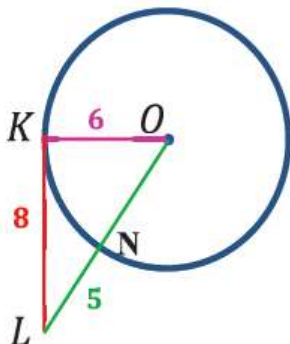
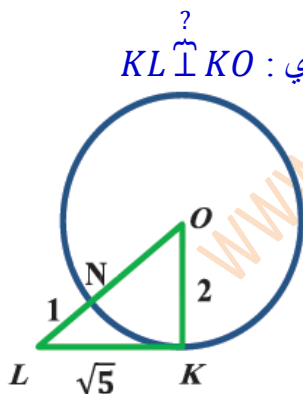
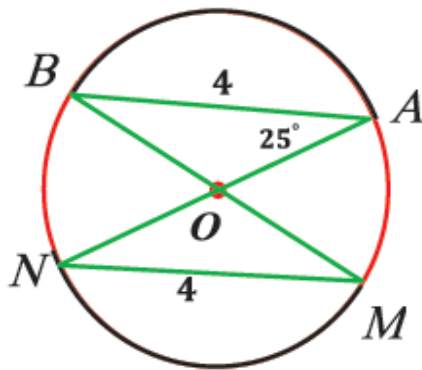
ومنه $KL \perp KO$ ومنه المستقيم KL مماس للدائرة

$$OL = ON + NL = 6 + 5 = 11 \text{ ، } ON = R = 6 \text{ -2}$$

$KL^2 + OK^2 = OL^2$ نعوض : $64 + 36 \neq 121$ غير محققة

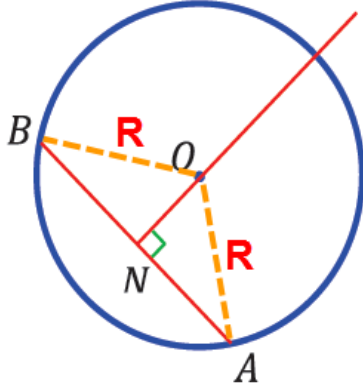
فالمثلث OKL غير قائم الزاوية

ومنه المستقيم KL ليس مماس للدائرة



نشاط 1 صفحة 50:

في الشكل المجاور : دائرة $C(O, R)$ ، وتر فيها ، $[AB]$ وتر فيها ، $(ON) \perp [AB]$ أرسم $[OA]$ ، $[OB]$ ،
أجب عن الأسئلة التالية :



1 - إن $OA = OB$ علل ؟ لأن كل منهما R

2 - ما نوع المثلث OAB ؟ متساوي الساقين (لأن: $OA = OB = R$)

3 - هل $[ON]$ متوسط متعلق بالقاعدة $[AB]$ ولماذا؟

ON متوسط متعلق بالقاعدة لأن:

الارتفاع في المثلث المتساوي الساقين هو متوسط ومنصف ومحور

تطبيق صفحة 51:

في الشكل المرسوم جانباً $C(O, 10)$ دائرة $AC = 12$ أحسب ON

الحل :

نصل OC ونطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم ONC : $ON^2 + NC^2 = OC^2$

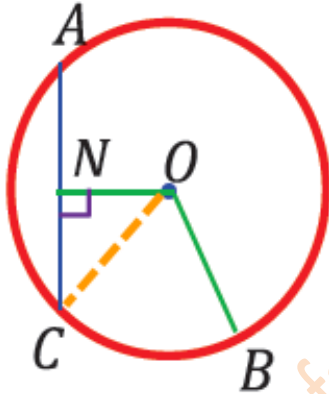
حيث: $OC = R = 10$

و "المستقيم المار بمركز دائرة عمودياً على وتر فيها ينصف ذلك الوتر"

ومنه N منتصف AC ومنه $NC = \frac{1}{2}(12) = 6$

نعوض في علاقة فيثاغورث: $ON^2 + 36 = 100$

ومنه $ON = 8$



تفكير ناقد صفحة 54:

ناقش صحة العبارة الآتية مع التعليل: من ثلاث نقاط على استقامة واحدة ، يمكن أن تمر دائرة

الحل : العبارة خاطئة

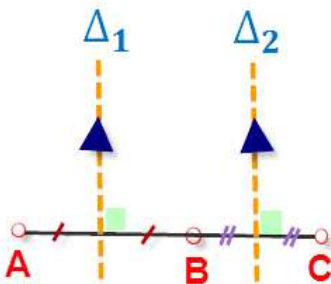
التعليل: لتكن A, B, C ثلاث نقاط على استقامة واحدة ، يمر من هذه النقاط دائرة عندما يتلاقى محوري

