

# **Problemas Resueltos de Introducción a la Electrónica**

Juan A. Carrasco  
Departament d'Enginyeria Electrònica  
Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, Septiembre 2009



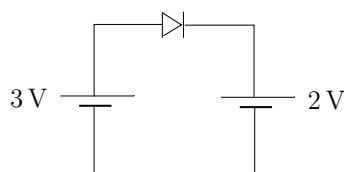
# Prefacio

La presente colección de problemas resueltos abarca todos los contenidos teóricos de la asignatura Introducción a la Electrónica, tal y como es impartida en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona, de la Universidad Politécnica de Cataluña relacionados con el análisis de circuitos. Se espera que la colección sea un instrumento útil para el estudio de dicha asignatura y que palíe el déficit crónico de resolución de problemas en clase, que siempre ha existido en dicha asignatura, debido el reducido número de horas lectivas disponibles.

En la resolución de todos los problemas de análisis de circuitos se usa, por defecto, el habitual sistema consistente de unidades V, mA, k $\Omega$ , que hace que los valores numéricos que típicamente aparecen en la resolución de dichos problemas no disten muchos órdenes de magnitud de la unidad.

Unos últimos comentarios. Es sabido que los circuitos lineales pueden no tener solución o tener infinitas soluciones. Todos los circuitos lineales comprendidos en los problemas de la colección tienen solución única.

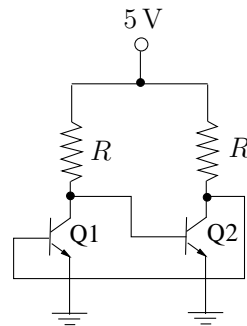
De modo similar, los circuitos con diodos modelados con modelos lineales a tramos pueden no tener solución o tener infinitas soluciones. Un ejemplo de circuito con diodos sin solución es:



donde el diodo se supone ideal. En efecto, la hipótesis diodo en ON conduce a un circuito sin solución, pues la fuente de tensión de valor 3 V queda conectada a la fuente de tensión de valor 2 V. Por otro lado, la hipótesis diodo en OFF conduce a una tensión ánodo-cátodo positiva (1 V), no cumpliéndose la condición de estado del diodo. Un ejemplo de circuito con infinitas soluciones es el circuito del problema 25 con  $v_i = 2$  V. Tal y como se razona en la resolución de dicho problema, con esa  $v_i$  la corriente  $i$  vale 0 y los dos diodos están en OFF. El valor de la tensión ánodo-cátodo de D1 puede tomar, sin embargo, cualquier valor dentro del intervalo  $[-2,7, 0,7]$ , pues, siendo  $v_{AK1}$  y  $v_{AK2}$  las tensiones ánodo-cátodo de, respectivamente, D1 y D2, cualquiera de esos valores es compatible con  $v_{AK1} \leq 0,7$ ,  $-4,7 \leq v_{AK2} \leq 0,7$  y  $v_{AK1} - v_{AK2} = 2$ . Todos los circuitos con diodos considerados, con la excepción antes comentada, tienen solución única. Los problemas correspondientes, sin embargo, son resueltos suponiendo

que el circuito puede no tener solución. Es decir, se da por terminado el análisis del circuito cuando se determina una combinación de estados para los diodos para la que el circuito lineal resultante tiene solución y se cumplen las condiciones de estado de cada diodo.

Los circuitos con transistores presentan una problemática más rica. Dichos circuitos admiten un número finito de soluciones. Esa posibilidad es de hecho aprovechada para diseñar biestables, circuitos con dos soluciones (estados). La siguiente figura muestra un biestable constituido por dos BJTs.

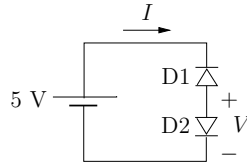


Es fácil comprobar que con  $V_{BE,u} = V_{BE,act} = V_{BE,sat} = 0,7$ ,  $V_{CE,sat} = 0,2$  y un valor suficientemente elevado del parámetro  $\beta$  de los BJTs, caben dos soluciones: en una de ellas Q1 está en CORTE y Q2 está en SATURACIÓN; en la otra Q1 está en SATURACIÓN y Q2 está en CORTE. Todos los circuitos con transistores analizados en los problemas de la colección tienen solución única dentro del dominio para el comportamiento en continua de los dispositivos cubierto por los modelos utilizados para los transistores ( $V_{CE} \geq 0$  para los BJTs npn,  $V_{EC} \geq 0$  para los BJTs pnp,  $V_{DS} \geq 0$  para los MOSFETs de canal n, y  $V_{DS} \leq 0$  para los MOSFETs de canal p). Sin embargo, al igual que en los problemas de análisis de circuitos con diodos, la resolución de problemas de análisis de circuitos con transistores se hace aceptando que el circuito pudiera no tener solución dentro del dominio para el comportamiento en continua de los dispositivos cubierto por los modelos utilizados para los transistores. Es decir, se da por concluido el análisis del circuito cuando se encuentra una combinación para los estados (zonas de trabajo) de los transistores para la que el circuito lineal resultante tiene solución y se cumplen las condiciones de estado de cada dispositivo.

## Capítulo 1

# Problemas de Análisis de Circuitos con Diodos

**Problema 1:** Los diodos D1 y D2 del siguiente circuito tienen corrientes inversas de saturación  $I_{S1} = 10^{-12}$  A e  $I_{S2} = 2 \times 10^{-11}$  A, respectivamente, y un parámetro  $\eta = 1$ . Analice el circuito y determine  $V$  e  $I$ . Suponga  $V_T = 25,9$  mV.



**Solución:** Empezaremos suponiendo  $5 - V \gg V_T = 0,0259$  V. Ello implica que, con mucha precisión,  $I = I_{S1} = 10^{-12}$  A =  $10^{-9}$  mA. La tensión  $V$  puede ser calculada utilizando

$$I = I_{S2} \left( e^{V/V_T} - 1 \right) ,$$

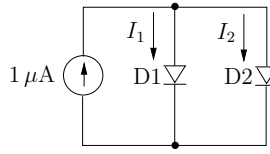
obteniéndose

$$V = V_T \ln \left( 1 + \frac{I}{I_{S2}} \right) = (0,0259) \ln \left( 1 + \frac{10^{-9}}{2 \times 10^{-8}} \right) = 0,001264 = 1,264 \text{ mV} .$$

Resulta  $5 - V = 5 - 0,001264 = 4,999$ , que es  $\gg 0,0259$ . Así pues, los valores calculados para  $V$  e  $I$  son correctos.

**Problema 2:** Los diodos D1 y D2 del siguiente circuito tienen corrientes inversas de saturación  $I_{S1} = 10^{-12}$  A e  $I_{S2} = 8 \times 10^{-12}$  A, respectivamente, y un parámetro  $\eta = 1$ . Analice el circuito

y determine  $I_1$  e  $I_2$ .



**Solución:** Llamando  $V_{AK}$  a la tensión ánodo-cátodo común a los dos diodos, tenemos

$$I_1 = I_{S1} \left( e^{V_{AK}/V_T} - 1 \right),$$

$$I_2 = I_{S2} \left( e^{V_{AK}/V_T} - 1 \right),$$

de donde,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_{S1}}{I_{S2}} = \frac{10^{-9}}{8 \times 10^{-9}} = 0,125.$$

Aplicando la primera ley de Kirchoff al nodo al que están conectados los ánodos de los dos diodos, obtenemos  $10^{-3} = I_1 + I_2$ , y usando la relación anterior entre  $I_1$  e  $I_2$ ,

$$10^{-3} = 0,125I_2 + I_2 = 1,125I_2,$$

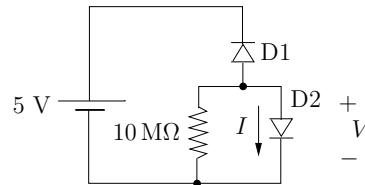
de donde

$$I_2 = \frac{10^{-3}}{1,125} = 8,889 \times 10^{-4} = 0,8889 \mu\text{A}.$$

Finalmente, usando  $10^{-3} = I_1 + I_2$ ,

$$I_1 = 10^{-3} - I_2 = 10^{-3} - 8,889 \times 10^{-4} = 1,111 \times 10^{-4} = 0,1111 \mu\text{A}.$$

**Problema 3:** Los diodos D1 y D2 del siguiente circuito tienen corrientes inversas de saturación  $I_{S1} = 3 \times 10^{-11}$  A e  $I_{S2} = 10^{-12}$  A, respectivamente, y un parámetro  $\eta = 1$ . Analice el circuito y determine  $V$  e  $I$ . Suponga  $V_T = 25,9$  mV.



**Solución:** Empezaremos suponiendo  $5 - V \gg V_T = 0,0259$ . Llamando  $I'$  a la corriente inversa por el diodo D1, se tendrá, con mucha aproximación,  $I' = I_{S1} = 3 \times 10^{-11}$  A =  $3 \times 10^{-8}$  mA. Sea  $R$  la resistencia del circuito. La corriente a través de dicha resistencia vale  $V/R$ . Aplicando la primera ley de Kirchoff al nodo conectado a los ánodos de los diodos y utilizando la ecuación del diodo D2, se obtiene

$$I' = I + \frac{V}{R} = I_{S2} \left( e^{V/V_T} - 1 \right) + \frac{V}{R},$$

y, sustituyendo valores,

$$3 \times 10^{-8} = 10^{-9} \left( e^{V/0,0259} - 1 \right) + \frac{V}{10^4},$$

que da

$$3 \times 10^{-4} = 10^{-5} \left( e^{V/0,0259} - 1 \right) + V,$$

$$V = 3 \times 10^{-4} - 10^{-5} \left( e^{V/0,0259} - 1 \right).$$

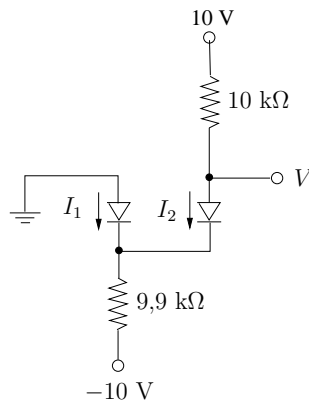
Dicha ecuación trascendente tiene la forma  $V = f(V)$ . Para resolverla, usamos una iteración de punto fijo  $V_{k+1} = f(V_k)$ . Con  $V_1 = 3 \times 10^{-4}$ , se obtiene  $V_2 = 2,999 \times 10^{-4}$ ,  $V_3 = 2,999 \times 10^{-4}$ . Así pues, una solución de la ecuación es  $V = 2,999 \times 10^{-4}$  V = 0,2999 mV. Se puede argumentar que dicha solución es única observando que

$$\frac{df}{dV} = -\frac{10^5}{0,0259} e^{V/0,0259} = -3,861 \times 10^6 e^{V/0,0259} < 0.$$

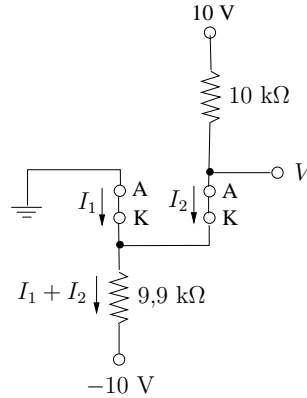
Entonces, al hacerse  $V$  mayor a  $2,999 \times 10^{-4}$ ,  $f(V)$  se hará menor, haciendo imposible que para valores mayores a  $2,999 \times 10^{-4}$  se pueda verificar  $V = f(V)$ . De modo similar se puede razonar que no se podrá verificar  $V = f(V)$  para valores menores a  $2,999 \times 10^{-4}$ . La solución encontrada para  $V$  verifica  $5 - V = 5,000$ , que es  $\gg 0,0259$ , como se había supuesto. Falta calcular  $I$ . Usando la ecuación del diodo D2 se obtiene

$$\begin{aligned} I &= I_{S2} \left( e^{V/V_T} - 1 \right) = 10^{-9} \left( e^{2,999 \times 10^{-4}/0,0259} - 1 \right) \\ &= 1,165 \times 10^{-11} \text{ mA} = 1,165 \times 10^{-14} \text{ A}. \end{aligned}$$

**Problema 4:** Utilizando para el diodo el modelo “diodo ideal”, analice el siguiente circuito y determine  $I_1$ ,  $I_2$  y  $V$ .



**Solución:** Supondremos que los dos diodos están en ON. Se obtiene el circuito



Se ha de verificar  $I_1 \geq 0$  e  $I_2 \geq 0$ . Por inspección,  $V = 0$ . Además, las diferencias de tensión en las dos resistencias resultan ser iguales a 10 V, obteniéndose

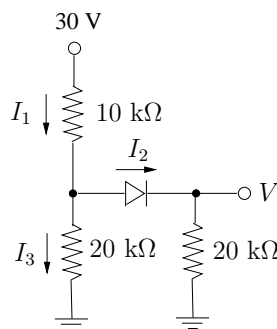
$$\begin{aligned} 10 &= 9,9(I_1 + I_2) = 9,9I_1 + 9,9I_2, \\ 10 &= 10I_2, \end{aligned}$$

de donde  $I_2 = 1$ , que es  $\geq 0$ , e

$$I_1 = \frac{10 - 9,9 I_2}{9,9} = \frac{10 - (9,9)(1)}{9,9} = 0,01010,$$

que también es  $\geq 0$ . Así pues, los estados supuestos para los diodos son correctos,  $I_1 = 0,01010$  mA,  $I_2 = 1$  mA y  $V = 0$ .

**Problema 5:** Utilizando para el diodo el modelo “diodo ideal”, analice el siguiente circuito y determine los valores de  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  y  $V$ .



**Solución:** Calculando el equivalente de Thévenin del dipolo formado por la fuente de tensión de valor 30 V y las resistencias de la izquierda, que tiene como salidas los extremos de la resistencia de valor 20 kΩ, se obtiene una tensión de Thévenin

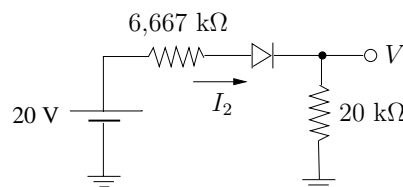
$$V_{th} = \frac{20}{10 + 20} 30 = 20 \text{ V}$$



y una resistencia de Thévenin

$$R_{th} = 10 \parallel 20 = \frac{(10)(20)}{10 + 20} = 6,667 \text{ k}\Omega .$$

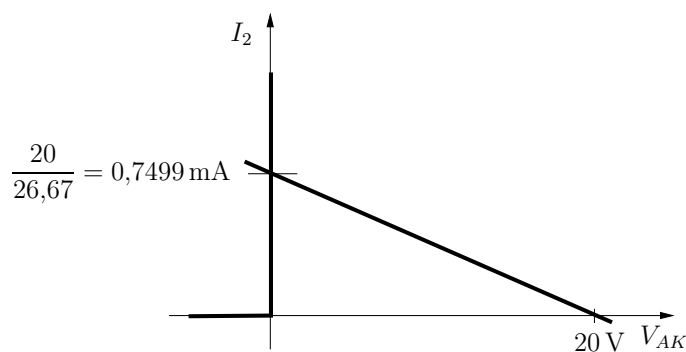
Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin resulta el circuito



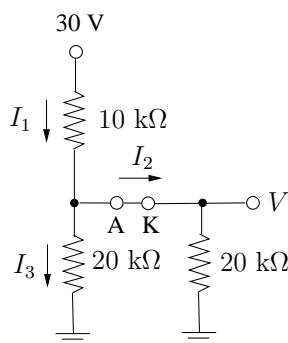
Analizando dicho circuito es fácil deducir que el diodo estará en ON y calcular el valor de la corriente  $I_2$ . En efecto, el punto de trabajo ( $V_{AK}$ ,  $I_2$ ) del diodo estará en la intersección del modelo lineal a tramos del diodo y la recta de carga cuya ecuación se obtiene aplicando la segunda ley de Kirchoff:

$$20 = 6,667 I_2 + V_{AK} + 20 I_2 = 26,67 I_2 + V_{AK} .$$

Gráficamente, tenemos:



Sustituyendo el diodo por su circuito equivalente para el estado ON se obtiene el circuito



La tensión  $V$  puede ser calculada aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $20 \text{ k}\Omega$  de la derecha, obteniéndose

$$V = 20 I_2 = (20)(0,7499) = 15,00 \text{ V} .$$

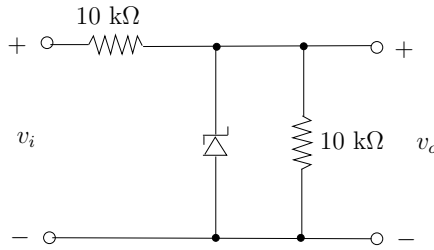
Por simetría,

$$I_3 = I_2 = 0,7499 \text{ mA} .$$

Finalmente, aplicando la primera ley de Kirchoff al nodo conectado al ánodo del diodo,

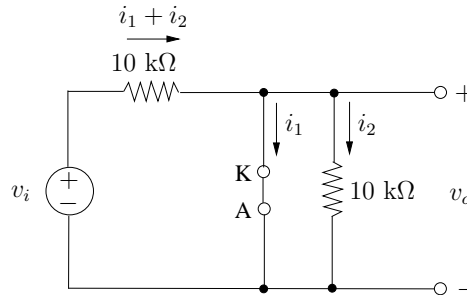
$$I_1 = I_2 + I_3 = 0,7499 + 0,7499 = 1,500 \text{ mA} .$$

**Problema 6:** Utilizando para el diodo el modelo con tensión ánodo-cátodo nula para corrientes directas y tensión cátodo-ánodo igual a 5 V para corrientes inversas, determine la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$  del siguiente cuadripolo.



**Solución:** Supondremos cada uno de los tres estados posibles para el diodo Zener y determinaremos, para cada uno de ellos, el intervalo de tensiones  $v_i$  para el cual el diodo está en el estado y la relación entre  $v_o$  y  $v_i$ .

Para el estado ON, se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i_1 \leq 0$ . Por inspección,  $v_o = 0$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $10 \text{ k}\Omega$  de la derecha, se obtiene

$$0 = 10i_2 ,$$

$$i_2 = 0 .$$

Aplicando al segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , la resistencia de valor  $10 \text{ k}\Omega$  de la izquierda y el diodo, se obtiene

$$v_i = 10(i_1 + i_2) = 10i_1 ,$$

$$i_1 = \frac{v_i}{10} .$$

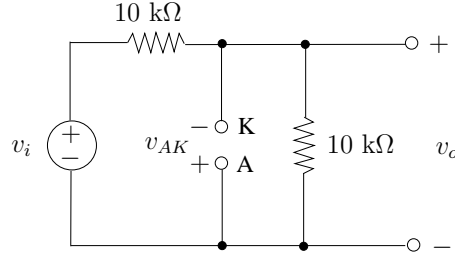
La condición  $i_1 \leq 0$  se traduce en

$$\frac{v_i}{10} \leq 0 ,$$

$$v_i \leq 0.$$

Así pues, para  $v_i \in (-\infty, 0]$ , el diodo está en ON y  $v_o = 0$

Para el estado OFF, se obtiene el circuito

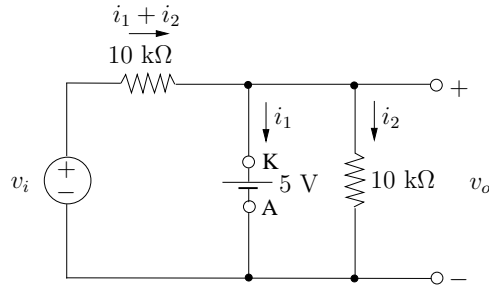


Se ha de imponer  $-5 \leq v_{AK} \leq 0$ . Utilizando la fórmula del divisor de tensión, se obtiene

$$v_o = \frac{10}{10 + 10} v_i = \frac{v_i}{2}.$$

Por inspección,  $v_{AK} = -v_o$ . La condición  $-5 \leq v_{AK} \leq 0$  se traduce en  $-5 \leq -v_o \leq 0$ ,  $0 \leq v_o \leq 5$ , y utilizando  $v_o = v_i/2$ , en  $0 \leq v_i/2 \leq 5$ ,  $0 \leq v_i \leq 10$ . Así pues, para  $v_i \in [0, 10]$ , el diodo está en OFF y  $v_o = v_i/2$ .

Para el estado RUPTURA, se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i_1 \geq 0$ . Por inspección,  $v_o = 5$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $10 \text{ k}\Omega$  de la derecha, se obtiene

$$v_o = 10i_2,$$

$$5 = 10i_2,$$

$$i_2 = 0,5.$$

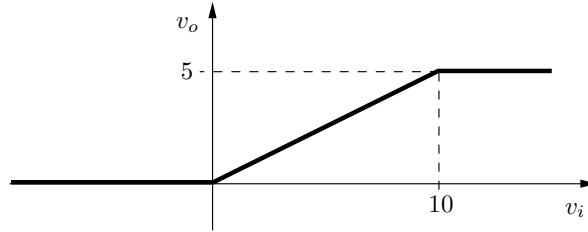
Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , la resistencia de valor  $10 \text{ k}\Omega$  de la izquierda y la fuente de tensión de valor  $5 \text{ V}$ , se obtiene

$$v_i = 10(i_1 + i_2) + 5 = 10i_1 + 10i_2 + 5 = 10i_1 + (10)(0,5) + 5 = 10i_1 + 10,$$

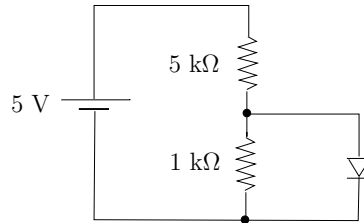
$$i_1 = \frac{v_i - 10}{10}.$$

La condición  $i_1 \geq 0$  se traduce en  $v_i - 10 \geq 0$ ,  $v_i \geq 10$ . Así pues, para  $v_i \in [10, \infty)$  el diodo está en RUPTURA y  $v_o = 5$ .

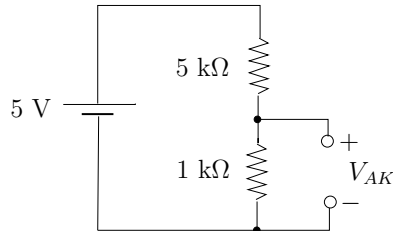
La siguiente figura representa gráficamente la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ .



**Problema 7:** Utilizando para el diodo el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7$  V, analice el circuito de la figura y determine los valores de la corriente directa  $I$  y la tensión ánodo-cátodo  $V_{AK}$  del diodo.



**Solución:** Empezaremos suponiendo el diodo en OFF. Ello conduce al circuito

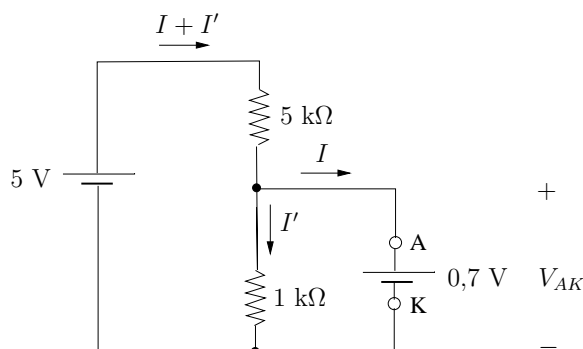


La condición a verificar es  $V_{AK} \leq 0,7$ . Aplicando la fórmula del divisor de tensión, se obtiene

$$V_{AK} = \frac{1}{1+5} 5 = 0,8333,$$

que es  $> 0,7$ . Por lo tanto, el diodo no está en OFF. Supongamos que el diodo está en ON. Ello

conduce al circuito



La condición a verificar es  $I \geq 0$ . Por inspección,  $V_{AK} = 0,7$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $1\text{ k}\Omega$ , se obtiene

$$0,7 = (1)I',$$

$$I' = 0,7.$$

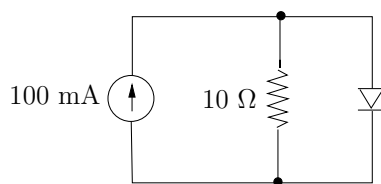
Por último, aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $5\text{ V}$  y las resistencias, se obtiene

$$5 = 5(I + I') + (1)I' = 5I + 6I' = 5I + (6)(0,7) = 5I + 4,2,$$

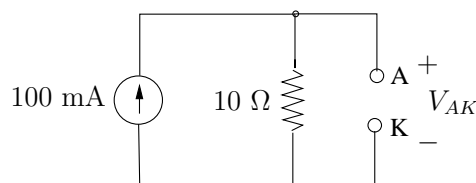
$$I = \frac{5 - 4,2}{5} = 0,16,$$

que es  $\geq 0$ . Así pues, el diodo está en ON,  $I = 0,16\text{ mA}$  y  $V_{AK} = 0,7\text{ V}$ .

**Problema 8:** Utilizando para el diodo el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7\text{ V}$  y resistencia incremental en conducción directa  $r_D = 1\text{ }\Omega$ , analice el circuito de la figura y determine los valores de la corriente directa  $I$  y de la tensión ánodo-cátodo  $V_{AK}$  del diodo.

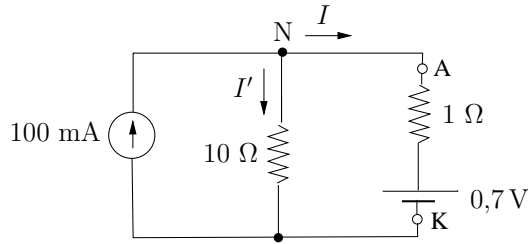


**Solución:** Empezaremos suponiendo que el diodo está en OFF. Ello conduce al circuito



La condición a verificar es  $V_{AK} \leq 0,7$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia, se obtiene

$V_{AK} = (0,01)(100) = 1$ , que es  $> 0,7$ . Por tanto, el diodo no está en OFF. Supongamos que el diodo está en ON. El circuito resultante es



La condición a verificar es  $I \geq 0$ . Aplicando la primera ley de Kirchhoff al nodo N, se obtiene

$$100 = I + I'.$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 0,7 V y las resistencias, se obtiene

$$0,7 = -0,001I + 0,01I',$$

dando lugar al sistema lineal

$$\begin{aligned} I + I' &= 100 \\ -I + 10I' &= 700, \end{aligned}$$

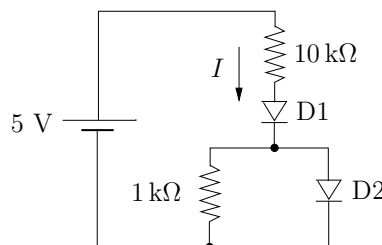
cuya solución para  $I$  es

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 1 \\ 700 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{300}{11} = 27,27,$$

que es  $\geq 0$ . Así pues, el diodo está en ON e  $I = 27,27$  mA. La tensión ánodo-cátodo resulta valer

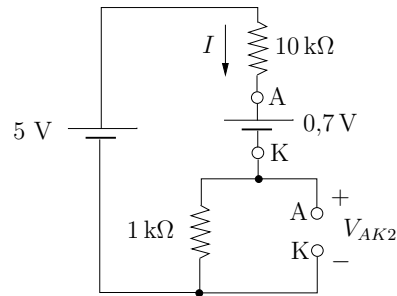
$$V_{AK} = 0,7 + 0,001I = 0,7 + (0,001)(27,27) = 0,7273 \text{ V}.$$

**Problema 9:** Utilizando para los diodos el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7$  V, analice el siguiente circuito y determine  $I$ .



**Solución:** Con el diodo D1 en OFF, el diodo D2 quedaría polarizado exclusivamente por la resistencia de valor 1 kΩ y también estaría en OFF. Con esos estados para D1 y D2, tendríamos

$V_{AK1} = 5$ , que no es  $\leq 0,7$  V. Así pues, el diodo D1 no está en OFF. Supongamos que el diodo D1 está en ON y que el diodo D2 está en OFF. Se obtiene el circuito



Se ha de verificar  $I \geq 0$  y  $V_{AK2} \leq 0,7$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por las fuentes de tensión y las resistencias, se obtiene

$$5 = 10I + 0,7 + (1)I,$$

$$5 = 11I + 0,7,$$

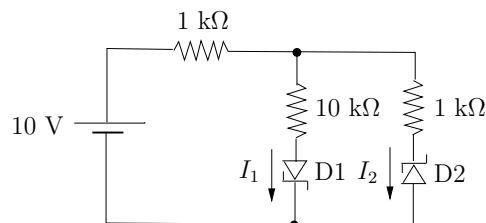
$$I = \frac{5 - 0,7}{11} = 0,3909,$$

que es  $\geq 0$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $1\text{ k}\Omega$ , se obtiene

$$V_{AK2} = (1)I = I = 0,3909,$$

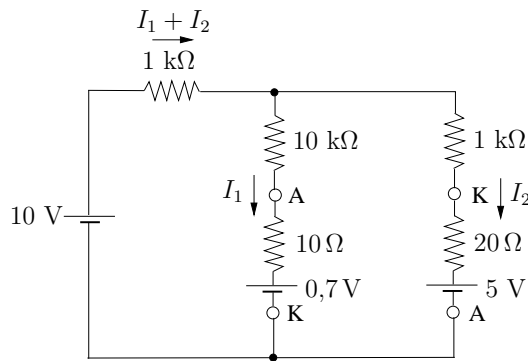
que es  $\leq 0,7$ . Así pues, los estados supuestos para los diodos son correctos e  $I = 0,3909\text{ mA}$ .

**Problema 10:** Utilizando para los diodos el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7\text{ V}$ , resistencia incremental en conducción directa  $r_D = 10\ \Omega$ , tensión de ruptura  $V_{Z0} = 5\text{ V}$  y resistencia incremental en ruptura  $r_Z = 20\ \Omega$ , analice el circuito de la figura y determine  $I_1$  e  $I_2$ .



**Solución:** Supondremos que D1 está en ON y que D2 está en RUPTURA. Sustituyendo los

diodos por los circuitos equivalentes correspondientes a esos estados, se obtiene el circuito



Las condiciones a verificar son  $I_1 \geq 0$  e  $I_2 \geq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor 1 k $\Omega$ , la resistencia de valor 10 k $\Omega$ , la resistencia de valor 10  $\Omega$  y la fuente de tensión de valor 0,7 V y a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, las resistencias de valor 1 k $\Omega$ , la resistencia de valor 20  $\Omega$  y la fuente de tensión de valor 5 V, se obtiene

$$10 = (1)(I_1 + I_2) + 10I_1 + 0,01 I_1 + 0,7,$$

$$10 = (1)(I_1 + I_2) + (1)I_2 + 0,02 I_2 + 5,$$

que conducen al sistema lineal

$$11,01I_1 + I_2 = 9,3$$

$$I_1 + 2,02I_2 = 5,$$

cuya solución es

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 9,3 & 1 \\ 5 & 2,02 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11,01 & 1 \\ 1 & 2,02 \end{vmatrix}} = \frac{13,79}{21,24} = 0,6492,$$

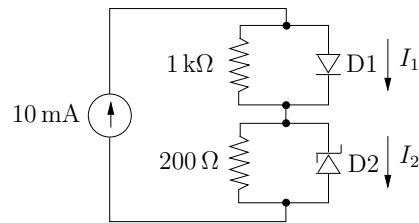
$$I_2 = \frac{5 - I_1}{2,02} = \frac{5 - 0,6492}{2,02} = 2,154.$$

Tanto  $I_1$  como  $I_2$  son  $\geq 0$ . Así pues, el diodo D1 está en ON, el diodo D2 está en RUPTURA,  $I_1 = 0,6492$  mA e  $I_2 = 2,154$  mA.

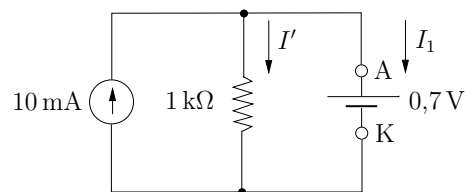
**Problema 11:** Utilizando para el diodo D1 el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7$  V y para el diodo D2 el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7$  V y tensión cátodo-ánodo igual a 5 V para



corrientes inversas, analice el circuito de la figura y determine  $I_1$  e  $I_2$ .



**Solución:** Por cada conjunto formado por un diodo y la resistencia que tiene en paralelo ha de circular una corriente de valor 10 mA. Ello permite el análisis independiente de esos dos grupos de elementos. Supongamos que el diodo D1 está en ON. Se obtiene el circuito



Se ha de verificar  $I_1 \geq 0$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia, se obtiene

$$0,7 = (1)I' ,$$

$$I' = 0,7 .$$

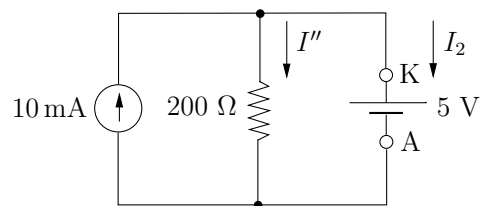
Aplicando la primera ley de Kirchoff al nodo conectado al ánodo del diodo, se obtiene

$$10 = I' + I_1 = 0,7 + I_1 ,$$

$$I_1 = 10 - 0,7 = 9,3 ,$$

que es  $\geq 0$ . Así pues, D1 está en ON e  $I_1 = 9,3$  mA.

Supongamos que el diodo D2 está en RUPTURA. Se obtiene el circuito



Se ha de verificar  $I_2 \geq 0$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia, se obtiene

$$5 = (0,2)I'' ,$$

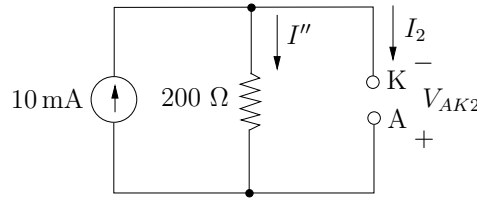
$$I'' = \frac{5}{0,2} = 25 .$$

Aplicando la primera ley de Kirchoff al nodo conectado al cátodo del diodo, se obtiene

$$10 = I'' + I_2 = 25 + I_2,$$

$$I_2 = 10 - 25 = -15,$$

que no es  $\geq 0$ . Supongamos D2 en OFF. Se obtiene el circuito

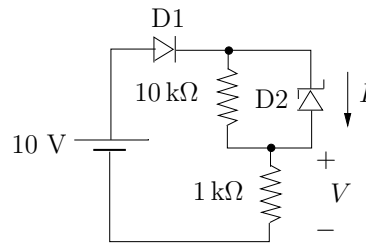


Se ha de verificar  $-5 \leq V_{AK2} \leq 0,7$ . Por inspección,  $I_2 = 0$  e  $I'' = 10$ . Por otro lado, aplicando la ley de Ohm a la resistencia, se obtiene

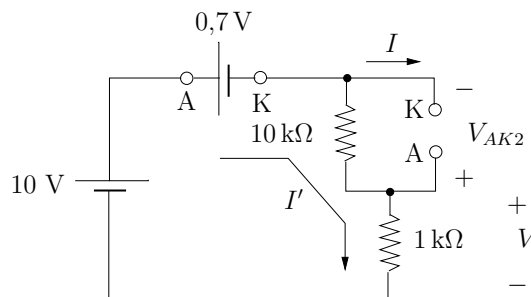
$$V_{AK2} = -0,2 I'' = -(0,2)(10) = -2,$$

que es  $\geq -5$  y  $\leq 0,7$ . Así pues, el diodo D2 está en OFF e  $I_2 = 0$ .

**Problema 12:** Utilizando para el diodo D1 el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7$  V y para el diodo D2 el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7$  V y tensión cátodo-ánodo igual a 5 V para corrientes inversas, analice el circuito de la figura y determine los valores de  $I$  y  $V$ .



**Solución:** Supongamos que el diodo D1 está en ON. Con el diodo D2 en ON, todas las corrientes entrantes al nodo al que están conectados los cátodos de los diodos serían  $\geq 0$ , con al menos una de ellas (la procedente de la resistencia)  $> 0$ , lo cual es imposible. Supongamos que el diodo D2 está en OFF. Se obtiene el circuito



Se ha de verificar  $I' \geq 0$  y  $-5 \leq V_{AK2} \leq 0,7$ . Por inspección,  $I = 0$ . Aplicando la segunda ley

de Kirchoff a la malla con corriente  $I'$  se obtiene

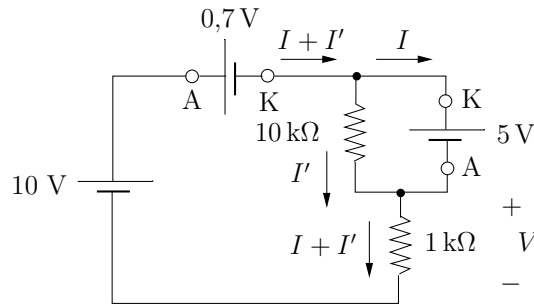
$$10 = 0,7 + 10I' + (1)I' = 0,7 + 11I' ,$$

$$I' = \frac{10 - 0,7}{11} = \frac{9,3}{11} = 0,8455 ,$$

que es  $\geq 0$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $10\text{ k}\Omega$ , se obtiene

$$V_{AK2} = -10I' = -(10)(0,8455) = -8,455 ,$$

que es  $< -5$ . Así pues, el estado supuesto para el diodo D2 no es correcto. Supongamos que está en RUPTURA. Se obtiene el circuito



Se ha de verificar  $I \geq 0$  e  $I + I' \geq 0$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $10\text{ k}\Omega$ , se obtiene

$$5 = 10I' ,$$

$$I' = \frac{5}{10} = 0,5 .$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $10\text{ V}$ , la fuente de tensión de valor  $0,7\text{ V}$ , la fuente de tensión de valor  $5\text{ V}$  y la resistencia de valor  $1\text{ k}\Omega$ , se obtiene

$$10 = 0,7 + 5 + (1)(I + I') = 5,7 + I + I' = 5,7 + I + 0,5 = 6,2 + I ,$$

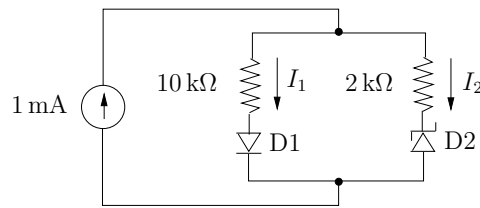
$$I = 10 - 6,2 = 3,8 ,$$

que es  $\geq 0$ . Además,  $I + I' = 3,8 + 0,5 = 4,3$ , que también es  $\geq 0$ . Así pues, los estados supuestos para los diodos son correctos e  $I = 3,8\text{ mA}$ . La tensión  $V$  puede ser calculada aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $1\text{ k}\Omega$ . Se obtiene

$$V = (1)(I + I') = I + I' = 3,8 + 0,5 = 4,3\text{ V} .$$

**Problema 13:** Utilizando para el diodo D1 el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7\text{ V}$  y para el diodo D2 el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7\text{ V}$  y tensión cátodo-ánodo  $5\text{ V}$  en ruptura,

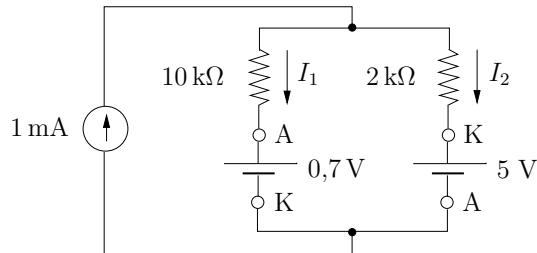
analice el circuito de la figura y determine los valores de las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ .



**Solución:** Supongamos que el diodo D1 está en estado OFF. Tenemos  $I_2 = 1$  mA, implicando que D2 estará en estado RUPTURA. Entonces, aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por los diodos y las resistencias, se obtiene

$$V_{AK1} = 5 + 2I_2 = 5 + (2)(1) = 7,$$

que no es  $\leq 0,7$ . Así pues el diodo D1 no estará en OFF. Supongamos que el diodo D1 está en ON y que el diodo D2 está en RUPTURA. Se obtiene el circuito



Se ha de verificar  $I_1 \geq 0$  e  $I_2 \geq 0$ . Aplicando la primera ley de Kirchoff al nodo conectado a las resistencias, se obtiene

$$1 = I_1 + I_2.$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por las fuentes de tensión y las resistencias, se obtiene

$$0,7 + 10I_1 = 5 + 2I_2,$$

$$10I_1 - 2I_2 = 4,3,$$

que combinada con  $I_1 + I_2 = 1$  da el sistema lineal

$$I_1 + I_2 = 1$$

$$10I_1 - 2I_2 = 4,3,$$

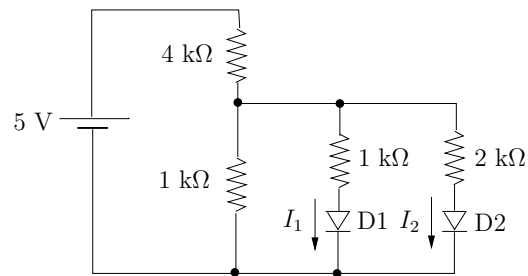
cuya solución es

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4,3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-6,3}{-12} = 0,5250,$$

$$I_2 = 1 - I_1 = 1 - 0,5250 = 0,4750.$$

Dado que tanto  $I_1$  como  $I_2$  son  $\geq 0$ , los estados supuestos para los diodos son correctos,  $I_1 = 0,5250$  mA e  $I_2 = 0,4750$  mA.

**Problema 14:** Utilizando para los diodos el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7 \text{ V}$ , analice el circuito de la figura y determine  $I_1$  e  $I_2$ .