القطعتين $[AB]$ ، $[BC]$ في نقطة واحدة هي مركز الدائرة:

نرسم محوري القطعتين المستقيمتين $[AB]$ و $[BC]$ وليكونا Δ_1 ، Δ_2 على الترتيب

العمودان على مستقيم واحد متوازيان ومنه $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ ولا يمكن أن يتقاطعا

ومنه لا يمكن أن يمر دائرة من ثلاثة نقط على استقامة واحدة



حاول أن تحل صفحة 55:

ABC مثلث متساوي الأضلاع ، طول ضلعه 6

1 - أرسم هذا المثلث ، وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه

2 - أحسب طول أحد متوسطاته واستنتج طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

الحل :

1 - مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث المتساوي الأضلاع هي O نقطة تلاقي محاور أضلاعه وهي تنطبق على مركز ثقل المثلث.

2 - كل محور في المثلث المتساوي الأضلاع هو منتصف وارتفاع ومتوسط ، ولنحسب طول المتوسط AN :

نطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم ANC : $AN^2 + NC^2 = AC^2$

نعوض: $AN^2 + 9 = 36$ ومنه $AN = 3\sqrt{3}$

• بالاستفادة من خاصية مركز ثقل المثلث نجد : $R = AO = \frac{2}{3} AN = 2\sqrt{3}$

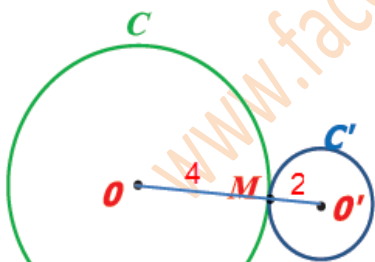
توضيح العلاقة الأخيرة:

$$\frac{ON}{AO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ON+AO}{AO} = \frac{1+2}{2} \Rightarrow \frac{AN}{AO} = \frac{3}{2} \Rightarrow AO = \frac{2}{3} AN$$

تطبيق صفحة 55 :

1 (أرسم الدائرتين $C(O, 4)$ ، $C'(O', 2)$ المتماستين خارجاً في M و أحسب OO'

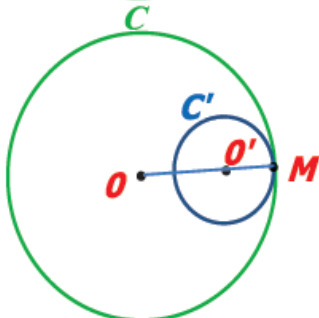
الحل :



$$OO' = R + R' = 4 + 2 = 6$$

2 (كرر الطلب السابق عندما C ، C' متماستين داخلياً

الحل :

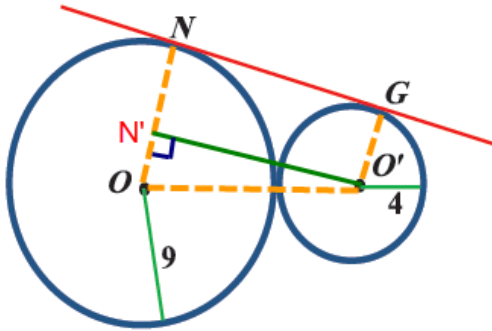


$$OO' = |R - R'| = 4 - 2 = 2$$

حاول أن تحل صفحة 55:

في الشكل المجاور : أوجد طول $[GN]$ (قطعة من المماس المشترك لدائرتين)

الحل :



المماس يعامد نصف القطر ومنه $ON \perp GN$ ، $O'G \perp GN$

العمودان على مستقيم واحد متوازيان ومنه $O'G \parallel ON$

نرسم من O' عموداً على ON فيقطعها في N' وبالمثل : $O'N' \parallel GN$

ومنه $O'N'NG$ مستطيل ومنه $O'N' = GN$

نحسب $O'N'$ حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم $O'N'O$:

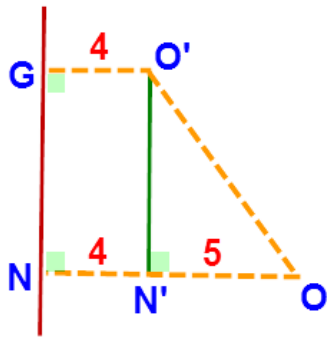
$$O'O = R + R' = 9 + 4 = 13 \quad \text{حيث:}$$

$$N'O = NO - N'N = R - R' = 9 - 4 = 5$$

$$\text{ويكون: } ON'^2 + O'N'^2 = O'O^2$$

$$\text{نعوض: } 25 + O'N'^2 = 169 \quad \text{ومنه } O'N' = 12$$

$$\boxed{O'N' = GN = 12} \quad \text{ومنه}$$



حاول أن تحل صفحة 60 :

(1) في الشكل المجاور :

قياس القوس \widehat{BC} يساوي 94° ، $\widehat{BOA} = 104^\circ$

$$[Bx] \perp [OB] \quad , \quad [AB] \parallel [DC]$$

والمطلوب حساب كل من :

$$\widehat{OAC} \quad , \quad \widehat{DBx} \quad , \quad \widehat{ADC} \quad , \quad \widehat{AD} \quad , \quad \widehat{BDA}$$

الحل :

حساب \widehat{BDA} : " قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس "

$$\widehat{BDA} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} (104^\circ) = \boxed{52^\circ}$$

حساب \widehat{AD} : " الوتران المتوازيان يحصران قوسان طبقان "

$$\widehat{AD} = \widehat{BC} = 94^\circ \quad \text{ومنه } AB \parallel DC$$

حساب \widehat{ADC} : $\widehat{ADC} = \widehat{AD} + \widehat{DC}$ ولنحسب قياس القوس \widehat{AD} :

" قياس قوس الدائرة $= 360^\circ$ " ومنه $\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{DC} + \widehat{DA} = 360^\circ$

" يقاس القوس بقياس زاويته المركزية " ومنه $\widehat{AB} = \widehat{AOB} = 104^\circ$

نعوض: $104^\circ + 94^\circ + \widehat{DC} + 94^\circ = 360^\circ$ ومنه $\widehat{CD} = 68^\circ$

وبالتالي: $\widehat{ADC} = \widehat{AD} + \widehat{DC} = 94^\circ + 68^\circ = \boxed{162^\circ}$

حساب \widehat{DBx} : $\widehat{DBx} = \widehat{DBC} + \widehat{CBx}$ ولنحسب كل من الزاويتين \widehat{DBC} ، \widehat{CBx} :

" الزوايا المحيطية المشتركة بالقوس طبقوة " ومنه $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$

" قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابلة " ومنه $\widehat{DBC} = \frac{1}{2} \widehat{CD} = \frac{1}{2} (68^\circ) = 34^\circ$

" قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها " ومنه $\widehat{CBx} = \frac{1}{2} \widehat{BC} = \frac{1}{2} (94^\circ) = 47^\circ$

نعوض: $\widehat{DBx} = \widehat{DBC} + \widehat{CBx} = 34^\circ + 47^\circ = \boxed{81^\circ}$

حساب \widehat{OAC} : $\widehat{OAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAO}$ ولنحسب كل من الزاويتين: \widehat{BAO} ، \widehat{BAC} :

المثلث AOB متساوي الساقين لأن: $OA = OB = R$ ومنه $\widehat{A} = \widehat{B}$

" مجموع قياسات زوايا المثلث $180^\circ:180^\circ = \widehat{A} + \widehat{B} + 104^\circ$ ومنه $2\widehat{A} = 76^\circ$ ومنه $\widehat{A} = \widehat{B} = 38^\circ$

أي: $\widehat{BAO} = 38^\circ$

" قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابلة " ومنه:

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} (\widehat{BC}) = \frac{1}{2} (94^\circ) = 47^\circ$$

نعوض: $\widehat{OAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAO} = 47^\circ - 38^\circ = \boxed{9^\circ}$

تدقيق الآتية: أمل سلمان

موقع مناهج الرياضيات السورية

www.syCourses.com

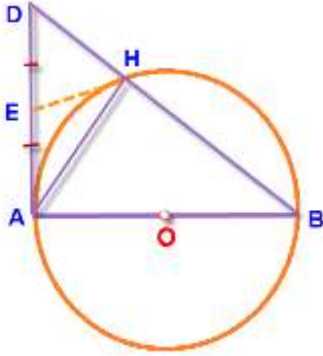
مجموعة مدرسي الرياضيات السورية

www.facebook.com/groups/syria.teachers

(2) [AB] قطر في الدائرة $C(O, R)$ ، نرسم المماس للدائرة C في النقطة A ونعين عليه النقطة D

بحيث [BD] يقطع الدائرة C في النقطة H ، فإذا كانت النقطة E منتصف [AD]