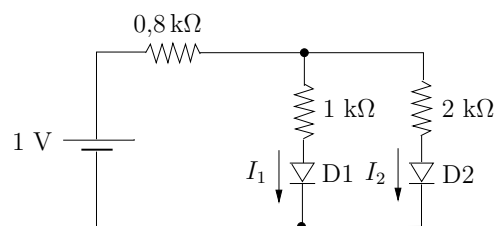
**Solución:** Calculando el equivalente de Thévenin del dipolo constituido por la fuente de tensión de valor 5 V y las dos resistencias de la izquierda, que tiene como salidas los extremos de la resistencia de 1 kΩ, se obtienen una tensión de Thévenin

$$V_{th} = \frac{1}{4 + 1} 5 = 1$$

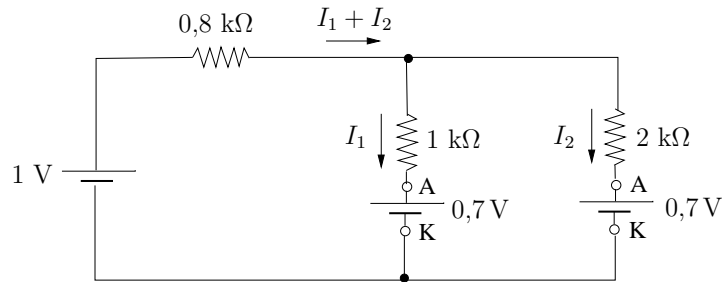
y una resistencia de Thévenin

$$R_{th} = 4 \parallel 1 = \frac{(4)(1)}{4 + 1} = 0,8.$$

Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin se obtiene el circuito



Supongamos que los dos diodos están en ON. Se obtiene el circuito



Se ha de verificar  $I_1 \geq 0$  e  $I_2 \geq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 1 V, la resistencia de valor 0,8 kΩ, la resistencia de valor 1 kΩ y la fuente de tensión de valor 0,7 V de la izquierda y a la malla formada por la fuente de tensión de valor 1 V, la resistencia de valor 0,8 kΩ, la resistencia de valor 2 kΩ y la fuente de tensión de valor 0,7 V de la derecha, se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= (0,8)(I_1 + I_2) + (1)I_1 + 0,7, \\ 1 &= (0,8)(I_1 + I_2) + 2I_2 + 0,7, \end{aligned}$$

que conducen al sistema lineal

$$\begin{aligned} 1,8I_1 + 0,8I_2 &= 0,3 \\ 0,8I_1 + 2,8I_2 &= 0,3, \end{aligned}$$

cuya solución es

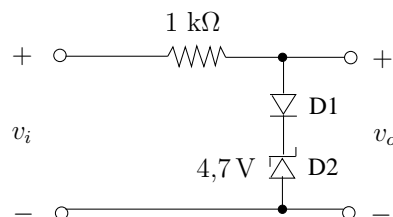
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,3 & 2,8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,8 & 0,8 \\ 0,8 & 2,8 \end{vmatrix}} = \frac{0,6}{4,4} = 0,1364,$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1,8 & 0,3 \\ 0,8 & 0,3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,8 & 0,8 \\ 0,8 & 2,8 \end{vmatrix}} = \frac{0,3}{4,4} = 0,06818.$$

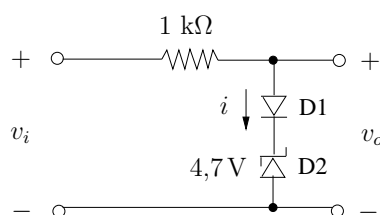
Dado que tanto  $I_1$  como  $I_2$  son  $\geq 0$ , los estados supuestos para los diodos son correctos,  $I_1 = 0,1364$  mA e  $I_2 = 0,06818$  mA.

**Problema 15:** Utilizando para el diodo D1 el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7$  V y para el diodo D2 el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7$  V y tensión cátodo-ánodo igual a la tensión de ruptura indicada para corrientes inversas, determine la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$

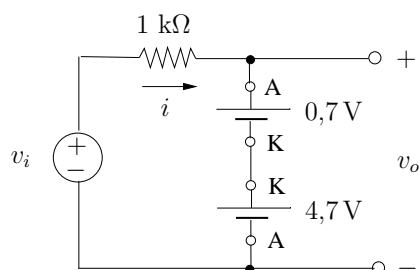
del cuadripolo de la figura.



**Solución:** Una forma sencilla de analizar el circuito es considerar los posibles valores de la corriente  $i$ :



El diodo D1 impide que  $i$  tome valores  $< 0$ . Así pues,  $i \geq 0$ . Determinemos los valores de  $v_i$  para los cuales  $i > 0$  y la relación entre  $v_o$  y  $v_i$  en ese caso. D1 sólo podrá estar en ON y D2 sólo podrá estar en RUPTURA, obteniéndose el circuito



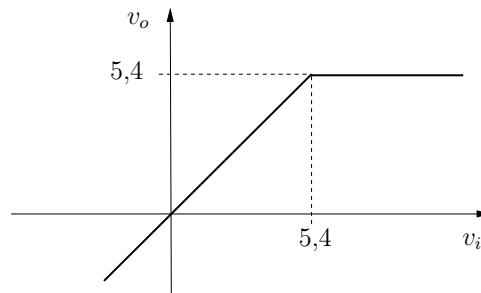
Por inspección, obtenemos  $v_o = 4,7 + 0,7 = 5,4$ . Aplicando la segunda ley de Kirchhoff, se obtiene

$$v_i = (1)i + 0,7 + 4,7 = 5,4 + i,$$

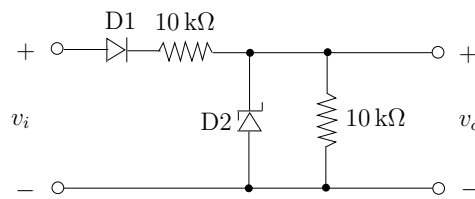
$$i = v_i - 5,4.$$

Imponiendo la condición  $i > 0$ , se obtiene  $v_i > 5,4$ . Así pues,  $v_o = 5,4$  para  $v_i > 5,4$ . Para  $v_i \leq 5,4$ ,  $i = 0$  y siendo nula la diferencia de tensión en la resistencia de  $1\text{ k}\Omega$ , se obtiene

$v_o = v_i$ . La siguiente figura representa gráficamente la función de transferencia.



**Problema 16:** Utilizando para el diodo D1 el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7 \text{ V}$  y para el diodo D2 el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7 \text{ V}$  y tensión cátodo-ánodo igual a  $5 \text{ V}$  para corrientes inversas, analice el circuito de la figura y: 1) determine la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ ; 2) suponiendo  $v_i$  senoidal con amplitud  $15 \text{ V}$ , determine el valor medio  $\overline{V_o}$  y el valor eficaz  $V_{o,\text{eff}}$  de la tensión de salida  $v_o$ .

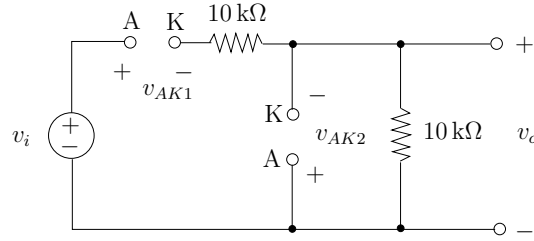


**Solución:** 1) Hacemos un barrido de  $v_i$  desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ . Obtenemos así una sucesión de intervalos para  $v_i$  en los que los estados de los diodos se mantienen constantes. Los extremos derechos de los intervalos y los diodos que cambian de estado al pasar de un intervalo al siguiente son determinados imponiendo las condiciones de estado de los diodos. Los diodos deben cambiar a estados correspondientes a tramos lineales adyacentes a los tramos lineales de los estados en los que están los diodos antes del cambio. En caso de que un estado tenga dos estados “adyacentes”, es necesario analizar qué desigualdad falla al aumentar  $v_i$  para determinar a qué estado cambia el diodo.

Dado que el cuadripolo es pasivo, la potencia consumida por él tiene que ser  $\geq 0$ . Ello implica que, para  $v_i$  negativa, la corriente de entrada al cuadripolo o es 0 o va de  $-$  a  $+$ , pues en caso contrario la potencia consumida por el cuadripolo sería  $< 0$ . Eso sólo es posible con D1 en OFF. Así pues para  $v_i$  negativa D1 está en OFF. Con D1 en OFF, el conjunto formado por D2 y la resistencia de la derecha queda aislado y la corriente por D2 es 0, implicando que D2 también estará en OFF. Así pues, para  $v_i$  negativa, D1 y D2 están en OFF. Supongamos dichos estados, analicemos el cuadripolo y determinemos hasta qué valor de  $v_i$  se mantienen los estados, qué



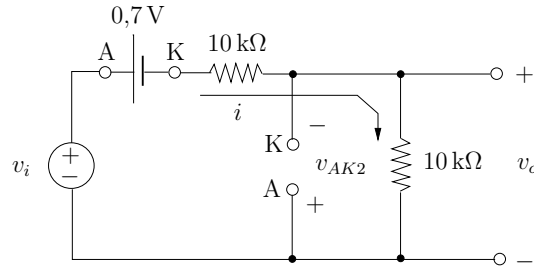
diodos cambian de estado al crecer  $v_i$  y a qué estado cambian. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $v_{AK1} \leq 0,7$  y  $-5 \leq v_{AK2} \leq 0,7$ . Las corrientes por todas las ramas del circuito son nulas y, aplicando la ley de Ohm a la resistencia de la derecha, se obtiene  $v_{AK2} = 0$ , que es  $\geq -5$  y  $\leq 0,7$ . Además,  $v_o = 0$ . Por otro lado, aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , los diodos y la resistencia de la izquierda, se obtiene

$$v_i = v_{AK1} + 0 - v_{AK2},$$

de donde  $v_{AK1} = v_i + v_{AK2} = v_i$ . La condición  $v_{AK1} \leq 0,7$  se traduce en  $v_i \leq 0,7$ . Así pues, para  $v_i \in (-\infty, 0,7]$ , los diodos D1 y D2 están en OFF y  $v_o = 0$ . Al hacerse  $v_i > 0,7$ , falla la condición de estado del diodo D1, que pasa a ON. En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = 0,7$ , D1 está en ON y D2 en OFF. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i \geq 0$  y  $-5 \leq v_{AK2} \leq 0,7$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla con corriente  $i$  se obtiene

$$v_i = 0,7 + 10i + 10i = 20i + 0,7,$$

$$i = \frac{v_i - 0,7}{20}.$$

Imponiendo  $i \geq 0$ , se obtiene la condición  $v_i \geq 0,7$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. La tensión  $v_o$  puede obtenerse aplicando la ley de Ohm a la resistencia de la derecha:

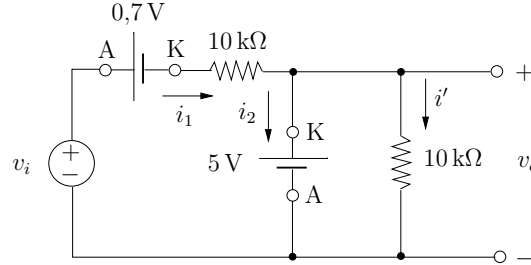
$$v_o = 10i = 10 \frac{v_i - 0,7}{20} = \frac{1}{2}v_i - 0,35.$$

Por inspección,

$$v_{AK2} = -v_o = -\frac{1}{2}v_i + 0,35.$$

Imponiendo la condición  $-5 \leq v_{AK2} \leq -0,7$ , se obtiene  $-5 \leq -(1/2)v_i + 0,35 \leq 0,7$ ,  $-10 \leq -v_i + 0,7 \leq 1,4$ ,  $-0,7 \leq v_i \leq 10,7$ . Al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo falla la condición  $v_i \leq 10,7$ . Dicha condición procede de  $v_{AK2} \geq -5$ . Así pues, para  $v_i \in (0,7, 10,7]$

D1 está en ON, D2 está en OFF, y  $v_o = (1/2)v_i - 0,35$ . Al hacerse  $v_i > 10,7$  el diodo D2 pasa a RUPTURA. En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = 10,7$ , D1 está en ON y D2 en RUPTURA. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i_1 \geq 0$  e  $i_2 \geq 0$ . Por inspección,  $v_o = 5$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia por la que circula la corriente  $i'$  se obtiene

$$5 = 10i',$$

$$i' = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , la fuente de tensión de valor 0,7 V, la resistencia de valor 10 kΩ de la izquierda y la fuente de tensión de valor 5 V, se obtiene

$$v_i = 0,7 + 10i_1 + 5 = 5,7 + 10i_1,$$

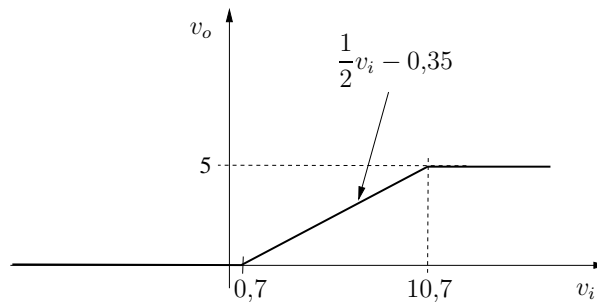
$$i_1 = \frac{v_i - 5,7}{10}.$$

La condición  $i_1 \geq 0$  se traduce en  $v_i \geq 5,7$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. Aplicando la primera ley de Kirchhoff al nodo en el que confluyen las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i'$ , se obtiene

$$i_1 = i_2 + i',$$

$$i_2 = i_1 - i' = \frac{v_i - 5,7}{10} - 0,5 = \frac{v_i}{10} - 1,07.$$

La condición  $i_2 \geq 0$  se traduce en  $v_i \geq 10,7$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. Así pues, para  $v_i \in (10,7, \infty)$ , D1 está en ON, D2 está en RUPTURA y  $v_o = 5$ . La siguiente figura representa gráficamente la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ .



2) Sea  $\omega$  la pulsación de  $v_i$ . Usando la variable  $\alpha = \omega t$ , usando la relación  $\omega = 2\pi/T$ , donde  $T$

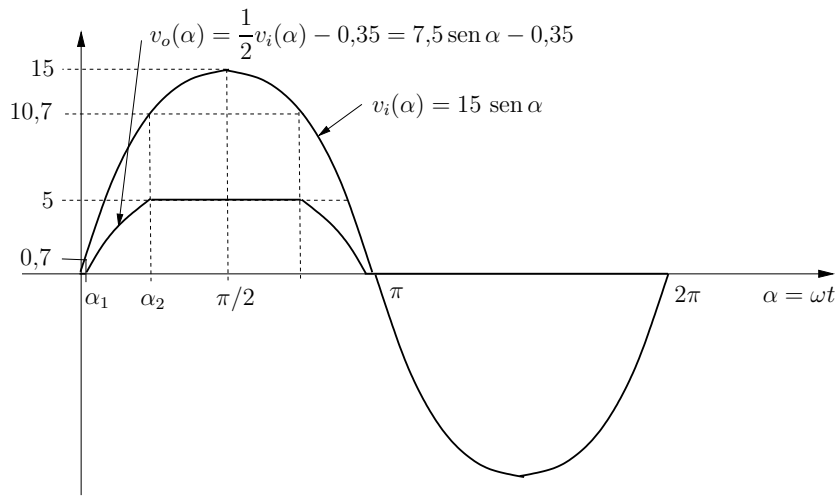
es el periodo de  $v_i$ , y haciendo el cambio de variable  $\alpha = \omega t$ , se obtiene

$$\bar{V}_o = \frac{1}{T} \int_0^T v_o(t) dt = \frac{1}{\omega T} \int_0^{\omega T} v_o(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_o(\alpha) d\alpha ,$$

y, de modo similar,

$$V_{o,\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v_o(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_o(\alpha)^2 d\alpha .$$

Empecemos determinando la “forma” de  $v_o(\alpha)$  usando la forma de  $v_i(\alpha)$  y la función de transferencia. La siguiente figura la ilustra.



Utilizando las características y simetrías de  $v_o(\alpha)$ , se obtiene

$$\bar{V}_o = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_1} v_o(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \left( 2 \int_{\alpha_1}^{\pi/2} v_o(\alpha) d\alpha \right) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} v_o(\alpha) d\alpha . \quad (1.1)$$

De modo similar,

$$V_{o,\text{eff}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} v_o(\alpha)^2 d\alpha . \quad (1.2)$$

El problema queda pues reducido a evaluar las integrales

$$I_1 = \int_{\alpha_1}^{\pi/2} v_o(\alpha) d\alpha ,$$

$$I_2 = \int_{\alpha_1}^{\pi/2} v_o(\alpha)^2 d\alpha .$$

Empecemos calculando  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (en radianes):

$$0,7 = 15 \text{ sen } \alpha_1 ,$$

$$\alpha_1 = \arcsen\left(\frac{0,7}{15}\right) = \arcsen(0,04667) = 0,04669.$$

$$10,7 = 15 \sen \alpha_2,$$

$$\alpha_2 = \arcsen\left(\frac{10,7}{15}\right) = \arcsen(0,7133) = 0,7942.$$

Evaluemos la integral  $I_1$ . Se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v_o(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\pi/2} v_o(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{0,04669}^{0,7942} (7,5 \sen \alpha - 0,35) d\alpha + 5 \left( \frac{\pi}{2} - 0,7942 \right) \\ &= 7,5 \int_{0,04669}^{0,7942} \sen \alpha d\alpha - (0,35)(0,7942 - 0,04669) + 3,883 \\ &= (7,5)[\cos(0,04669) - \cos(0,7942)] + 3,621 \\ &= 5,856. \end{aligned}$$

Evaluemos la integral  $I_2$ . Se obtiene

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v_o(\alpha)^2 d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\pi/2} v_o(\alpha)^2 d\alpha \\ &= \int_{0,04669}^{0,7942} (7,5 \sen \alpha - 0,35)^2 d\alpha + 25 \left( \frac{\pi}{2} - 0,7942 \right) \\ &= \int_{0,04669}^{0,7942} (56,25 \sen^2 \alpha - 5,25 \sen \alpha + 0,1225) d\alpha + 19,41 \\ &= 56,25 \int_{0,04669}^{0,7942} \sen^2 \alpha d\alpha - 5,25 \int_{0,04669}^{0,7942} \sen \alpha d\alpha + 0,1225(0,7942 - 0,04669) \\ &\quad + 19,41 \\ &= 56,25 \left[ \frac{\alpha}{2} - \frac{\sen 2\alpha}{4} \right]_{0,04669}^{0,7942} - (5,25)[\cos(0,04669) - \cos(0,7942)] + 19,50 \\ &= (28,13)(0,7942 - 0,04669) - (14,06)[\sen(1,588) - \sen(0,09338)] + 17,94 \\ &= 26,22. \end{aligned}$$

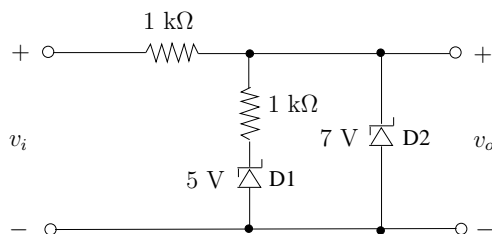
Finalmente, usando (1.1) y (1.2), se obtiene

$$\overline{V}_o = \frac{I_1}{\pi} = \frac{5,856}{\pi} = 1,864 \text{ V},$$

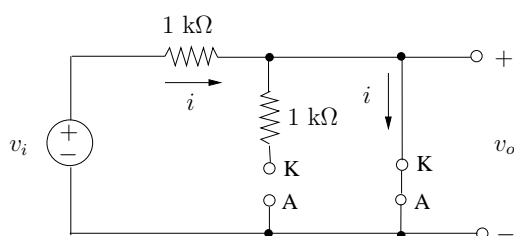
$$V_{o,\text{eff}}^2 = \frac{I_2}{\pi} = \frac{26,22}{\pi} = 8,346,$$

$$V_{o,\text{eff}} = \sqrt{8,346} = 2,889 \text{ V}.$$

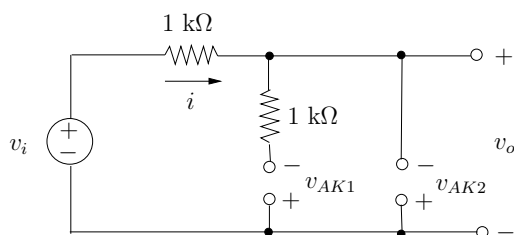
**Problema 17:** Utilizando para los diodos los modelos con tensión ánodo-cátodo nula para corrientes directas y tensión cátodo-ánodo igual a la tensión de ruptura indicada para corrientes inversas, analice el circuito de la figura y determine la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ .



**Solución:** Intuitivamente, parece que para  $v_i \rightarrow -\infty$  el diodo D2 deberá estar en ON. Supuesto D2 en ON,  $v_o$  valdrá 0, implicando que D1 estará en OFF. Así pues, supongamos que para  $v_i \rightarrow -\infty$ , D1 está en OFF y D2 está en ON. Se obtiene el circuito

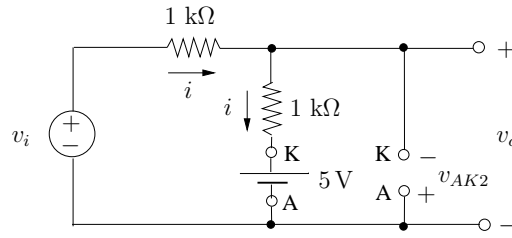


La condición a imponer, correspondiente al diodo D2, es  $-i \geq 0, i \leq 0$ . Evidentemente,  $v_o = 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla externa, obtenemos  $v_i = (1)i = i$ , dando la condición para  $v_i$ ,  $v_i \leq 0$ . Así pues, para  $v_i \in (-\infty, 0]$ , D1 está en OFF, D2 está en ON y  $v_o = 0$ . Al hacerse  $v_i > 0$ ,  $i$  se hará  $> 0$  y dejará de cumplirse la condición de estado de D2, que cambiará al estado OFF. Supongamos que D1 permanece en el estado OFF. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $-5 \leq v_{AK1} \leq 0$  y  $-7 \leq v_{AK2} \leq 0$ . La corriente  $i$  valdrá 0, la diferencia de tensión en la resistencia de  $1 \text{ k}\Omega$  conectada a la fuente de tensión de valor  $v_i$  valdrá 0 y  $v_o$  será igual a  $v_i$ . Dado que  $v_i = -v_{AK1}$ , la condición  $-5 \leq v_{AK1} \leq 0$  se traduce en la condición  $-5 \leq -v_i \leq 0, 0 \leq v_i \leq 5$ . Dado que  $v_i = -v_{AK2}$ , la condición  $-7 \leq v_{AK2} \leq 0$  se traduce en la condición  $-7 \leq -v_i \leq 0, 0 \leq v_i \leq 7$ . Así pues, para  $v_i \in [0, 5]$  D1 y D2 estarán en OFF y  $v_o = v_i$ . Al hacerse  $v_i > 5$ , el diodo D1 pasará a RUPTURA, pues fallará la desigualdad  $v_{AK1} \geq -5$  de la condición de estado de D1, permaneciendo D2 en OFF. En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = 5$ , D1 estará en RUPTURA y D2 en OFF. Se obtiene el

circuito



Se ha de imponer  $i \geq 0$  y  $-7 \leq v_{AK2} \leq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , las resistencias de valor  $1\text{ k}\Omega$  y la fuente de tensión de valor  $5\text{ V}$ , se obtiene

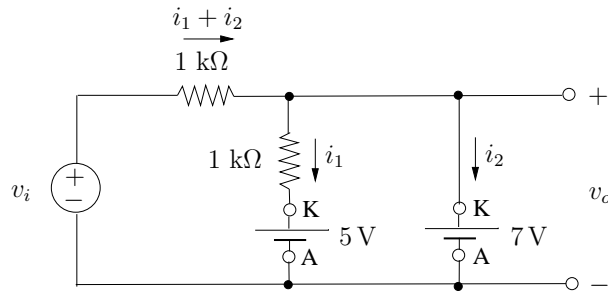
$$v_i = (1)i + (1)i + 5 = 2i + 5,$$

$$i = \frac{v_i - 5}{2},$$

que se mantiene  $\geq 0$  al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. La tensión  $v_o$  resulta valer

$$v_o = 5 + (1)i = 5 + i = 5 + \frac{v_i - 5}{2} = \frac{1}{2}v_i + \frac{5}{2}.$$

Utilizando  $v_{AK2} = -v_o$ , la condición  $-7 \leq v_{AK2} \leq 0$  se traduce en  $-7 \leq -v_o \leq 0$ ,  $0 \leq v_o \leq 7$ , y utilizando  $v_o = v_i/2 + 5/2$ , en la condición  $0 \leq v_i/2 + 5/2 \leq 7$ ,  $0 \leq v_i + 5 \leq 14$ ,  $-5 \leq v_i \leq 9$ . Así pues, para  $v_i \in [5, 9]$ , D1 estará en RUPTURA, D2 estará en OFF y  $v_o = v_i/2 + 5/2$ . Al hacerse  $v_i > 9$ , el diodo D2 pasará a RUPTURA, pues fallará la desigualdad  $v_{AK2} \geq -7$  de la condición de estado de D2, permaneciendo D1 en RUPTURA. En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = 9$ , los dos diodos estarán en RUPTURA. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i_1 \geq 0$  e  $i_2 \geq 0$ . Por inspección,  $v_o = 7$ . Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , las resistencias de valor  $1\text{ k}\Omega$  y la fuente de tensión de valor  $5\text{ V}$  y a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , la resistencia de la izquierda y la fuente de tensión de valor  $7\text{ V}$ , se obtiene

$$v_i = (1)(i_1 + i_2) + (1)i_1 + 5$$

$$v_i = (1)(i_1 + i_2) + 7$$

y el sistema lineal

$$2i_1 + i_2 = v_i - 5$$

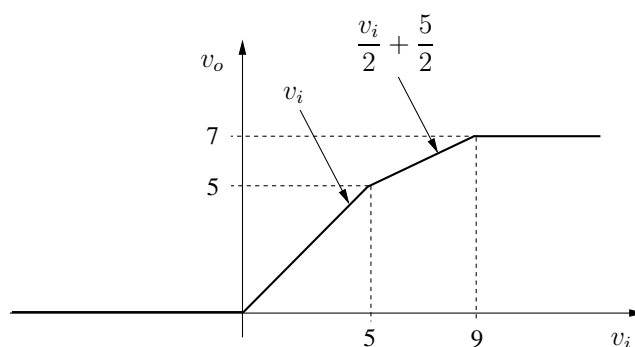
$$i_1 + i_2 = v_i - 7,$$

cuya solución es

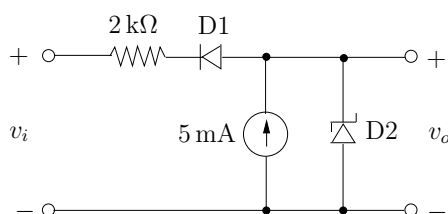
$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_i - 5 & 1 \\ v_i - 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$i_2 = v_i - 7 - i_1 = v_i - 7 - 2 = v_i - 9.$$

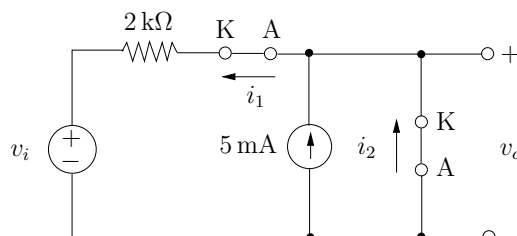
Las condiciones  $i_1 \geq 0$  e  $i_2 \geq 0$  no dejan de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo, implicando que para  $v_i \in [9, \infty)$  D1 y D2 estarán en RUPTURA y  $v_o = 7$ . La siguiente figura representa gráficamente la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ .



**Problema 18:** Utilizando para el diodo D1 el modelo “diodo ideal” y para el diodo D2 el modelo con tensión ánodo-cátodo nula en conducción directa y tensión cátodo-ánodo igual a 7 V para corrientes inversas, analice el circuito de la figura y determine la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ .



**Solución:** Supondremos que para  $v_i \rightarrow -\infty$ , los dos diodos están en ON. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i_1 \geq 0$  e  $i_2 \geq 0$ . Por inspección,  $v_o = 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff

a la malla externa, se obtiene

$$v_i = -2i_1,$$

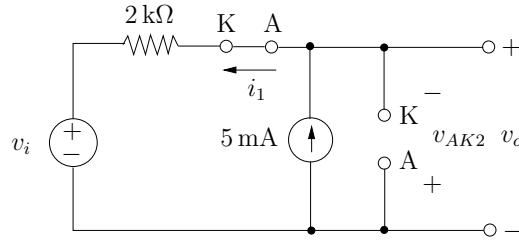
$$i_1 = -\frac{v_i}{2}.$$

La condición  $i_1 \geq 0$  se traduce pues en  $v_i \leq 0$ . Aplicando la primera ley de Kirchoff al nodo conectado al cátodo del diodo D2 se obtiene

$$5 + i_2 = i_1,$$

$$i_2 = i_1 - 5 = -\frac{v_i}{2} - 5.$$

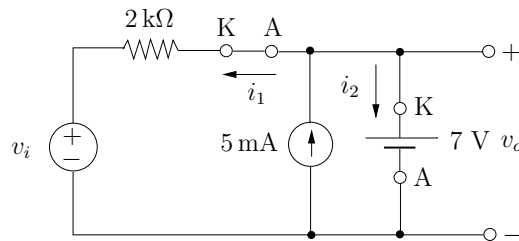
La condición  $i_2 \geq 0$  se traduce pues en  $-v_i/2 - 5 \geq 0$ ,  $v_i/2 \leq -5$ ,  $v_i \leq -10$ . Así pues, para  $v_i \in (-\infty, -10]$  los dos diodos están en ON y  $v_o = 0$ . Al hacerse  $v_i > -10$  el diodo D2 cambia de estado y pasará a OFF, pues fallará la condición  $i_2 \geq 0$ . En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = -10$ , D1 estará en ON y D2 en OFF. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i_1 \geq 0$  y  $-7 \leq v_{AK2} \leq 0$ . Por inspección,  $i_1 = 5$ , que es  $\geq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla externa se obtiene

$$v_o = 2i_1 + v_i = (2)(5) + v_i = v_i + 10.$$

Por inspección,  $v_{AK2} = -v_o$  y la condición  $-7 \leq v_{AK2} \leq 0$  se traduce en  $-7 \leq -v_o \leq 0$ ,  $0 \leq v_o \leq 7$ , que usando  $v_o = v_i + 10$  da  $0 \leq v_i + 10 \leq 7$ ,  $-10 \leq v_i \leq -3$ . Al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo fallará la desigualdad  $v_i \leq -3$ . Dado que dicha desigualdad procede de  $v_{AK2} \geq -7$ , en ese punto el diodo D2 pasará a RUPTURA. Así pues, para  $v_i \in (-10, -3]$  D1 está en ON, D2 está en OFF y  $v_o = v_i + 10$ . Al hacerse  $v_i > -3$  el diodo D2 pasará a RUPTURA. En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = -3$ , D1 estará en ON y D2 en RUPTURA. Se obtiene el circuito



Se de imponer  $i_1 \geq 0$  e  $i_2 \geq 0$ . Por inspección,  $v_o = 7$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla externa, se obtiene

$$v_i = -2i_1 + 7,$$



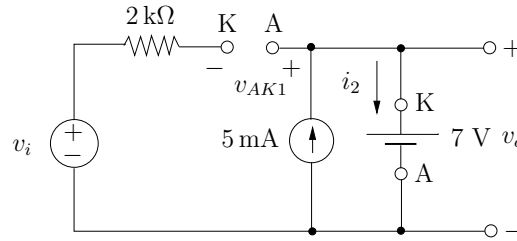
$$i_1 = \frac{7 - v_i}{2}.$$

La condición  $i_1 \geq 0$  se traduce en  $v_i \leq 7$ . Aplicando la primera ley de Kirchoff al nodo al que está conectado el ánodo del diodo D1 se obtiene

$$5 = i_1 + i_2,$$

$$i_2 = 5 - i_1 = 5 - \frac{7 - v_i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{v_i}{2},$$

y la condición  $i_2 \geq 0$  se traduce en  $3/2 + v_i/2 \geq 0$ ,  $3 + v_i \geq 0$ ,  $v_i \geq -3$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. Así pues, para  $v_i \in (-3, 7]$ , D1 está en ON, D2 está en RUPTURA, y  $v_o = 7$ . Al hacerse  $v_i > 7$ , fallará la condición de estado de D1, que pasará a OFF. En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = 7$ , D1 está en OFF y D2 está en RUPTURA. Se obtiene el circuito

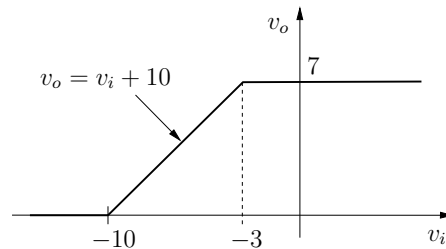


Se ha de imponer  $v_{AK1} \leq 0$  e  $i_2 \geq 0$ . Por inspección,  $v_o = 7$  e  $i_2 = 5$ , que es  $\geq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla externa, se obtiene

$$v_i = 0 - v_{AK1} + 7,$$

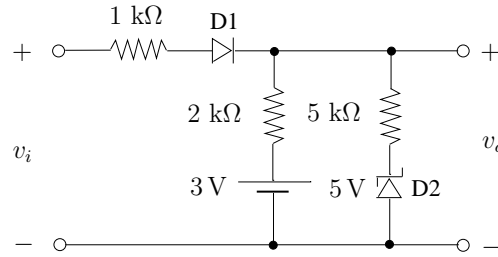
$$v_{AK1} = -v_i + 7.$$

La condición  $v_{AK1} \leq 0$  se traduce en  $-v_i + 7 \leq 0$ ,  $v_i \geq 7$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. Así pues, para  $v_i \in (7, \infty)$ , D1 está en OFF, D2 está en RUPTURA y  $v_o = 7$ . La siguiente figura representa gráficamente la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ .

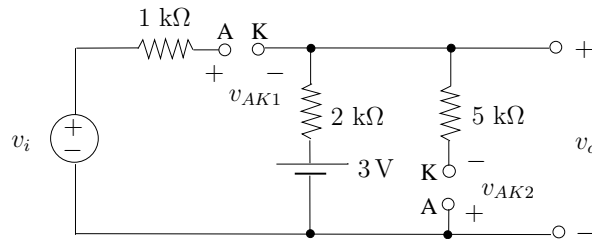


**Problema 19:** Utilizando para el diodo D1 el modelo “diodo ideal” y para el diodo D2 el modelo con tensión ánodo-cátodo nula para corrientes directas y tensión cátodo-ánodo igual a la tensión de ruptura indicada para corrientes inversas, analice el circuito de la figura y determine la función

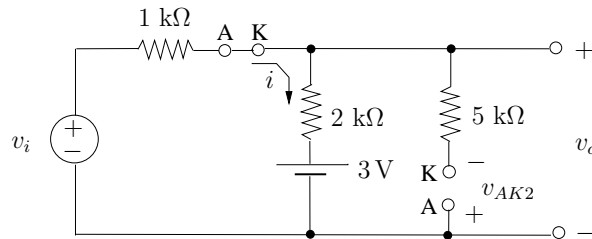
de transferencia  $v_o = F(v_i)$ .



**Solución:** Intuitivamente, parece que para  $v_i \rightarrow -\infty$  los dos diodos estarán en OFF. Supongámoslo. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $v_{AK1} \leq 0$  y  $-5 \leq v_{AK2} \leq 0$ . Por inspección, teniendo en cuenta que todas las corrientes son nulas,  $v_o = 3$ ,  $v_{AK1} = v_i - 3$  y  $v_{AK2} = -3$ . La condición  $-5 \leq v_{AK2} \leq 0$  es verificada. La condición  $v_{AK1} \leq 0$  se traduce en  $v_i - 3 \leq 0$ ,  $v_i \leq 3$ . Así pues, para  $v_i \in (-\infty, 3]$  los dos diodos están en OFF y  $v_o = 3$ . Al hacerse  $v_i > 3$ , el diodo D1 pasará a ON. En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = 3$ , D1 está en ON y D2 está en OFF. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i \geq 0$  y  $-5 \leq v_{AK2} \leq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , la resistencia de valor  $1 \text{ k}\Omega$ , el diodo D1, la resistencia de valor  $2 \text{ k}\Omega$  y la fuente de tensión de valor  $3 \text{ V}$ , se obtiene

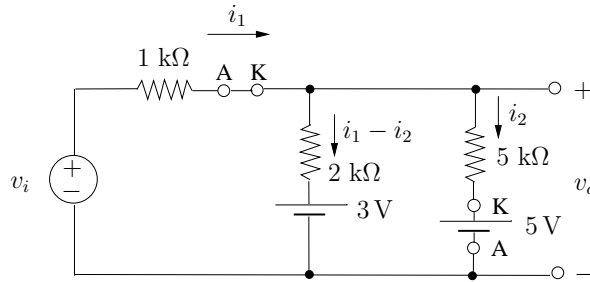
$$v_i = (1)i + 2i + 3 = 3i + 3,$$

$$i = \frac{v_i - 3}{3} = \frac{1}{3} v_i - 1.$$

La tensión  $v_o$  resulta valer

$$v_o = 3 + 2i = 3 + 2 \left( \frac{1}{3} v_i - 1 \right) = \frac{2}{3} v_i + 1,$$

y  $v_{AK2} = -v_o = -(2/3)v_i - 1$ . La condición  $i \geq 0$  se traduce en  $v_i/3 - 1 \geq 0$ ,  $v_i \geq 3$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. La condición  $-5 \leq v_{AK2} \leq 0$  se traduce en  $-5 \leq -(2/3)v_i - 1 \leq 0$ ,  $0 \leq (2/3)v_i + 1 \leq 5$ ,  $0 \leq v_i + 1,5 \leq 7,5$ ,  $-1,5 \leq v_i \leq 6$ . Al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo dejará de cumplirse  $v_i \leq 6$ . Así pues, para  $v_i \in (3, 6]$ , el diodo D1 está en ON, el diodo D2 está en OFF y  $v_o = (2/3)v_i + 1$ . Al hacerse  $v_i > 6$ , el diodo D2 pasará a RUPTURA, pues fallará la desigualdad  $v_{AK2} \geq -5$ . En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = 6$ , D1 está en ON y D2 en RUPTURA. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i_1 \geq 0$  e  $i_2 \geq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , la resistencia de valor  $1 \text{ k}\Omega$ , la resistencia de valor  $2 \text{ k}\Omega$  y la fuente de tensión de valor  $3 \text{ V}$  y a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , la resistencia de valor  $1 \text{ k}\Omega$ , la resistencia de valor  $5 \text{ k}\Omega$  y la fuente de tensión de valor  $5 \text{ V}$ , se obtiene

$$v_i = (1)i_1 + 2(i_1 - i_2) + 3,$$

$$v_i = (1)i_1 + 5i_2 + 5,$$

que conducen al sistema lineal

$$3i_1 - 2i_2 = v_i - 3$$

$$i_1 + 5i_2 = v_i - 5,$$

cuya solución es

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_i - 3 & -2 \\ v_i - 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{7v_i - 25}{17} = 0,4118v_i - 1,471,$$

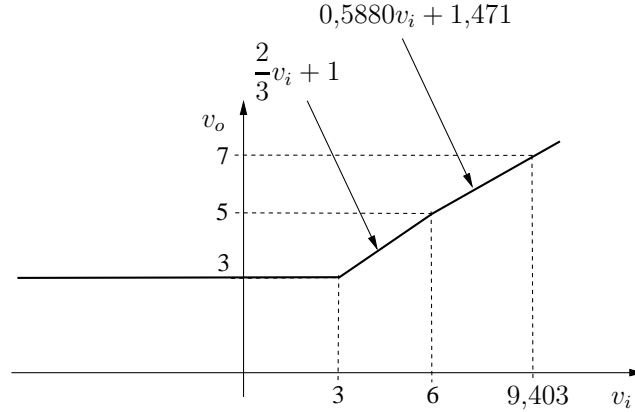
$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & v_i - 3 \\ 1 & v_i - 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2v_i - 12}{17} = 0,1176v_i - 0,7059.$$

La tensión  $v_o$  resulta valer

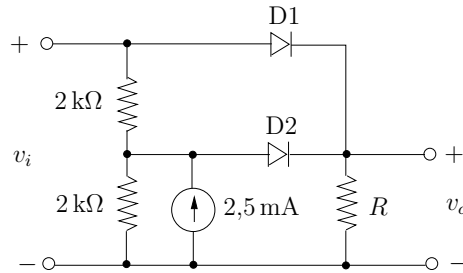
$$v_o = 5 + 5i_2 = 5 + (5)(0,1176v_i - 0,7059) = 0,5880v_i + 1,471.$$

Imponiendo  $i_1 \geq 0$ , se obtiene  $0,4118v_i - 1,471 \geq 0$ ,  $v_i \geq 1,471/0,4118 = 3,572$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. Imponiendo  $i_2 \geq 0$ , se obtiene  $0,1176v_i - 0,7059 \geq 0$ ,

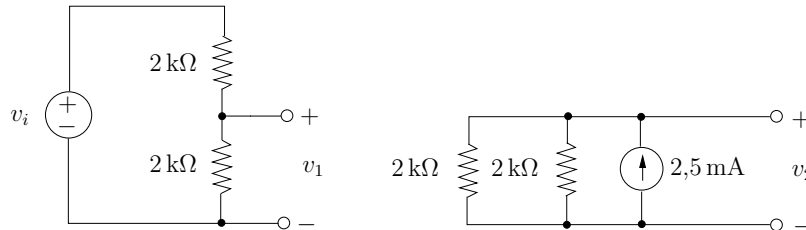
0,  $v_i \geq 0,7059/0,1176 = 6$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. Así pues, para  $v_i \in (6, \infty)$ , D1 está en ON, D2 está en RUPTURA y  $v_o = 0,5880v_i + 1,471$ . La siguiente figura representa gráficamente la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ .



**Problema 20:** Utilizando para los diodos el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 0,7 \text{ V}$ , analice el circuito de la figura con  $R = 20 \text{ k}\Omega$  y determine la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ . ¿Cuál es la función de transferencia para  $R \rightarrow \infty$ ? ¿Es una buena aproximación de ella la función de transferencia obtenida con  $R = 20 \text{ k}\Omega$ ? ¿Cómo se podría reducir el error de la aproximación?



**Solución:** Empezaremos encontrando el equivalente de Thévenin del dipolo formado por la fuente de tensión de valor  $v_i$ , las resistencias de valor  $2 \text{ k}\Omega$  y la fuente de corriente, que tiene como salidas el nodo conectado al ánodo del diodo D2 y el nodo conectado a los terminales — de la entrada y la salida del cuadripolo. Aplicando el principio de superposición, la tensión de Thévenin vale  $v_{th} = v_1 + v_2$ , donde  $v_1$  y  $v_2$  son las tensiones indicadas de los circuitos:



El de la izquierda es un divisor de tensión y, por tanto,

$$v_1 = \frac{2}{2+2} v_i = \frac{v_i}{2}.$$

El de la derecha es un divisor de corriente. Las corrientes por las dos resistencias son, por simetría, iguales y, por tanto,

$$v_2 = (2) \frac{1}{2} (2,5) = 2,5 ,$$

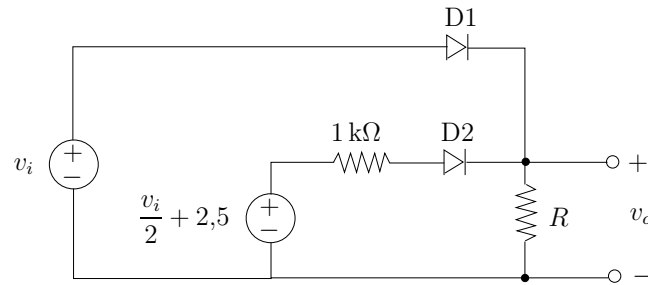
obteniéndose

$$v_{th} = v_1 + v_2 = \frac{v_i}{2} + 2,5 .$$

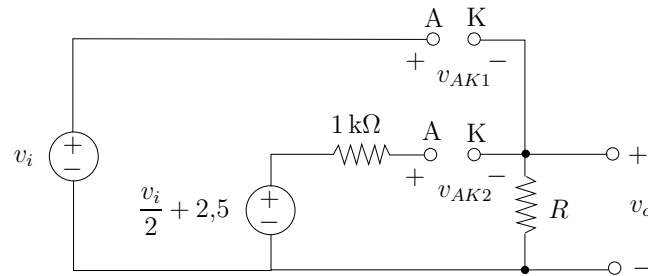
Anulando la fuente de tensión de valor  $v_i$  y la fuente de corriente de valor 2,5 mA, las resistencias de  $2\text{ k}\Omega$  quedan asociadas en paralelo y conectadas a la salida del dipolo, por lo que la resistencia de Thévenin valdrá

$$R_{th} = 2 \parallel 2 = 1\text{ k}\Omega .$$

Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin y teniendo en cuenta que el ánodo de D1 está conectado directamente al extremo positivo de la fuente de tensión de valor  $v_i$ , resulta que el cuadripolo que hay que analizar en el problema es equivalente al circuito



Parece claro que para  $v_i \rightarrow -\infty$  los dos diodos deberán estar en OFF. Supongamos pues los dos diodos en OFF. Se obtiene el circuito



Hemos de imponer  $v_{AK1} \leq 0,7$  y  $v_{AK2} \leq 0,7$ . La corriente por la resistencia de valor  $R$  es nula y, aplicando la ley de Ohm a dicha resistencia,  $v_o = 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla externa, se obtiene

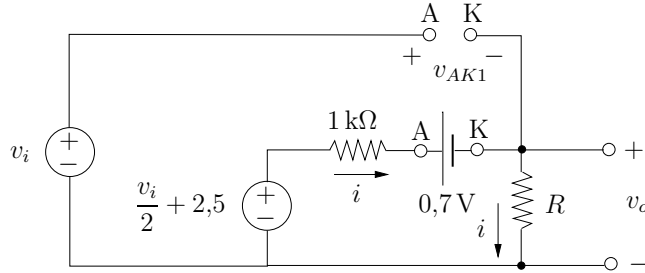
$$v_i = v_{AK1} + v_o = v_{AK1} .$$

La condición  $v_{AK1} \leq 0,7$  se traduce pues en  $v_i \leq 0,7$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla interna, se obtiene

$$\frac{v_i}{2} + 2,5 = 0 + v_{AK2} + v_o = v_{AK2} .$$

La condición  $v_{AK2} \leq 0,7$  se traduce en  $v_i/2 + 2,5 \leq 0,7$ ,  $v_i \leq -3,6$ . Así pues, para  $v_i \in (-\infty, -3,6]$ , D1 y D2 están en OFF y  $v_o = 0$ . Al hacerse  $v_i > -3,6$ , fallará la condición

$v_{AK2} \leq 0,7$  y el diodo D2 pasará a ON. En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = -3,6$ , el diodo D1 está en OFF y el diodo D2 está en ON. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $v_{AK1} \leq 0,7$  e  $i \geq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla por la que circula la corriente  $i$ , se obtiene

$$\frac{v_i}{2} + 2,5 = (1)i + 0,7 + Ri = 21i + 0,7,$$

$$i = \frac{v_i}{42} + \frac{2,5 - 0,7}{21} = \frac{v_i + 3,6}{42}.$$

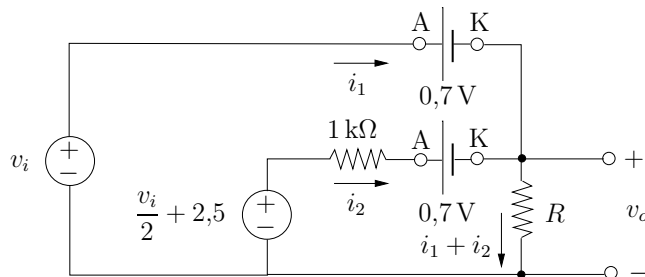
La condición  $i \geq 0$  se traduce en  $v_i + 3,6 \geq 0$ ,  $v_i \geq -3,6$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. La tensión  $v_o$  resulta valer

$$v_o = Ri = 20 \frac{v_i + 3,6}{42} = 0,4762v_i + 1,714.$$

Por último, la tensión  $v_{AK1}$  resulta valer

$$v_{AK1} = v_i - v_o = v_i - 0,4762v_i - 1,714 = 0,5238v_i - 1,714.$$

La condición  $v_{AK1} \leq 0,7$  se traduce en  $0,5238v_i - 1,714 \leq 0,7$ ,  $0,5238v_i \leq 2,414$ ,  $v_i \leq 2,414/0,5238 = 4,609$ . Así pues, para  $v_i \in (-3,6, 4,609]$ , D1 está en OFF, D2 en ON y  $v_o = 0,4762v_i + 1,714$ . Al hacerse  $v_i > 4,609$ , fallará la condición de estado de D1 y D1 pasará a ON. En el siguiente intervalo, que empieza en  $v_i = 4,609$ , los dos diodos están en ON. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i_1 \geq 0$  e  $i_2 \geq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla externa, se obtiene

$$v_i = 0,7 + v_o,$$

$$v_o = v_i - 0,7.$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla interna, se obtiene

$$\frac{v_i}{2} + 2,5 = (1)i_2 + 0,7 + v_o = i_2 + 0,7 + v_i - 0,7 = i_2 + v_i ,$$

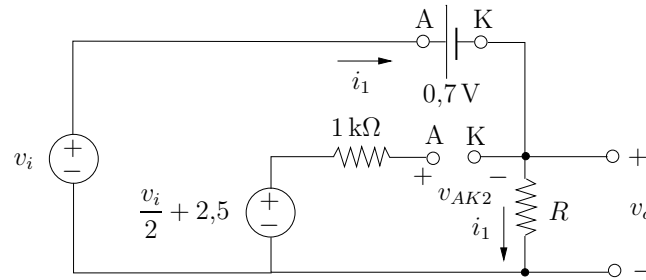
$$i_2 = -\frac{v_i}{2} + 2,5 .$$

La condición  $i_2 \geq 0$  se traduce en  $-v_i/2 + 2,5 \geq 0$ ,  $-v_i + 5 \geq 0$ ,  $v_i \leq 5$ . Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $R$ , se obtiene

$$v_o = R(i_1 + i_2) = Ri_1 + Ri_2 = 20i_1 + 20i_2 ,$$

$$i_1 = \frac{v_o}{20} - i_2 = \frac{v_i - 0,7}{20} + \frac{v_i}{2} - 2,5 = 0,55v_i - 2,535 .$$

La condición  $i_1 \geq 0$  se traduce en  $0,55v_i - 2,535 \geq 0$ ,  $v_i \geq 2,535/0,55 = 4,609$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. Así pues, para  $v_i \in (4,609, 5]$ , D1 y D2 están en ON y  $v_o = v_i - 0,7$ . Al hacerse  $v_i > 5$ , fallará la condición de estado de D2, y D2 pasará a OFF. En el nuevo intervalo, que empieza en  $v_i = 5$ , D1 está en ON y D2 en OFF. Se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $i_1 \geq 0$  y  $v_{AK2} \leq 0,7$ . Por inspección,

$$v_o = v_i - 0,7 .$$

Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $R$ , se obtiene

$$i_1 = \frac{v_o}{R} = \frac{v_i - 0,7}{20} ,$$

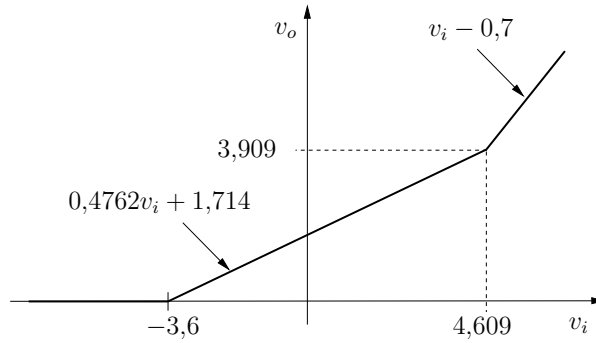
y la condición  $i_1 \geq 0$  se traduce en  $v_i \geq 0,7$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla interior, se obtiene

$$\frac{v_i}{2} + 2,5 = 0 + v_{AK2} + v_o ,$$

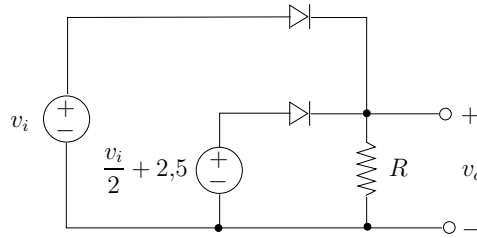
$$v_{AK2} = \frac{v_i}{2} + 2,5 - v_o = \frac{v_i}{2} + 2,5 - v_i + 0,7 = -\frac{v_i}{2} + 3,2 ,$$

y la condición  $v_{AK2} \leq 0,7$  se traduce en  $-v_i/2 + 3,2 \leq 0,7$ ,  $-v_i + 6,4 \leq 1,4$ ,  $v_i \geq 5$ , que no deja de cumplirse al aumentar  $v_i$  dentro del intervalo. Así pues, para  $v_i \in (5, \infty)$ , D1 está en

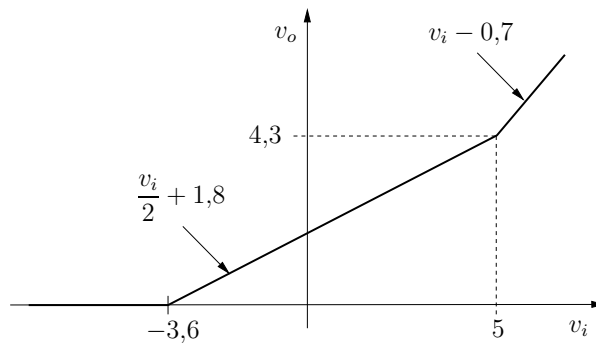
ON, D2 está en OFF y  $v_o = v_i - 0,7$ , finalizando la determinación de la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ . La siguiente figura la representa gráficamente.



Falta determinar la función de transferencia para  $R \rightarrow \infty$ . La corriente por la resistencia de valor  $R$  es la suma de las corrientes directas por los diodos y para cada  $v_i$  dicha corriente tiende a 0 para  $R \rightarrow \infty$ . Así pues, para  $R \rightarrow \infty$ , cuando el diodo D2 conduce lo hace con una corriente que tiende a 0. Ello permite ignorar la resistencia de valor  $1 \text{ k}\Omega$  en serie con la fuente de tensión de valor  $v_i/2 + 2,5$ , y concluir que, para  $R \rightarrow \infty$ , el circuito se comporta como el circuito



Dicho circuito es un selector de máximo. Con el modelo para los diodos con tensión umbral  $V_{D0}$ , la salida de un selector de máximo con entradas  $v_1, v_2, \dots, v_N$  vale  $\max\{0, v_1 - V_{D0}, v_2 - V_{D0}, \dots, v_N - V_{D0}\}$ . Así pues, para  $R \rightarrow \infty$ ,  $v_o = \max\{0, v_i - 0,7, v_i/2 + 1,8\}$ . La siguiente figura representa gráficamente la función de transferencia para  $R \rightarrow \infty$



Comparándola con la obtenida para  $R = 20 \text{ k}\Omega$ , podemos observar que ésta es una buena aproximación de la función de transferencia para  $R \rightarrow \infty$ , con un error máximo del orden de  $0,2 \text{ V}$ .



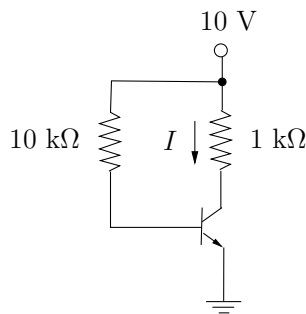
Para reducir dicho error máximo habría que aumentar  $R$ .



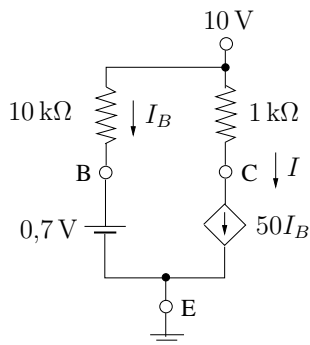
## Capítulo 2

# Problemas de Análisis de Circuitos con Transistores de Unión Bipolares

**Problema 21:** Usando para el BJT el modelo con parámetros  $\beta = 50$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ , analice el circuito de la figura y determine el valor de  $I$ .



**Solución:** Empezaremos suponiendo que el BJT está en ACTIVO. Se obtiene el circuito



Las condiciones a verificar son  $I_B \geq 0$  y  $V_{CE} \geq 0,2$ . Para calcular  $I_B$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor

$10\text{ k}\Omega$  y la fuente de tensión de valor  $0,7\text{ V}$ , obteniendo

$$10 = 10I_B + 0,7,$$

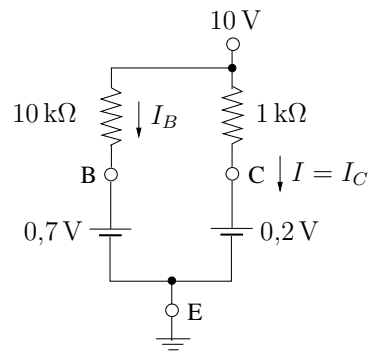
$$I_B = \frac{10 - 0,7}{10} = 0,93,$$

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $V_{CE}$  conociendo  $I_B$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $10\text{ V}$ , la resistencia de valor  $1\text{ k}\Omega$  y la fuente controlada de corriente, obteniendo

$$10 = (1)(50I_B) + V_{CE} = 50I_B + V_{CE},$$

$$V_{CE} = 10 - 50I_B = 10 - (50)(0,93) = -36,5,$$

que no es  $\geq 0,2$ . Así pues, el BJT no está en ACTIVO. Supongamos que está en SATURACIÓN. Se obtiene el circuito



Las condiciones a verificar son  $I_B \geq 0$ ,  $I_C \geq 0$ , e  $I_C \leq \beta I_B$ . El valor de  $I_B$  es idéntico al obtenido anteriormente,  $I_B = 0,93$ , que es  $\geq 0$ . Para calcular  $I_C$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $10\text{ V}$ , la resistencia de valor  $1\text{ k}\Omega$  y la fuente de tensión de valor  $0,2\text{ V}$ , obteniendo

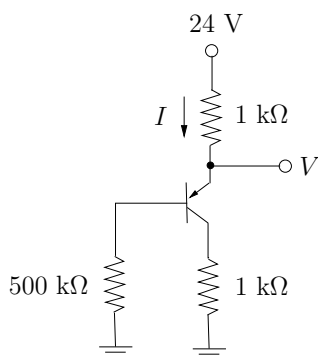
$$10 = (1)I_C + 0,2 = I_C + 0,2,$$

$$I_C = 10 - 0,2 = 9,8,$$

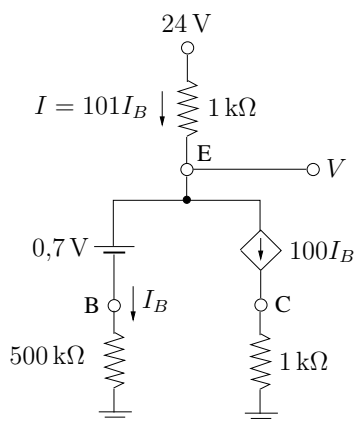
que es  $\geq 0$  y  $\leq \beta I_B = (50)(0,93) = 46,5$ . Así pues, el BJT está en SATURACIÓN e  $I = I_C = 9,800\text{ mA}$ .

**Problema 22:** Usando para el BJT el modelo con parámetros  $\beta = 100$ ,  $V_{EB0} = 0,7\text{ V}$  y

$V_{EC,sat} = 0,2 \text{ V}$ , analice el circuito de la figura y determine los valores de  $I$  y  $V$ .



**Solución:** Empezaremos suponiendo que el BJT está en ACTIVO. Se obtiene el circuito



Las condiciones a verificar son  $I_B \geq 0$  y  $V_{EC} \geq 0,2 \text{ V}$ . Para calcular  $I_B$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 24 V, la resistencia de valor 1 kΩ conectada al emisor, la fuente de tensión de valor 0,7 V y la resistencia de valor 500 kΩ, obteniendo

$$24 = (1)(101I_B) + 0,7 + 500I_B = 601I_B + 0,7,$$

$$I_B = \frac{24 - 0,7}{601} = 0,03877,$$

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $V_{EC}$  conociendo  $I_B$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 24 V, las dos resistencias de valor 1 kΩ y la fuente de corriente controlada, obteniendo

$$24 = (1)(101I_B) + V_{EC} + (1)(100I_B) = V_{EC} + 201I_B,$$

$$V_{EC} = 24 - 201I_B = 24 - (201)(0,03877) = 16,21,$$

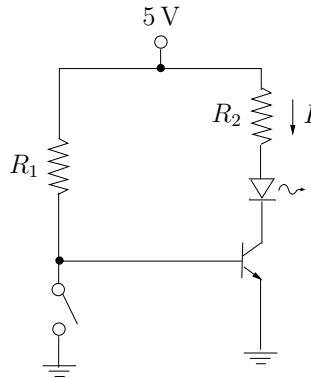
que es  $\geq 0,2$ . Así pues, el estado supuesto para el BJT es correcto,  $I$  resulta valer

$$I = 101I_B = (101)(0,03877) = 3,916 \text{ mA},$$

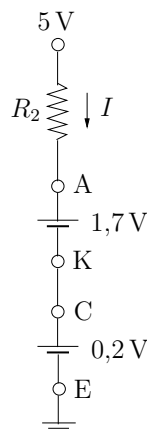
y  $V$  resulta valer

$$V = 24 - (1)I = 24 - 3,916 = 20,08 \text{ V}.$$

**Problema 23:** Usando para el LED el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 1,7 \text{ V}$ , usando para el BJT el modelo con parámetros  $\beta$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ , y sabiendo que el parámetro  $\beta$  del BJT puede variar entre 20 y 100, analice el circuito de la figura y: 1) determine el valor que ha de tener  $R_2$  para que, suponiendo el BJT en saturación,  $I$  valga  $20 \text{ mA}$ ; 2) para el valor de  $R_2$  calculado anteriormente, determine el valor máximo que puede tener  $R_1$  para que, cuando el interruptor esté en OFF, el BJT esté en saturación; 3) para el valor máximo de  $R_1$  calculado anteriormente, determine el valor de la corriente por el interruptor cuando éste está en ON.