فبرهن أن المثلث AHB قائم الزاوية، وأن المثلث AEH متساوي الساقين



الحل :

" الزاوية المحيطية التي تحصر نصف الدائرة هي زاوية قائمة "

إذاً: $\widehat{AHB} = 90^\circ$ ومنه المثلث AHB قائم الزاوية

• النقطة E منتصف AD ومنه EH متوسط في المثلث القائم AHD

" طول المتوسط في مثلث قائم يساوي نصف طول الوتر " ومنه $HE = \frac{1}{2}AD$

ومنه $HE = EA$ ومنه المثلث AEH متساوي الساقين

حاول أن تحل صفحة 65 :

(1) ABE ، ADE مثلثان قائمان وترهما المشترك [BE]

1 – إذا كانت النقطتان A, D تقعان في جهة واحدة نسبة إلى (BE)

برهن أن النقط A, D, B, E تقع على دائرة واحدة، عين مركزها وأرسمها

2 – على نصف المستقيم (ED) نحدد النقطة H بحيث $DH = DB$

و على نصف المستقيم (BA) نحدد النقطة T بحيث $TA = AE$

برهن أن النقط B, E, T, H تقع على دائرة واحدة .

3 – أعد حل الطلب الأول إذا كانت النقطتان A, D تقعان في جهتين مختلفتين نسبة إلى (BE)

الحل :

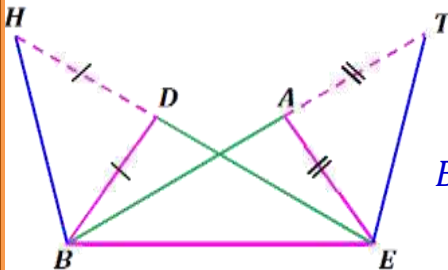
1 - $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ فالزاويتان $E\widehat{A}B$ ، $E\widehat{D}B$ متساويتين ورأساهما يقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى BE

فحسب مبرهنة الرباعي الدائري (الحالة الثالثة) ومنه النقط A, D, B, E تقع على دائرة واحدة

مركزها: O منتصف الوتر المشترك [BE] للمثلثين القائمين EAB و EDB

2 – المثلث EAT قائم الزاوية ومتساوي الساقين فرضاً ومنه $\widehat{ETA} = 45^\circ$

والمثلث BDH قائم الزاوية ومتساوي الساقين فرضاً ومنه $\widehat{BHE} = 45^\circ$



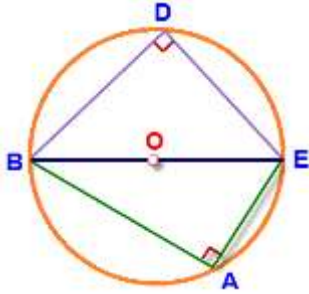
ومنه الزاويتان $B\hat{T}E$ ، $D\hat{H}B$ لهما ذات القياس ورأساهما يقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى BE فحسب مبرهنة الرباعي الدائري (الحالة الثالثة) ومنه النقط A ، D ، B ، E تقع على دائرة واحدة

3 - \hat{A} ، \hat{D} زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $AEDB$ لأن : $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$

" إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري "

ومنه النقط A ، D ، B ، E تقع على دائرة واحدة

مركزها : O منتصف الوتر المشترك EB للمثلثين القائمين EAB و EDB



(2) في الشكل المرسوم جانباً

$C(O, 6)$ دائرة (DH) و (BE) مماسان لها في النقطتين B ، D على الترتيب ، $\hat{BOD} = 60^\circ$

والمطلوب :

1 - أحسب DH

2 - بين أن النقط O ، B ، E ، D تقع على دائرة واحدة عين مركزها وأرسمها

الحل :

(1) $DH \perp DO$ لأن المماس يعامد نصف القطر ومنه $\hat{D} = 90^\circ$ والمثلث ODH قائم الزاوية في \hat{D}

$$\hat{H} = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$$

"الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف الوتر"

$$\text{ومنه } OD = \frac{1}{2} OH \text{ ومنه } OH = 2 OD = 2R = 12$$

نطبق فيثاغورث في المثلث القائم ODH : $OD^2 + DH^2 = OH^2$

$$\text{نعوض : } 36 + DH^2 = 144 \text{ ومنه } DH = 6\sqrt{3}$$

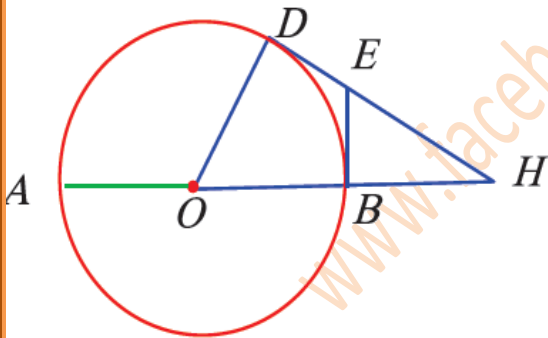
(2) $EB \perp BO$ لأن المماس يعامد نصف القطر ومنه $\hat{B} = 90^\circ$