**Solución:** 1) Dado que  $I > 0$ , el LED sólo podrá estar en ON. Sustituyendo el LED por el circuito equivalente correspondiente a ON y utilizando el circuito equivalente entre colector y emisor del BJT para SATURACIÓN, se obtiene el circuito



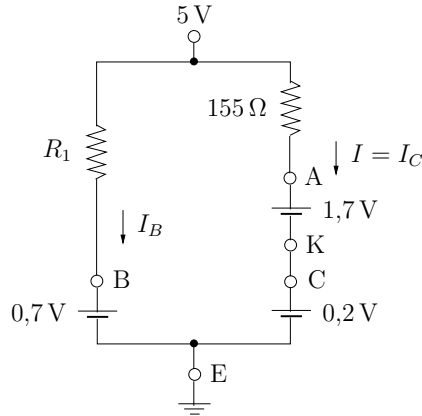
Aplicando la segunda ley de Kirchhoff se obtiene

$$5 = R_2 I + 1,7 + 0,2 = 20R_2 + 1,9,$$

$$R_2 = \frac{5 - 1,9}{20} = 0,155 \text{ k}\Omega = 155 \Omega.$$

2) Se exige que el BJT esté en SATURACIÓN. Entonces, de acuerdo con el apartado anterior,  $I = 20 \text{ mA}$  y el LED estará en ON. Con el valor de  $R_2$  calculado en el apartado anterior y

teniendo en cuenta que el interruptor está en OFF, se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $I_B \geq 0$ ,  $I_C \geq 0$  e  $I_C \leq \beta I_B$ .  $I_C = I = 20$  mA, que es  $\geq 0$ . Para calcular  $I_B$  en función de  $R_1$  aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $R_1$  y la fuente de tensión de valor 0,7 V, obteniendo

$$5 = R_1 I_B + 0,7,$$

$$I_B = \frac{5 - 0,7}{R_1} = \frac{4,3}{R_1},$$

que es  $\geq 0$  para todo  $R_1$ . Imponiendo  $I_C \leq \beta I_B$ , obtenemos

$$20 \leq \beta \frac{4,3}{R_1},$$

$$R_1 \leq \frac{4,3}{20} \beta = 0,215 \beta.$$

La condición más estricta sobre  $R_1$  se obtiene para el valor mínimo de  $\beta$ . Por tanto, se deberá cumplir

$$R_1 \leq (0,215)(20) = 4,300 \text{ k}\Omega.$$

El valor máximo que podrá tener  $R_1$  es, por tanto, 4,300 k $\Omega$ .

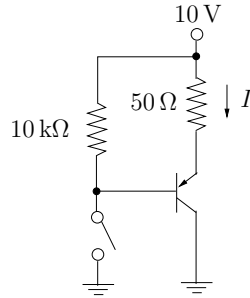
3) Con el interruptor en ON,  $V_{BE} = 0$  y el BJT está en CORTE con  $V_{CE} = 5$  V, pues  $I = 0$  y la tensión ánodo-cátodo en el LED vale 0. Sea  $I'$  la corriente por el interruptor del nodo conectado a la base a masa. Dado que  $I_B = 0$ ,  $I'$  será la corriente por  $R_1$  de la fuente de tensión de valor 5 V a la base del BJT y  $R_1$  ve una tensión de valor 5 V. Tenemos, por tanto

$$5 = R_1 I',$$

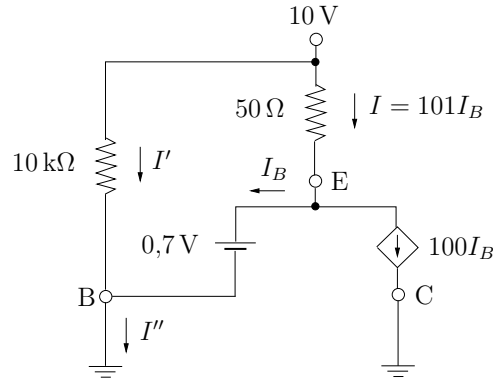
$$I' = \frac{5}{R_1} = \frac{5}{4,3} = 1,163 \text{ mA}.$$

**Problema 24:** Usando para el BJT el modelo con parámetros  $\beta = 100$ ,  $V_{EB0} = 0,7$  V y  $V_{EC,sat} = 0,2$  V, analice el circuito de la figura y: 1) determine el valor de  $I$  cuando el inte-

ruptor está en ON; 2) determine el valor de la corriente por el interruptor cuando éste está en ON.



**Solución:** 1) La hipótesis BJT en CORTE conduce a  $I = 0$  y, estando el interruptor en ON y siendo nula la tensión de la base del BJT, a  $V_{EB} = 10$ , que no es  $\leq 0,7$ . Supongamos que el BJT trabaja en ACTIVO. Teniendo en cuenta que el interruptor está en ON, obtenemos el circuito



Se ha de comprobar  $I_B \geq 0$  y  $V_{EC} \geq 0,2$ . Para calcular  $I_B$  aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor  $50\Omega$  y la fuente de tensión de valor 0,7 V, obteniendo

$$10 = (0,05)(101I_B) + 0,7 = 5,05I_B + 0,7,$$

$$I_B = \frac{10 - 0,7}{5,05} = 1,842,$$

que es  $\geq 0$ . Por otro lado, por inspección,  $V_{EC} = 0,7 \geq 0,2$ . Así pues, el BJT está en ACTIVO e

$$I = 101I_B = (101)(1,842) = 186,0 \text{ mA}.$$

2) Dado que el interruptor está en ON, podemos utilizar el mismo circuito que en el apartado anterior. La tensión que ve la resistencia de valor  $10\text{ k}\Omega$  es 10 V. Por tanto,

$$10 = 10I',$$

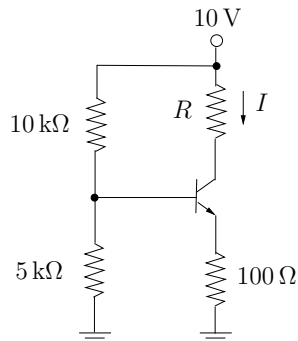
$$I' = 1,$$

y, aplicando la primera ley de Kirchhoff a la base del BJT, la corriente por el interruptor,  $I''$ , vale

$$I'' = I' + I_B = 1 + 1,842 = 2,842 \text{ mA}.$$



**Problema 25:** Usando para el BJT el modelo con parámetros  $\beta = 50$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ , determine el máximo valor de  $R$  para el cual el BJT está en activo y determine la corriente  $I$  en ese caso.

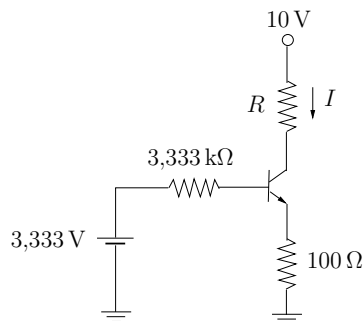


**Solución:** Empezaremos determinando el equivalente de Thévenin del dipolo que incluye la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor 10 kΩ y la resistencia de valor 5 kΩ, que tiene como salidas la base del BJT y masa. La tensión de Thévenin,  $V_{th}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_{th}$ , valen

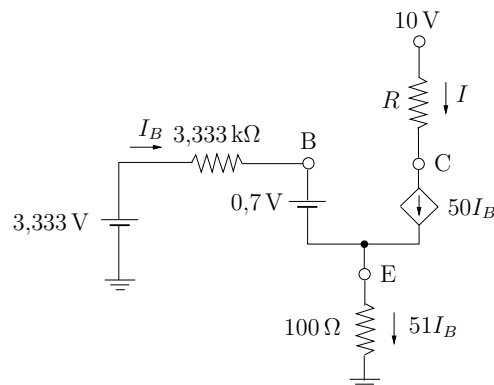
$$V_{th} = \frac{5}{10 + 5} 10 = 3,333 \text{ V},$$

$$R_{th} = 5 \parallel 10 = \frac{(5)(10)}{5 + 10} = 3,333 \text{ k}\Omega.$$

Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin, se obtiene el circuito



y, con el BJT en ACTIVO, se obtiene el circuito



Se ha de imponer  $I_B \geq 0$  y  $V_{CE} \geq 0,2$ . Para calcular  $I_B$  aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $3,333$  V, la resistencia de valor  $3,333$  k $\Omega$ , la fuente de tensión de valor  $0,7$  V y la resistencia de valor  $100$   $\Omega$ , obteniendo

$$3,333 = 3,333I_B + 0,7 + (0,1)(51I_B) = 8,433I_B + 0,7,$$

$$8,433I_B = 2,633,$$

$$I_B = \frac{2,633}{8,433} = 0,3122,$$

que es  $\geq 0$ . Por inspección,

$$I = 50I_B = (50)(0,3122) = 15,61 \text{ mA}.$$

Para calcular  $V_{CE}$  conociendo  $I_B$  e  $I$ , aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $10$  V, la resistencia de valor  $R$ , la fuente de corriente controlada y la resistencia de valor  $100$   $\Omega$ , obteniendo

$$10 = RI + V_{CE} + (0,1)(51I_B) = RI + V_{CE} + 5,1I_B,$$

$$V_{CE} = 10 - RI - 5,1I_B = 10 - 15,61R - (5,1)(0,3122) = 8,408 - 15,6R,$$

e imponiendo  $V_{CE} \geq 0,2$ , obtenemos

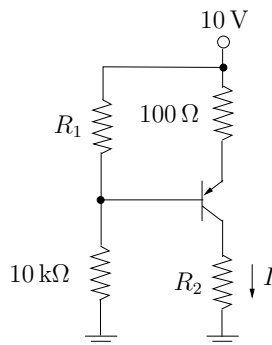
$$8,408 - 15,6R \geq 0,2,$$

$$8,208 \geq 15,6R,$$

$$R \leq \frac{8,208}{15,6} = 0,5262 \text{ k}\Omega = 526,2 \Omega.$$

Así pues, el máximo valor que puede tener  $R$  para que el BJT trabaje en ACTIVO es  $526,2$   $\Omega$  y, en ese caso,  $I = 15,61$  mA.

**Problema 26:** Usando para el BJT el modelo con parámetros  $\beta = 50$ ,  $V_{EB0} = 0,7$  V y  $V_{EC,sat} = 0,2$  V, analice el circuito de la figura y: 1) determine el valor que ha de tener  $R_1$  para que, supuesto el BJT en activo,  $I = 20$  mA; 2) con el valor de  $R_1$  calculado en el apartado anterior, determine el máximo valor de  $R_2$  para el cual el BJT está en activo.



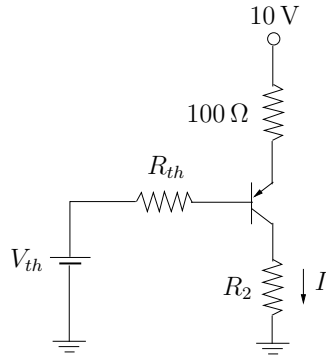
**Solución:** 1) Empezaremos determinando el equivalente de Thévenin del dipolo formado por la fuente de tensión de valor  $10$  V, la resistencia de valor  $R_1$  y la resistencia de valor  $10$  k $\Omega$ ,

que tiene como salidas la base del BJT y masa. La tensión de Thévenin,  $V_{th}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_{th}$ , valen

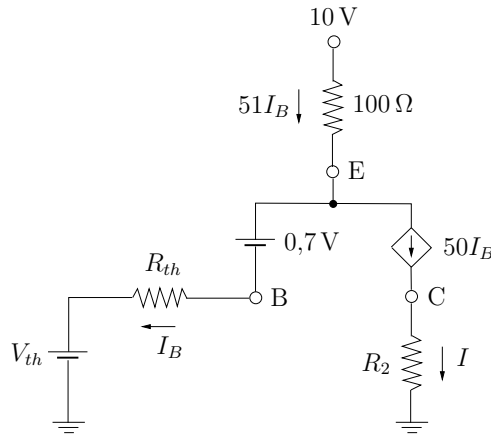
$$V_{th} = \frac{10}{R_1 + 10} 10 = \frac{100}{R_1 + 10}, \quad (2.1)$$

$$R_{th} = R_1 \parallel 10 = \frac{10R_1}{R_1 + 10}. \quad (2.2)$$

Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin, se obtiene el circuito



y, con el BJT en ACTIVO, se obtiene el circuito



Por inspección  $I = 50I_B$ , de donde, para que  $I = 20 \text{ mA}$ ,  $I_B$  deberá valer

$$I_B = \frac{I}{50} = \frac{20}{50} = 0,4.$$

Para calcular el valor necesario de  $R_1$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor 100 Ω, la fuente de tensión de valor 0,7 V, la resistencia de valor  $R_{th}$  y la fuente de tensión de valor  $V_{th}$ , obteniendo, usando (2.1) y (2.2),

$$10 = (0,1)(51I_B) + 0,7 + R_{th}I_B + V_{th},$$

$$10 = (0,1)(51)(0,4) + 0,7 + 0,4R_{th} + V_{th},$$

$$0,4R_{th} + V_{th} = 7,26,$$

$$0,4 \frac{10R_1}{R_1 + 10} + \frac{100}{R_1 + 10} = 7,26,$$

$$\frac{4R_1}{R_1 + 10} + \frac{100}{R_1 + 10} = 7,26,$$

$$4R_1 + 100 = 7,26(R_1 + 10),$$

$$4R_1 + 100 = 7,26R_1 + 72,6,$$

$$3,26R_1 = 27,4,$$

$$R_1 = \frac{27,4}{3,26} = 8,404 \text{ k}\Omega.$$

2) Podemos utilizar el último circuito del apartado anterior con el valor calculado para  $R_1$ ,  $R_1 = 8,404 \text{ k}\Omega$ , que hace  $I_B = 0,4 \text{ mA}$  e  $I = 20 \text{ mA}$ . Se ha de imponer  $I_B \geq 0$  y  $V_{EC} \geq 0,2$ . Dado que  $I_B = 0,4$ , la primera condición se cumple. Para calcular  $V_{EC}$  conociendo  $I_B$  e  $I$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $10 \text{ V}$ , la resistencia de valor  $100 \Omega$ , la fuente de corriente controlada y la resistencia de valor  $R_2$ , obteniendo

$$10 = (0,1)(51I_B) + V_{EC} + R_2I = 5,1I_B + V_{EC} + R_2I,$$

$$V_{EC} = 10 - 5,1I_B - R_2I = 10 - (5,1)(0,4) - 20R_2 = 7,96 - 20R_2.$$

E imponiendo  $V_{EC} \geq 0,2$ , obtenemos

$$7,96 - 20R_2 \geq 0,2,$$

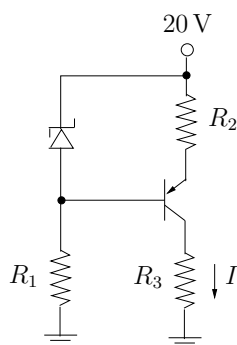
$$20R_2 \leq 7,76,$$

$$R_2 \leq \frac{7,76}{20} = 0,3880 \text{ k}\Omega = 388,0 \Omega.$$

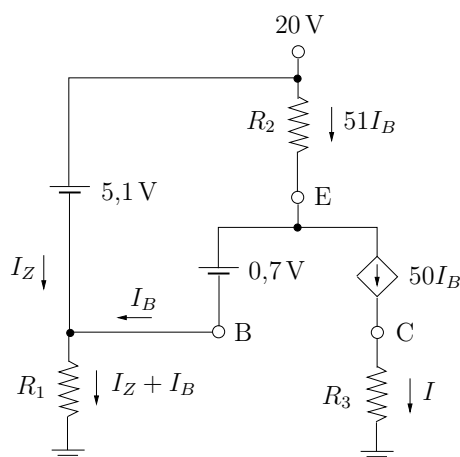
Así pues, con el valor de  $R_1$  calculado en el apartado 1), el máximo valor de  $R_2$  para el cual el BJT está en ACTIVO es  $388,0 \Omega$ .

**Problema 27:** Usando para el diodo Zener el modelo con tensión cátodo-ánodo igual a  $5,1 \text{ V}$  para corrientes inversas y para el BJT el modelo con parámetros  $\beta = 50$ ,  $V_{EB0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{EC,sat} = 0,2 \text{ V}$ , analice el circuito de la figura y: 1) determine el valor que ha de tener  $R_2$  para que, suponiendo que el diodo Zener está en ruptura y el BJT está en activo,  $I = 50 \text{ mA}$ ; 2) para el valor de  $R_2$  calculado en el apartado anterior y suponiendo el BJT en activo, determine el máximo valor que puede tener  $R_1$  para que el diodo esté en ruptura con una corriente inversa  $\geq 0,5 \text{ mA}$ ; 3) para el valor de  $R_2$  calculado en el apartado 1) y un valor de  $R_1$  menor o igual al

máximo calculado en el apartado 2), determine el máximo valor de  $R_3$  para el cual el BJT está en activo.



**Solución:** 1) Con el diodo Zener en RUPTURA y el BJT en ACTIVO, se obtiene el circuito



Por inspección,  $I = 50I_B$  y para que  $I = 50 \text{ mA}$ ,  $I_B$  deberá valer

$$I_B = \frac{I}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Para calcular el valor necesario de  $R_2$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $5,1 \text{ V}$ , la resistencia de valor  $R_2$  y la fuente de tensión de valor  $0,7 \text{ V}$ , obteniendo

$$5,1 = R_2(51I_B) + 0,7,$$

$$5,1 = R_2(51)(1) + 0,7,$$

$$51R_2 = 4,4,$$

$$R_2 = \frac{4,4}{51} = 0,08627 \text{ k}\Omega = 86,27 \Omega.$$

2) Dado que el BJT está en ACTIVO y el diodo Zener ha de trabajar en RUPTURA, podemos utilizar el circuito del apartado anterior con el valor calculado para  $R_2$ , que hace  $I_B = 1 \text{ mA}$ .

Para calcular  $I_Z$  en función de  $R_1$  conociendo  $I_B$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 20 V, la fuente de tensión de valor 5,1 V y la resistencia de valor  $R_1$ , obteniendo

$$20 = 5,1 + R_1(I_Z + I_B) = 5,1 + R_1 I_Z + R_1 I_B ,$$

$$20 = 5,1 + R_1 I_Z + R_1(1) = 5,1 + R_1 I_Z + R_1 ,$$

$$I_Z = \frac{14,9 - R_1}{R_1} ,$$

e, imponiendo  $I_Z \geq 0,5$ , obtenemos

$$\frac{14,9 - R_1}{R_1} \geq 0,5 ,$$

$$14,9 - R_1 \geq 0,5 R_1 ,$$

$$14,9 \geq 1,5 R_1 ,$$

$$R_1 \leq \frac{14,9}{1,5} = 9,933 \text{ k}\Omega .$$

Así pues, para el valor de  $R_2$  calculado en el apartado anterior y suponiendo el BJT en ACTIVO, el valor máximo que puede tener  $R_1$  para que la corriente inversa por el diodo Zener sea  $\geq 0,5$  mA es 9,933 k $\Omega$ .

3) Dado que el BJT ha de estar en ACTIVO y  $R_1$  tiene un valor menor o igual al máximo calculado en el apartado 2), el diodo Zener trabajará en RUPTURA y podemos utilizar el circuito del apartado 1) con el valor calculado para  $R_2$ ,  $R_2 = 86,27 \Omega$ , que hace  $I_B = 1$  mA e  $I = 50$  mA. Dado que  $I_B \geq 0$ , basta imponer  $V_{EC} \geq 0,2$ . Para calcular  $V_{EC}$  en función de  $R_3$  conociendo  $I_B$  e  $I$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 20 V, la resistencia de valor  $R_2$ , la fuente de corriente controlada y la resistencia de valor  $R_3$ , obteniendo

$$20 = R_2(51I_B) + V_{EC} + R_3 I ,$$

$$20 = (0,08627)(51)(1) + V_{EC} + 50R_3 ,$$

$$V_{EC} = 15,6 - 50R_3 ,$$

e, imponiendo  $V_{EC} \geq 0,2$ , obtenemos

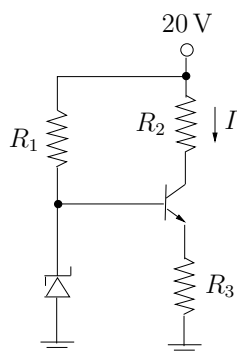
$$15,6 - 50R_3 \geq 0,2 ,$$

$$15,4 \geq 50R_3 ,$$

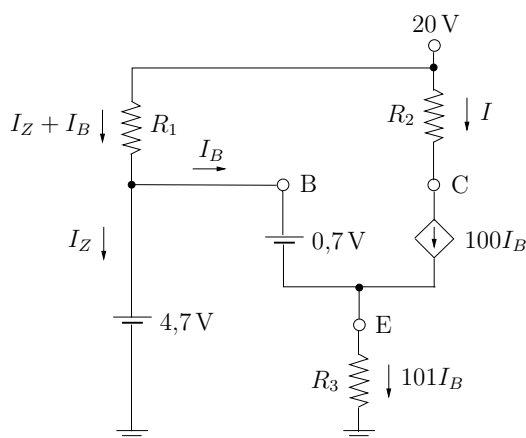
$$R_3 \leq \frac{15,4}{50} = 0,3080 \text{ k}\Omega = 308,0 \Omega .$$

Así pues, para el valor de  $R_2$  calculado en el apartado 1) y un valor de  $R_1$  menor o igual que el máximo calculado en el apartado 2), el máximo valor de  $R_3$  para el cual el BJT está en ACTIVO es 308,0  $\Omega$ .