أصبح لدينا \hat{B} ، \hat{D} زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $OBED$ لأن : $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

و " إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري "

ومنه النقط O ، B ، E ، D تقع على دائرة واحدة

مركزها : منتصف الوتر المشترك $[OE]$ للمثلثين القائمين ODE و BEO



تطبيق صفحة 67:

تأمل الشكل المجاور: واحسب محيط المثلث ABC حيث: $AK = 4x - 1$ و $AN = x + 2$

الحل :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه $CB + AC + AB$
ولنحسب أطوال أضلاعه:

"من نقطة خارج دائرة نرسم مماسين لهذه الدائرة ويكون جزءا المماس المحصورين بها ونقطتي التماس طبقين"

ومنه $\{AN = AK\}$ ، $\{CM = CN = 12\}$ ، $\{BK = BM = 7\}$

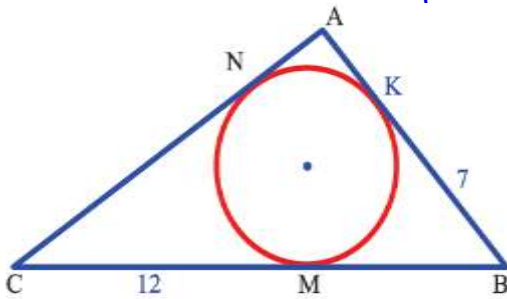
ومنه $x + 2 = 4x - 1$ ومنه $x = 1$ ومنه $AK = 3$ و 3

$$AB = AK + KB = 3 + 7 = 10$$

$$AC = AN + NC = 3 + 12 = 15$$

$$BC = BM + MC = 7 + 12 = 19$$

نعوض : محيط المثلث $= 19 + 15 + 10 = 44$



تأريين الوحدة الثالثة

المسألة الأولى: تأمل الشكل المرسوم جانباً:

$C(O, R)$ ، $\widehat{DAB} = 60^\circ$ ، النقطة N منتصف القوس \widehat{DNB} ، (Nx) مماس للدائرة في N

والمطلوب :

1 - أوجد قياس الزاوية \widehat{DON} واستنتج أن الرباعي $OBND$ معين

2 - استنتج أن $(Nx) \parallel (DB)$

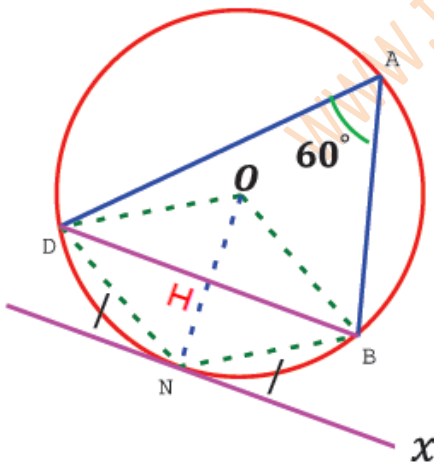
الحل :

1- من الشكل: الرباعي $ABND$ دائري فيه كل زاويتين متقابلتين متكاملتين

$$\widehat{DNB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

"قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف المركزية المشتركة معها بالقوس"

$$\widehat{BOD} = 2(60^\circ) = 120^\circ \text{ ومنه } \widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BOD}$$



$$\boxed{D\hat{O}N = B\hat{O}N = 60^\circ} \text{ و منه}$$

- ## 2 - "الوتران المتوازيان يحصران قوسين طبقين"

بما أن : $DN = NB$ ومنه $Nx \parallel DB$

$ON \perp BD$ لأن قطرا المعين متعامدان

$ON \perp Nx$ لأن المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس

وبما أن: العمودان على مستقيم واحد متوازيان ومنه $Nx \parallel DB$

$AM = 4$ ، $NM = 4\sqrt{3}$ ، N مماس للدائرة في

والمطلوب:

- 1 - أحسب نصف قطر الدائرة واستنتج قياس الزاوية \widehat{M}
- 2 - أحسب قياس القوس \widehat{NB} وقياس الزاوية المنعكسة \widehat{NOB}

الحل :

- 1- $NM \perp ND$ لأن "المماس NM يعامد نصف القطر" فالمثلث ONM قائم الزاوية في \hat{N}**

لنفرض طول نصف القطر $R =$ ومنه $OM = R + 4$

نطبق مبرهنة فيثاغورث : $ON^2 + NM^2 = OM^2$

نعوض: $R^2 + 48 = (R + 4)^2$ ومنه $\boxed{R = 4}$

- $$OM = 4 + 4 = 8 \text{ , } ON = R = 4 \quad \bullet$$

"إذا كان طول الضلع القائمة يساوي نصف طول الوتر فإن قياس الزاوية المقابلة يساوي 30° " ومنه $\widehat{M} = 30^\circ$

2 - "يقاس القوس بقياس زاويته المركزية" ومنه $\widehat{NB} = \widehat{N\hat{O}B}$ حيث: $\widehat{N\hat{O}B} = 180^\circ - \widehat{N\hat{O}A}$

"مجموع زوايا المثلث ONM تساوي 180° " ومنه: $\widehat{N\hat{O}A} = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$

$$\widehat{N\hat{O}B} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ إذاً:}$$

$$\boxed{\widehat{NB} = \widehat{N\hat{O}B} = 120^\circ} \text{ ومنه}$$

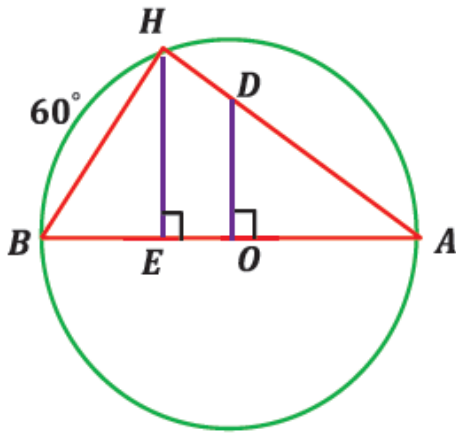
• حساب الزاوية المنعكسة $\widehat{N\hat{O}B}$:

$$\widehat{N\hat{O}B} = \widehat{B\hat{O}A} + \widehat{A\hat{O}N} = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

$$\text{أو: } \widehat{N\hat{O}B} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

المسألة الثالثة:

تأمل الشكل المرسوم جانباً



$[DO] \perp [AB]$ ، $[HE] \perp [AB]$ ، دائرة $C(O, 6)$

وقياس القوس $\widehat{HB} = 60^\circ$ والمطلوب :

1 - أحسب قياسات زوايا المثلث (HAB) وأطوال أضلاعه

2 - أحسب HE ثم AE

3 - برهن أن المثلثين HEA ، DOA متشابهان ، ثم أحسب OD

4 - برهن أن الرباعي $ODHB$ دائري ، ثم عين مركز الدائرة المارة برؤوسه وأحسب نصف قطرها

الحل :

1 - "الزاوية المحيطية التي تحصر نصف الدائرة هي زاوية قائمة"

$$\text{ومنه } \boxed{\widehat{H} = 90^\circ} \text{ والمثلث } BHA \text{ قائم الزاوية في } \widehat{H}$$

$$\text{"قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي يحصره" ومنه } \widehat{A} = \frac{1}{2}(\widehat{HB}) = \boxed{30^\circ}$$

$$\text{"مجموع زوايا المثلث تساوي } 180^\circ \text{" ومنه: } \widehat{B} = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = \boxed{60^\circ}$$

$$\bullet \quad AB = 2R = 2(6) = \boxed{12}$$

$$\text{"الضلع المقابل للزاوية } 30^\circ \text{ في المثلث القائم تساوي نصف طول الوتر" ومنه } HB = \frac{1}{2}(BA) = \boxed{6}$$

$$\text{نطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث } BHA : BH^2 + HA^2 = AB^2$$

$$\text{نعوض : } 36 + HA^2 = 144 \text{ ومنه } \boxed{HA = 6\sqrt{3}}$$

2 - " الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم AEH تساوي نصف الوتر " ومنه

$$HE = \frac{1}{2}(AH) = \boxed{3\sqrt{3}} \quad (\text{أو نحسب الضلع حسب النسب المثلثية للزاوية } 30^\circ)$$

نطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث AEH : $HE^2 + EA^2 = AH^2$

$$\text{نعوض : } 27 + EA^2 = 108 \quad \text{ومنه } \boxed{EA = 9}$$

3 - "العمودان على مستقيم واحد متوازيان" ومنه $HE \parallel DO$

فحسب المبرهنة الأساسية في التشابه يكون المثلثين : DOA ، HEA متشابهين

$$\text{نكتب نسب التشابه : } \left(\frac{DOA}{HEA} \right) \quad \text{ومنه} \quad \frac{DO}{HE} = \frac{OA}{EA} = \frac{DA}{HA} \quad \text{نعوض : } \frac{OD}{3\sqrt{3}} = \frac{6}{9}$$

$$\text{باستخدام الضرب التقاطعي نجد : } \boxed{OD = 2\sqrt{3}}$$

4 - لدينا \hat{O} ، \hat{H} زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $ODHB$ (لأن : $\hat{O} + \hat{H} = 180^\circ$)

" إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري "

ومنه النقط O ، D ، H ، B تقع على دائرة واحدة

مركزها : O' منتصف الوتر المشترك $[BD]$ للمثلثين القائمين DOA و HEA

$$\text{نصف القطر : يساوي نصف طول الوتر المشترك } [BD] : R = \frac{1}{2}BD$$

نحسب BD حسب فيثاغورث في المثلث القائم BOD : $BO^2 + OD^2 = BD^2$

$$\text{نعوض : } 36 + 12 = BD^2 \quad \text{ومنه } BD = 4\sqrt{3} \quad \text{ومنه } \boxed{R = 2\sqrt{3}}$$

المسألة الرابعة: في الشكل المجاور

(AB) ، (DH) مماسان للدائرة (O, R) في B ، D على الترتيب

$$D\hat{O}B = 60^\circ \quad \text{والمطلوب :}$$

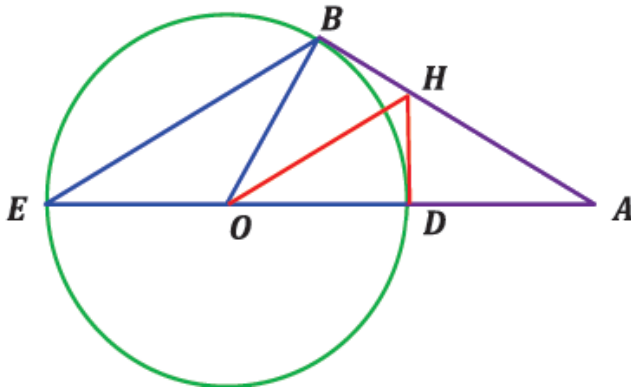
1 - أوجد قياس الزاوية \hat{A}

$$2 - \text{برهن أن } D \text{ منتصف } [OA] \quad \text{وأن : } HB = \frac{1}{2}HA$$

3 - برهن أن الرباعي $OBHD$ دائري

4 - أحسب قياس الزاوية $B\hat{E}D$

الحل :



1 - $BH \perp BO$ لأن المماس BH يعامد نصف القطر ومنه المثلث OBA قائم الزاوية في \hat{B}

"مجموع زوايا المثلث تساوي 180° ومنه: $\hat{A} = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$ "

2 - "الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف الوتر" ومنه $OB = \frac{1}{2} OA$

ولكن: $OB = OD = R$ ومنه $OD = \frac{1}{2} OA$ ومنه D منتصف OA

• $HD \perp DO$ لأن المماس DH يعامد نصف القطر في نقطة التماس ومنه المثلث HDA قائم الزاوية في \hat{D}

"الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف الوتر" ومنه $HD = \frac{1}{2} HA$

ولكن: $HB = HD$ لأنه:

"من نقطة خارج دائرة نرسم مماسين لهذه الدائرة ويكون جزءا المماس المحصورين بها ونقطتي التماس طبوقين"

نعوض في العلاقة السابقة: $HB = \frac{1}{2} HA$

3 - لدينا \hat{B} , \hat{D} زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $OBHD$ لأن: $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

"إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري"

ومنه النقط O , B , H , D تقع على دائرة واحدة ومنه $OBHD$ رباعي دائري

4 - "الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس"

ومنه $\hat{BED} = \frac{1}{2} \hat{BOD} = \frac{1}{2} (60^\circ) = 30^\circ$

المسألة الخامسة:

ABC مثلث قائم الزاوية في وفيه: $AB = 2$, $BC = 4$, $[AM] \perp [BC]$

N منتصف $[BC]$, H منتصف AB والمطلوب :

1 - أحسب AC ثم AN

2 - أحسب AM ثم MN

3 - أحسب $t(\hat{ANM})$ ثم استنتج قياسها

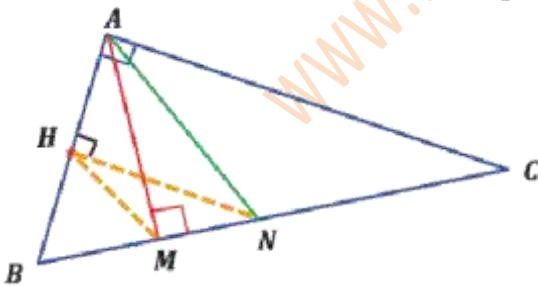
4 - برهن تشابه المثلثين NHB , ABC ثم أحسب مساحة المثلث NHB

5 - برهن أن النقط A , H , M , N تقع على دائرة واحدة

ثم عين مركزها وأحسب طول نصف قطرها , وبرهن أن هذه الدائرة تمر بمنتصف $[AC]$

الحل :

إعداد الأستاذ: صهييب عبدالله النسود



(1) نطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم BAC : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$\text{نعوض: } 4 + AC^2 = 16 \text{ ومنه } AC = 2\sqrt{3}$$

" طول المتوسط في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر " ومنه $AN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(4) = 2$

(2) في المثلث القائم AMC : الضلع المقابلة للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف الوتر

$$\text{ومنه } AM = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$$

نطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم AMN : $AM^2 + MN^2 = AN^2$

$$\text{نعوض: } 3 + MN^2 = 4 \text{ ومنه } MN = 1$$

(3) في المثلث القائم AMN : $\tan(\widehat{ANM}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AM}{MN} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

بالاعتماد على جدول النسب المثلثية للزوايا الشهيرة نجد: $\widehat{ANM} = 60^\circ$

(4) " القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفين ضلعين توازي الضلع الثالثة وتساوي نصف طولها "

$$\text{ومنه } NH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3} \text{ و } NH \parallel AC$$

فحسب المبرهنة الأساسية في التشابه نستنتج أن المثلثين NHB ، ABC متشابهين

$$\bullet \text{ "نسبة مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع نسبة التشابه": } \frac{\text{مساحة } NHB}{\text{مساحة } ABC} = k^2 = \left(\frac{NH}{AC}\right)^2$$

$$\text{حيث: } S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB)(AC) = \frac{1}{2}(2)(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$\text{نعوض: } \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\text{مساحة } NHB}{2\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ ومنه مساحة المثلث } NHB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(5) $\widehat{AMN} = \widehat{AHN} = 90^\circ$ زاويتان لهما ذات القياس ورأساهما يقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى AN

فالنقاط A ، H ، M ، N تقع على دائرة واحدة

مركزها: O منتصف الوتر المشترك AN للمثلثين القائمين AHN ، AMN

نصف قطرها = نصف طول الوتر المشترك $[AN]$

$$\text{ومنه } R = AO = \frac{1}{2}AN = 1$$

• لتكن النقطة K نقطة تقاطع الدارة مع الضلع AC

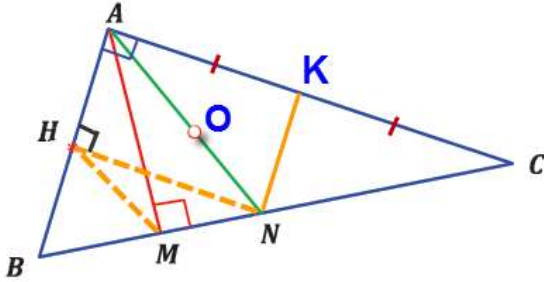
ومنه المثلث AKN قائم الزاوية في K (لأن \widehat{K} محيطية تقابل قوس نصف الدائرة) أي: $NK \perp AC$

المثلث ANC متساوي الساقين (لأن $AN = NC = 2$) فيه NK ارتفاع

"الارتفاع في المثلث المتساوي الساقين هو متوسط"

ومنه NK متوسط للضلع AC

ومنه الدائرة تمر بمنتصف $[AC]$



أرجو عند نقل الموضوع ذكر المصدر وصاحب العمل وعدم التحوير فيه واستغلاله تجارياً

والشكر الجزيل للأئسة أمل سلمان على التدقيق

موقع مناهج الرياضيات السورية

www.syCourses.com