**Problema 28:** Usando para el diodo Zener el modelo con tensión cátodo-ánodo igual a 4,7 V para corrientes inversas y para el BJT el modelo con parámetros  $\beta = 100$ ,  $V_{BE0} = 0,7$  V y  $V_{CE,sat} = 0,2$  V, analice el circuito de la figura y: 1) determine el valor que ha de tener  $R_3$  para que, suponiendo que el diodo Zener está en ruptura y que el BJT está en activo,  $I = 10$  mA; 2) para el valor de  $R_3$  calculado en el apartado anterior y suponiendo el BJT en activo, determine el máximo valor que puede tener  $R_1$  para que el diodo Zener esté en ruptura con una corriente inversa  $\geq 0,5$  mA; 3) para el valor de  $R_3$  calculado en el apartado 1) y un valor de  $R_1$  menor o igual al máximo calculado en el apartado 2), determine el máximo valor de  $R_2$  para el cual el BJT está en activo.



**Solución:** 1) Con el diodo Zener en RUPTURA y el BJT en ACTIVO, se obtiene el circuito



Dado que, por inspección  $I = 100I_B$ , para que  $I = 10$  mA,  $I_B$  deberá valer

$$I_B = \frac{I}{100} = \frac{10}{100} = 0,1.$$

Para calcular el valor necesario para  $R_3$  conociendo  $I_B$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 4,7 V, la fuente de tensión de valor 0,7 V y la resistencia de valor  $R_3$ , obteniendo

$$4,7 = 0,7 + R_3(101I_B) = 0,7 + (101)(0,1)R_3 = 0,7 + 10,1R_3,$$

$$R_3 = \frac{4,7 - 0,7}{10,1} = 0,3960 \text{ k}\Omega = 396,0 \Omega.$$

2) Dado que el BJT está en ACTIVO y el diodo Zener ha de estar en RUPTURA, podemos utilizar el circuito del apartado anterior con el valor calculado de  $R_3$ ,  $R_3 = 396,0 \Omega$ , que hace  $I_B = 0,1 \text{ mA}$ . Para calcular  $I_Z$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $20 \text{ V}$ , la resistencia de valor  $R_1$  y la fuente de tensión de valor  $4,7 \text{ V}$ , obteniendo

$$20 = R_1(I_Z + I_B) + 4,7 = R_1 I_Z + R_1 I_B + 4,7 = R_1 I_Z + 0,1 R_1 + 4,7,$$

$$15,3 = R_1 I_Z + 0,1 R_1,$$

$$I_Z = \frac{15,3 - 0,1 R_1}{R_1},$$

e, imponiendo  $I_Z \geq 0,5$ ,

$$\frac{15,3 - 0,1 R_1}{R_1} \geq 0,5,$$

$$15,3 - 0,1 R_1 \geq 0,5 R_1,$$

$$15,3 \geq 0,6 R_1,$$

$$R_1 \leq \frac{15,3}{0,6} = 25,50 \text{ k}\Omega.$$

Así pues, el máximo valor que ha de tener  $R_1$  para que con el valor de  $R_3$  calculado en el apartado anterior y suponiendo el BJT en ACTIVO, el diodo Zener esté en RUPTURA con una corriente inversa  $\geq 0,5 \text{ mA}$  es  $25,50 \text{ k}\Omega$ .

3) Dado que el BJT ha de estar en ACTIVO y  $R_1$  tiene un valor menor o igual al máximo calculado en el apartado 2), el diodo Zener estará en RUPTURA y podemos utilizar el circuito del apartado 1) con el valor calculado de  $R_3$ ,  $R_3 = 396,0 \Omega$ , que hace  $I_B = 0,1 \text{ mA}$  e  $I = 10 \text{ mA}$ . Dado que  $I_B \geq 0$ , basta imponer  $V_{CE} \geq 0,2$ . Para calcular  $V_{CE}$  en función de  $R_2$  conociendo  $I_B$  e  $I$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $20 \text{ V}$ , la resistencia de valor  $R_2$ , la fuente de corriente controlada y la resistencia de valor  $R_3$ , obteniendo

$$20 = R_2 I + V_{CE} + R_3(101 I_B) = 10 R_2 + V_{CE} + (0,396)(101)(0,1) = 10 R_2 + V_{CE} + 4,$$

$$V_{CE} = 16 - 10 R_2.$$

Imponiendo  $V_{CE} \geq 0,2$ , obtenemos

$$16 - 10 R_2 \geq 0,2,$$

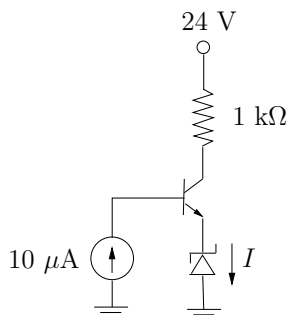
$$15,8 \geq 10 R_2,$$

$$R_2 \leq \frac{15,8}{10} = 1,580 \text{ k}\Omega.$$

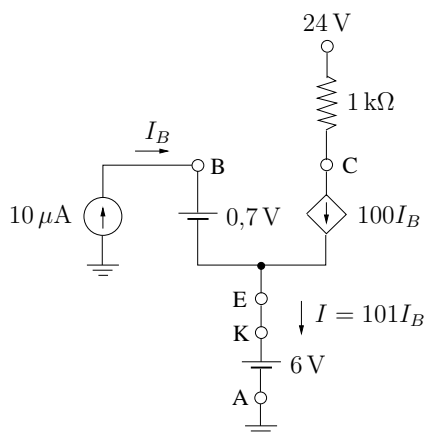
Así pues, para el valor de  $R_3$  calculado en el apartado 1) y un valor de  $R_1$  menor o igual al máximo calculado en el apartado 2), el máximo valor de  $R_2$  para el cual el BJT está en ACTIVO es  $1,580 \text{ k}\Omega$ .



**Problema 29:** Usando para el diodo Zener el modelo con tensión cátodo-ánodo igual a 6 V para corrientes inversas y para el BJT el modelo con parámetros  $\beta = 100$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ , analice el circuito de la figura y determine el valor de  $I$ .



**Solución:** La fuente de corriente hace  $I_B = 0,01 \text{ mA} > 0$ . Eso descarta que el BJT esté en CORTE. Supongamos que el BJT está en ACTIVO y que el diodo está en RUPTURA. Se obtiene el circuito



Dado que  $I_B > 0$ , las únicas condiciones a verificar son  $V_{CE} \geq 0,2 \text{ V}$  e  $I \geq 0$ . Por inspección,

$$I = 101I_B = (101)(0,01) = 1,010 \text{ mA} ,$$

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $V_{CE}$  conociendo  $I_B$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 24 V, la resistencia, la fuente de corriente controlada y la fuente de tensión de valor 6 V, obteniendo

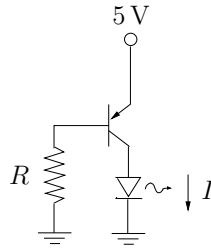
$$24 = (1)(100I_B) + V_{CE} + 6 = 100I_B + V_{CE} + 6 ,$$

$$V_{CE} = 18 - 100I_B = 18 - (100)(0,01) = 17 ,$$

que es  $\geq 0,2$ . Así pues, los estados supuestos para los dispositivos son correctos e  $I = 1,010 \text{ mA}$ .

**Problema 30:** Determine para el circuito de la figura el valor que ha de tener  $R$  para que  $I$  valga 20 mA. Para el LED use el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 2 \text{ V}$ . Para el BJT use el modelo

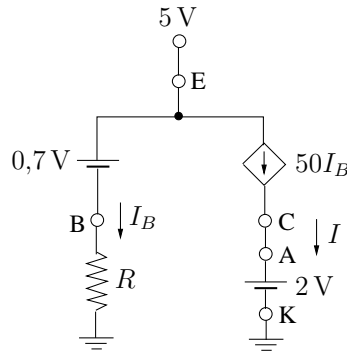
con parámetros  $\beta = 50$ ,  $V_{EB0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{EC,sat} = 0,2 \text{ V}$ .



**Solución:** Dado que  $I > 0$ , el LED sólo podrá estar en ON. Supongámoslo. La tensión de colector,  $V_C$ , del BJT valdrá 2 V. Además, la tensión de emisor,  $V_E$ , del BJT vale 5 V. La tensión  $V_{EC}$  del BJT resulta, por tanto, valer

$$V_{EC} = V_E - V_C = 5 - 2 = 3,$$

que es  $> 0,2$ . Todo parece indicar que el BJT estará en ACTIVO. Supongámoslo. Sólo se ha de comprobar  $I_B \geq 0$ . Con el BJT en ACTIVO, se obtiene el circuito



Por inspección,  $I = 50I_B$  y, para que  $I = 20 \text{ mA}$ ,  $I_B$  deberá valer

$$I_B = \frac{I}{50} = \frac{20}{50} = 0,4,$$

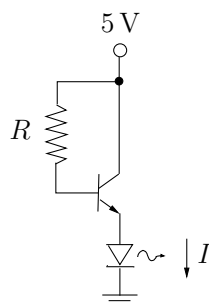
que es  $\geq 0$ . Así pues, efectivamente el BJT está en ACTIVO. Para calcular el valor necesario de  $R$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la fuente de tensión de valor 0,7 V y la resistencia, obteniendo

$$5 = 0,7 + RI_B,$$

$$R = \frac{5 - 0,7}{I_B} = \frac{4,3}{0,4} = 10,75 \text{ k}\Omega.$$

**Problema 31:** Determine para el circuito de la figura el valor que ha de tener  $R$  para que  $I$  valga 20 mA. Para el LED use el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 2 \text{ V}$ . Para el BJT use el modelo

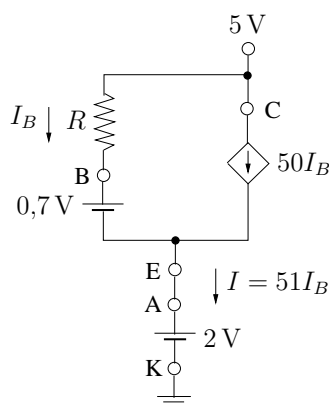
con parámetros  $\beta = 50$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ .



**Solución:** Dado que  $I > 0$ , el LED sólo podrá estar en ON. Ello implica que la tensión de emisor del BJT,  $V_E$ , valdrá 2 V. Además, la tensión de colector,  $V_C$ , del BJT vale 5 V. La tensión  $V_{CE}$  del BJT resulta, por tanto, valer

$$V_{CE} = V_C - V_E = 5 - 2 = 3,$$

que es  $> 0,2$ . Todo parece indicar que el BJT estará en ACTIVO. Supongámoslo. Sólo se ha de comprobar  $I_B \geq 0$ . Con el BJT en ACTIVO, se obtiene el circuito



Dado que  $I = 51I_B$ , para que  $I = 20 \text{ mA}$ ,  $I_B$  deberá valer

$$I_B = \frac{I}{51} = \frac{20}{51} = 0,3922,$$

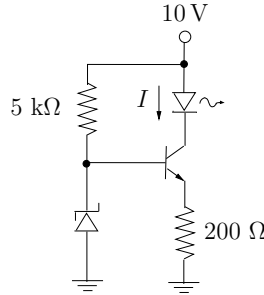
que es  $\geq 0$ . Así pues, efectivamente el BJT está en ACTIVO. Para calcular el valor necesario de  $R$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia, la fuente de tensión de valor 0,7 V y la fuente de tensión de valor 2 V, obteniendo

$$5 = RI_B + 0,7 + 2 = RI_B + 2,7,$$

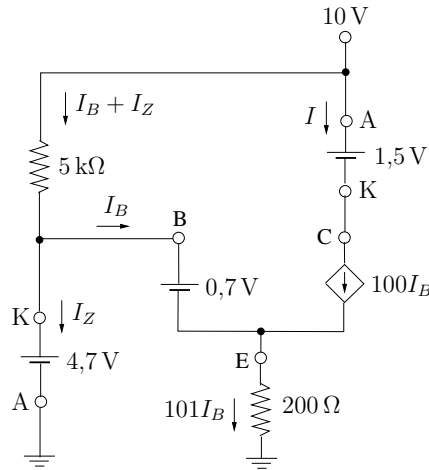
$$R = \frac{5 - 2,7}{I_B} = \frac{2,3}{0,3922} = 5,864 \text{ k}\Omega.$$

**Problema 32:** Determine para el circuito de la figura el valor de  $I$ . Para el diodo Zener use el modelo con tensión cátodo-ánodo igual a 4,7 V para corrientes inversas. Para el LED use el

modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 1,5 \text{ V}$ . Para el BJT use el modelo con parámetros  $\beta = 100$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ .



**Solución:** Supondremos que el diodo Zener está en RUPTURA, el LED en ON y el BJT en ACTIVO. Se obtiene el circuito



Se ha de verificar  $I_Z \geq 0$ ,  $100I_B \geq 0$ ,  $I_B \geq 0$  y  $V_{CE} \geq 0,2$ , que se reducen a  $I_Z \geq 0$ ,  $I_B \geq 0$  y  $V_{CE} \geq 0,2$ . Para calcular  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $4,7 \text{ V}$ , la fuente de tensión de valor  $0,7 \text{ V}$  y la resistencia de valor  $200 \Omega$ , obteniendo

$$4,7 = 0,7 + (0,2)(101I_B) = 0,7 + 20,2I_B,$$

$$I_B = \frac{4,7 - 0,7}{20,2} = 0,1980,$$

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $I_Z$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $10 \text{ V}$ , la resistencia de valor  $5 \text{ k}\Omega$  y la fuente de tensión de valor  $4,7 \text{ V}$ , obteniendo

$$10 = 5(I_B + I_Z) + 4,7 = 5I_B + 5I_Z + 4,7,$$

$$5I_Z = 5,3 - 5I_B,$$

$$I_Z = \frac{5,3 - 5I_B}{5} = \frac{5,3 - (5)(0,198)}{5} = 0,862,$$

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $V_{CE}$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la fuente de tensión de valor 1,5 V, la fuente de corriente controlada y la resistencia de valor  $200\ \Omega$ , obteniendo

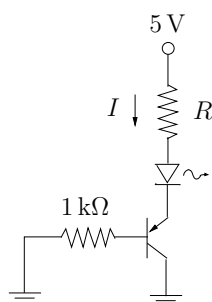
$$10 = 1,5 + V_{CE} + (0,2)(101I_B) = 1,5 + V_{CE} + 20,2I_B ,$$

$$V_{CE} = 8,5 - 20,2I_B = 8,5 - (20,2)(0,198) = 4,5 ,$$

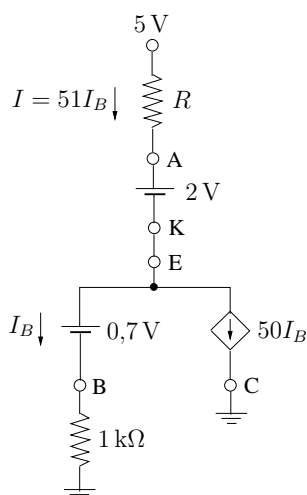
que es  $\geq 0,2$ . Así pues, los estados supuestos para los dispositivos son correctos. Por inspección,

$$I = 100I_B = (100)(0,198) = 19,80\text{ mA} .$$

**Problema 33:** Determine para el circuito de la figura el valor que ha de tener  $R$  para que  $I$  valga 20 mA. Para el LED use el modelo con tensión umbral  $V_{D0} = 2\text{ V}$ . Para el BJT use el modelo con parámetros  $\beta = 50$ ,  $V_{EB0} = 0,7\text{ V}$  y  $V_{EC,sat} = 0,2\text{ V}$ . Suponga, a continuación, que  $\beta$  puede variar entre 20 y 200. ¿Entre qué valores variará  $I$  con el  $R$  calculado anteriormente?



**Solución:** Siendo  $I > 0$ , el LED sólo podrá estar en ON. El BJT sólo puede estar en ACTIVO o en SATURACIÓN. En cualquiera de esos dos estados,  $V_{EC} = V_{EB} + (1)I_B = 0,7 + I_B \geq 0,7 > 0,2$ . Por tanto, todo parece indicar que el BJT estará en ACTIVO. Con el LED en ON y el BJT en ACTIVO, se obtiene el circuito



Sólo se ha de comprobar  $I_B \geq 0$ . Dado que  $I = 51I_B$ , para que  $I = 20\text{ mA}$ ,  $I_B$  deberá valer

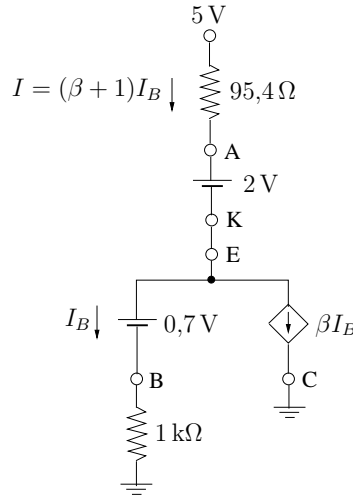
$$I_B = \frac{I}{51} = \frac{20}{51} = 0,3922 ,$$

que es  $\geq 0$ . Así pues, el BJT estará efectivamente en ACTIVO. Para calcular el valor necesario de  $R$  conociendo  $I$  e  $I_B$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $R$ , la fuente de tensión de valor 2 V, la fuente de tensión de valor 0,7 V y la resistencia de valor 1 k $\Omega$ , obteniendo

$$5 = RI + 2 + 0,7 + (1)I_B = 20R + 2,7 + 0,3922 = 3,092 + 20R,$$

$$R = \frac{5 - 3,092}{20} = 0,09540 \text{ k}\Omega = 95,40 \Omega.$$

Para resolver la segunda parte del problema expresemos, para  $R = 95,4 \Omega$ ,  $I$  en función de  $\beta$ . Supondremos que el LED está en ON y que el BJT está en ACTIVO. El razonamiento realizado anteriormente que conduce a  $V_{EC} > 0,2$  sigue siendo válido con independencia del valor de  $\beta$ , por lo que bastará comprobar  $I_B \geq 0$  e  $I \geq 0$ . Con el LED en ON, el BJT en ACTIVO y con  $R = 95,4 \Omega$ , se obtiene el circuito



Para calcular  $I_B$  en función de  $\beta$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor 95,4  $\Omega$ , la fuente de tensión de valor 2 V, la fuente de tensión de valor 0,7 V y la resistencia de valor 1 k $\Omega$ , obteniendo

$$5 = (0,0954)(\beta + 1)I_B + 2 + 0,7 + (1)I_B = 2,7 + (0,0954\beta + 1,095)I_B,$$

$$I_B = \frac{2,3}{0,0954\beta + 1,095},$$

que es  $\geq 0$  para todo valor posible de  $\beta$ . La corriente  $I$  en función de  $\beta$  valdrá

$$I(\beta) = (\beta + 1)I_B = \frac{2,3\beta + 2,3}{0,0954\beta + 1,095},$$

que es  $\geq 0$  para todo valor posible de  $\beta$ . Así pues, el LED está en ON y el BJT está en ACTIVO para todo valor posible de  $\beta$  e  $I$  tiene en función de  $\beta$  la expresión anterior. La derivada de  $I$  respecto de  $\beta$  para  $0,0954\beta + 1,095 \neq 0$  vale

$$\frac{dI}{d\beta} = \frac{2,3(0,0954\beta + 1,095) - 0,0954(2,3\beta + 2,3)}{(0,0954\beta + 1,095)^2} = \frac{2,299}{(0,0954\beta + 1,095)^2},$$

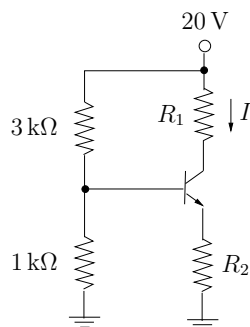
que es  $> 0$  para todo valor posible de  $\beta$ , ninguno de los cuales verifica  $0,0954\beta + 1,095 = 0$ . Así pues,  $I$  es una función creciente de  $\beta$  en  $[20, 200]$  y variará entre un valor mínimo

$$I_{\min} = I(20) = \frac{(2,3)(20) + 2,3}{(0,0954)(20) + 1,095} = 16,08 \text{ mA}$$

y un valor máximo

$$I_{\max} = I(200) = \frac{(2,3)(200) + 2,3}{(0,0954)(200) + 1,095} = 22,91 \text{ mA}.$$

**Problema 34:** El BJT del circuito de la figura tiene un parámetro  $\beta$  comprendido entre 20 y 150. Usando para el BJT el modelo con parámetros  $\beta$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ , analice el circuito y: 1) determine el valor de  $R_2$  para el cual, suponiendo el BJT en activo y  $\beta = 50$ ,  $I = 10 \text{ mA}$ ; 2) para el valor de  $R_2$  calculado en el apartado anterior y suponiendo el BJT en activo, determine entre qué valores puede variar  $I$  debido al rango posible de valores para  $\beta$ ; 3) para el valor de  $R_2$  calculado en el apartado 1), determine el máximo valor que puede tener  $R_1$  de modo que para cualquier valor posible para  $\beta$ , el BJT trabaje en activo.

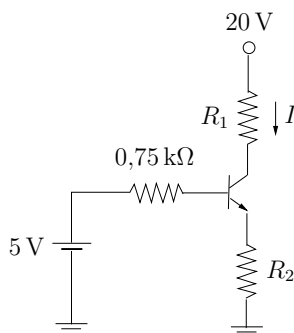


**Solución:** 1) Empezaremos calculando el equivalente de Thévenin del dipolo constituido por la fuente de tensión de valor 20 V, la resistencia de valor 3 kΩ y la resistencia de valor 1 kΩ, que tiene como salidas la base del BJT y masa. La tensión de Thévenin,  $V_{th}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_{th}$ , valen

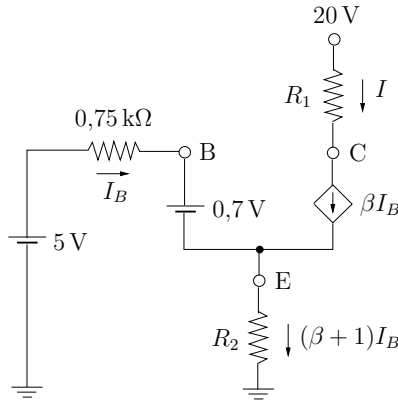
$$V_{th} = \frac{1}{3 + 1} 20 = 5 \text{ V},$$

$$R_{th} = 1 \parallel 3 = \frac{(1)(3)}{1 + 3} = 0,75 \text{ k}\Omega.$$

Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin, se obtiene el circuito



y, suponiendo el BJT en ACTIVO, se obtiene el circuito



Por inspección  $I = \beta I_B$  y para que con  $\beta = 50$   $I = 10 \text{ mA}$ ,  $I_B$  deberá valer

$$I_B = \frac{I}{\beta} = \frac{10}{50} = 0,2.$$

Para calcular el valor necesario de  $R_2$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor 0,75 kΩ, la fuente de tensión de valor 0,7 V y la resistencia de valor  $R_2$ , obteniendo

$$5 = 0,75I_B + 0,7 + R_2(\beta + 1)I_B, \quad (2.3)$$

$$5 = (0,75)(0,2) + 0,7 + R_2(51)(0,2),$$

$$5 = 0,85 + 10,2R_2,$$

$$4,15 = 10,2R_2,$$

$$R_2 = \frac{4,15}{10,2} = 0,4069 \text{ k}\Omega = 406,9 \Omega.$$

2) Calculemos el valor de  $I$  en función de  $\beta$  para el valor de  $R_2$ ,  $R_2 = 406,9 \Omega$ , obtenido en el apartado anterior, suponiendo que el BJT está en ACTIVO. De (2.3), obtenemos

$$5 = 0,75I_B + 0,7 + 0,4069(\beta + 1)I_B,$$

$$4,3 = (0,4069\beta + 1,157)I_B,$$

$$I_B = \frac{4,3}{0,4069\beta + 1,157}, \quad (2.4)$$

y, usando  $I = \beta I_B$ ,

$$I(\beta) = \frac{4,3\beta}{0,4069\beta + 1,157}. \quad (2.5)$$

La derivada de  $I$  respecto de  $\beta$  vale, para  $0,4069\beta + 1,157 \neq 0$ ,

$$\frac{dI}{d\beta} = \frac{4,3(0,4069\beta + 1,157) - 0,4069(4,3\beta)}{(0,4069\beta + 1,157)^2} = \frac{4,975}{(0,4069\beta + 1,157)^2},$$



que es  $> 0$  para todos valor posible de  $\beta$ , ninguno de los cuales verifica  $0,4069\beta + 1,157 = 0$ . Así pues,  $I$  es una función creciente de  $\beta$  en  $[20, 150]$  y variará entre un valor mínimo

$$I_{\min} = I(20) = \frac{(4,3)(20)}{(0,4069)(20) + 1,157} = 9,252 \text{ mA}$$

y un valor máximo

$$I_{\max} = I(150) = \frac{(4,3)(150)}{(0,4069)(150) + 1,157} = 10,37 \text{ mA}.$$

3) La expresión (2.4) pone de manifiesto que  $I_B$  es  $> 0$  para todo valor posible de  $\beta$ . Así pues, para asegurar el trabajo del BJT en ACTIVO bastará imponer  $V_{CE} \geq 0,2$ . Calculemos, pues,  $V_{CE}$  en función de  $\beta$  suponiendo que el BJT está en ACTIVO. Podemos usar el último circuito del apartado 1) con  $R_2 = 406,9 \Omega$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 20 V, la resistencia de valor  $R_1$ , la fuente de corriente controlada y la resistencia de valor  $R_2$ , obtenemos

$$20 = R_1 I + V_{CE} + R_2(\beta + 1)I_B = R_1 I + V_{CE} + (0,4069)(\beta + 1)I_B.$$

Usando (2.4) y (2.5), obtenemos

$$20 = R_1 \frac{4,3\beta}{0,4069\beta + 1,157} + V_{CE} + (0,4069)(\beta + 1) \frac{4,3}{0,4069\beta + 1,157},$$

$$20 = \frac{4,3\beta R_1}{0,4069\beta + 1,157} + V_{CE} + \frac{1,75\beta + 1,75}{0,4069\beta + 1,157},$$

$$V_{CE} = 20 - \frac{4,3\beta R_1}{0,4069\beta + 1,157} - \frac{1,75\beta + 1,75}{0,4069\beta + 1,157},$$

$$V_{CE} = 20 - \frac{4,3\beta R_1 + 1,75\beta + 1,75}{0,4069\beta + 1,157},$$

e, imponiendo  $V_{CE} \geq 0,2$ , obtenemos

$$20 - \frac{4,3\beta R_1 + 1,75\beta + 1,75}{0,4069\beta + 1,157} \geq 0,2,$$

$$19,8 \geq \frac{4,3\beta R_1 + 1,75\beta + 1,75}{0,4069\beta + 1,157},$$

$$8,057\beta + 22,91 \geq 4,3\beta R_1 + 1,75\beta + 1,75,$$

$$4,3\beta R_1 \leq 6,307\beta + 21,16,$$

$$R_1 \leq \frac{6,307\beta + 21,16}{4,3\beta} = F(\beta).$$

La derivada de  $F$  respecto de  $\beta$  vale, para  $\beta \neq 0$ ,

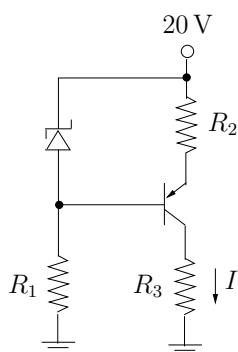
$$\frac{dF}{d\beta} = \frac{6,307(4,3\beta) - 4,3(6,307\beta + 21,16)}{(4,3\beta)^2} = -\frac{90,99}{4,3^2\beta^2} = -\frac{4,921}{\beta^2},$$

que es  $< 0$  para todos los valores posibles de  $\beta$ , que no incluyen  $\beta = 0$ . Así pues,  $F$  es una función decreciente de  $\beta$  en  $[20, 150]$ , la condición más restrictiva para  $R_1$  se obtiene para  $\beta = 150$ , y  $R_1$  deberá satisfacer

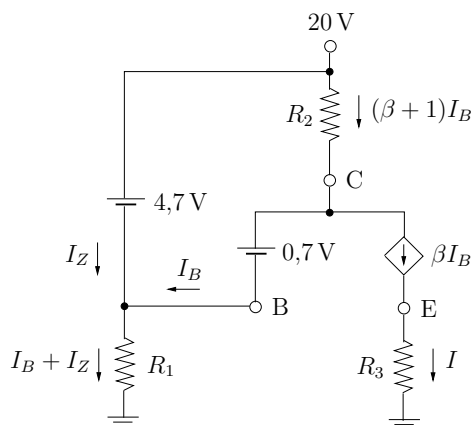
$$R_1 \leq \frac{(6,307)(150) + 21,16}{(4,3)(150)} = 1,500 \text{ k}\Omega.$$

Así pues, para el valor de  $R_2$  calculado en el apartado 1), el máximo valor que puede tomar  $R_1$  de modo que el BJT trabaje en estado ACTIVO para todos los valores posibles de  $\beta$  es  $1,500 \text{ k}\Omega$ .

**Problema 35:** El BJT del circuito de la figura tiene un parámetro  $\beta$  comprendido entre 20 y 150. Usando para el diodo Zener el modelo con tensión cátodo-ánodo igual a  $4,7 \text{ V}$  para corrientes inversas y para el BJT el modelo con parámetros  $\beta$ ,  $V_{EB0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{EC,sat} = 0,2 \text{ V}$ , analice el circuito y: 1) determine el valor de  $R_2$  para el cual, con  $\beta = 50$  y suponiendo el diodo Zener en ruptura y el BJT en activo,  $I = 20 \text{ mA}$ ; 2) para el valor de  $R_2$  calculado en el apartado anterior y suponiendo el diodo Zener en ruptura y el BJT en activo, determine entre qué valores puede variar  $I$  debido al rango posible de valores para  $\beta$ ; 3) para el valor de  $R_2$  calculado en el apartado 1), determine los máximos valores que pueden tener  $R_1$  y  $R_3$  de modo que para cualquier valor posible para  $\beta$ , el diodo Zener trabaje en ruptura con una corriente inversa  $\geq 0,5 \text{ mA}$  y el BJT trabaje en activo.



**Solución:** 1) Con el diodo Zener en RUPTURA y el BJT en ACTIVO, se obtiene el circuito



Por inspección,  $I = \beta I_B$  y, para que con  $\beta = 50$   $I = 20$  mA,  $I_B$  deberá valer

$$I_B = \frac{I}{\beta} = \frac{20}{50} = 0,4.$$

Para calcular el valor necesario de  $R_2$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 4,7 V, la resistencia de valor  $R_2$  y la fuente de tensión de valor 0,7 V, obteniendo

$$4,7 = R_2(\beta + 1)I_B + 0,7, \quad (2.6)$$

$$4,7 = (51)(0,4)R_2 + 0,7,$$

$$4,7 = 20,4R_2 + 0,7,$$

$$4 = 20,4R_2,$$

$$R_2 = \frac{4}{20,4} = 0,1961 \text{ k}\Omega = 196,1 \Omega.$$

2) Dado que el diodo Zener está en RUPTURA y el BJT está en ACTIVO, podemos utilizar los resultados del apartado anterior que no usan el valor de  $\beta$ , con el valor calculado para  $R_2$ ,  $R_2 = 196,1 \Omega$ . Calculemos  $I$  en función de  $\beta$ . De (2.6),

$$4,7 = (0,1961)(\beta + 1)I_B + 0,7,$$

$$I_B = \frac{4}{0,1961\beta + 0,1961}, \quad (2.7)$$

y, usando  $I = \beta I_B$ ,

$$I(\beta) = \frac{4\beta}{0,1961\beta + 0,1961}. \quad (2.8)$$

La derivada de  $I$  respecto de  $\beta$  vale, para  $0,1961\beta + 0,1961 \neq 0$ ,

$$\frac{dI}{d\beta} = \frac{4(0,1961\beta + 0,1961) - 0,1961(4\beta)}{(0,1961\beta + 0,1961)^2} = \frac{0,7844}{(0,1961\beta + 0,1961)^2},$$

que es  $> 0$  para todo valor posible de  $\beta$ , ninguno de los cuales verifica  $0,1961\beta + 0,1961 = 0$ . Así pues,  $I$  es una función creciente de  $\beta$  en  $[20, 150]$  y variará entre un valor mínimo

$$I_{\min} = I(20) = \frac{(4)(20)}{(0,1961)(20) + 0,1961} = 19,43 \text{ mA}$$

y un valor máximo

$$I_{\max} = I(150) = \frac{(4)(150)}{(0,1961)(150) + 0,1961} = 20,26 \text{ mA}.$$

3) Podemos usar el circuito del apartado 1) con el valor de  $R_2$ ,  $R_2 = 196,1 \Omega$ , calculado en dicho apartado y los valores de  $I_B$  e  $I$  en función de  $\beta$  calculados en el apartado 2). Siendo  $I_Z$  la corriente inversa por el diodo Zener, hemos de imponer  $I_Z \geq 0,5$ ,  $I_B \geq 0$  y  $V_{CE} \geq 0,2$ . Para calcular  $I_Z$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la

fuentes de tensión de valor 20 V, la fuente de tensión de valor 4,7 V y la resistencia de valor  $R_1$ , obteniendo, usando (2.7),

$$20 = 4,7 + R_1(I_B + I_Z) = 4,7 + R_1 I_B + R_1 I_Z ,$$

$$20 = 4,7 + \frac{4R_1}{0,1961\beta + 0,1961} + R_1 I_Z ,$$

$$15,3 = \frac{4R_1}{0,1961\beta + 0,1961} + R_1 I_Z ,$$

$$(15,3)(0,1961\beta + 0,1961) = 4R_1 + (0,1961\beta + 0,1961)R_1 I_Z ,$$

$$3\beta + 3 = 4R_1 + (0,1961\beta + 0,1961)R_1 I_Z ,$$

$$I_Z = \frac{3\beta + 3 - 4R_1}{(0,1961\beta + 0,1961)R_1} ,$$

e, imponiendo  $I_Z \geq 0,5$ ,

$$\frac{3\beta + 3 - 4R_1}{(0,1961\beta + 0,1961)R_1} \geq 0,5 ,$$

$$3\beta + 3 - 4R_1 \geq 0,5(0,1961\beta + 0,1961)R_1 ,$$

$$3\beta + 3 \geq (0,09805\beta + 4,098)R_1 ,$$

$$R_1 \leq \frac{3\beta + 3}{0,09805\beta + 4,098} = F_1(\beta) .$$

La derivada de  $F_1$  respecto de  $\beta$  vale, para  $0,09805\beta + 4,098 \neq 0$ ,

$$\frac{dF_1}{d\beta} = \frac{3(0,09805\beta + 4,098) - 0,09805(3\beta + 3)}{(0,09805\beta + 4,098)^2} = \frac{12}{(0,09805\beta + 4,098)^2} ,$$

que es  $> 0$  para todos los valores posibles de  $\beta$ , ninguno de los cuales verifica  $0,0980\beta + 4,10 = 0$ . Así pues,  $F_1$  es una función creciente de  $\beta$  en  $[20, 150]$ , la condición más restrictiva para  $R_1$  se obtiene para  $\beta = 20$ , y  $R_1$  deberá satisfacer

$$R_1 \leq \frac{(3)(20) + 3}{(0,09805)(20) + 4,098} = 10,40 \text{ k}\Omega .$$

La expresión (2.7) para  $I_B$  en función de  $\beta$  pone de manifiesto que  $I_B \geq 0$  para todo valor posible de  $\beta$ . Calculemos  $V_{CE}$  en función de  $\beta$  e impongamos  $V_{CE} \geq 0,2$ . Para calcular  $V_{CE}$  conociendo  $I_B$  e  $I$  aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 20 V, la resistencia de valor  $R_2$ , la fuente de corriente controlada y la resistencia de valor  $R_3$ , obteniendo, usando (2.7) y (2.8),

$$20 = R_2(\beta + 1)I_B + V_{CE} + R_3 I ,$$

$$20 = (0,1961)(\beta + 1)\frac{4}{0,1961\beta + 0,1961} + V_{CE} + \frac{4\beta R_3}{0,1961\beta + 0,1961} ,$$

$$20 = 4 + V_{CE} + \frac{4\beta R_3}{0,1961\beta + 0,1961} ,$$

$$V_{CE} = 16 - \frac{4\beta R_3}{0,1961\beta + 0,1961},$$

e, imponiendo  $V_{CE} \geq 0,2$ , obtenemos

$$16 - \frac{4\beta R_3}{0,1961\beta + 0,1961} \geq 0,2,$$

$$\frac{4\beta R_3}{0,1961\beta + 0,1961} \leq 15,8,$$

$$4\beta R_3 \leq 15,8(0,1961\beta + 0,1961),$$

$$4\beta R_3 \leq 3,098\beta + 3,098,$$

$$R_3 \leq \frac{3,098\beta + 3,098}{4\beta} = F_2(\beta).$$

La derivada de  $F_2$  respecto de  $\beta$  vale, para  $\beta \neq 0$ ,

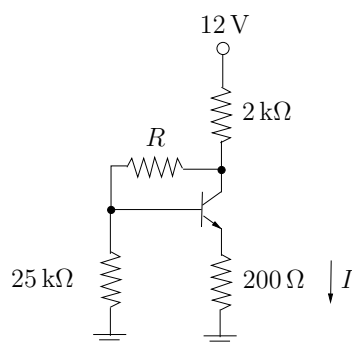
$$\frac{dF_2}{d\beta} = \frac{3,098(4\beta) - 4(3,098\beta + 3,098)}{16\beta^2} = -\frac{12,39}{16\beta^2} = -\frac{0,7744}{\beta^2},$$

que es  $< 0$  para todos los valores posibles de  $\beta$ , que no incluyen  $\beta = 0$ . Así pues,  $F_2$  es una función decreciente de  $\beta$  en  $[20, 150]$ , la condición más restrictiva se obtiene para  $\beta = 150$ , y  $R_3$  deberá satisfacer

$$R_3 \leq \frac{(3,098)(150) + 3,098}{(4)(150)} = 0,7797 \text{ k}\Omega = 779,7 \Omega.$$

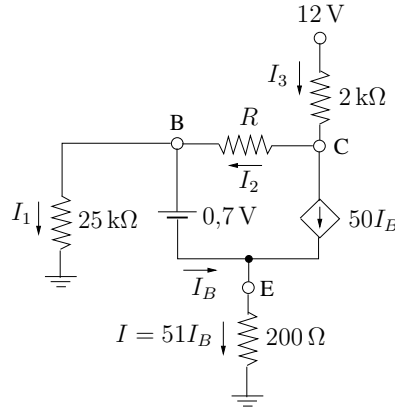
Así pues, para que para cualquier valor posible de  $\beta$ , el diodo Zener trabaje en RUPTURA con una corriente inversa  $\geq 0,5 \text{ mA}$  y el BJT trabaje en estado ACTIVO, el valor de  $R_1$  no deberá superar  $10,40 \text{ k}\Omega$  y el valor de  $R_3$  no deberá superar  $779,7 \Omega$ .

**Problema 36:** Usando para el BJT el modelo con parámetros  $\beta = 50$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ , analice el circuito de la figura y determine el valor que ha de tener  $R$  para que  $I$  valga  $2 \text{ mA}$ .



**Solución:** Con el BJT en CORTE,  $I$  sería 0. Todo parece indicar que el BJT debe estar en ACTIVO o en SATURACIÓN. Supongamos que está en ACTIVO. Con el BJT en dicho estado,

se obtiene el circuito



Las condiciones a verificar son  $I_B \geq 0$  y  $V_{CE} \geq 0,2$ . Dado que  $I = 51I_B$ , para que  $I = 2 \text{ mA}$ ,  $I_B$  deberá valer

$$I_B = \frac{2}{51} = 0,03922 ,$$

que es  $\geq 0$ . Calculemos la tensión de la base,  $V_B$ :

$$V_B = 0,7 + 0,2I = 0,7 + (0,2)(2) = 1,1 .$$

Calculemos la corriente  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{V_B}{25} = \frac{1,1}{25} = 0,044 .$$

$I_2$  puede ser calculada a partir de  $I_1$  e  $I_B$  aplicando la primera ley de Kirchoff a la base del BJT:

$$I_2 = I_1 + I_B = 0,044 + 0,03922 = 0,08322 .$$

La corriente  $I_3$  puede ser calculada aplicando la primera ley de Kirchoff al colector del BJT:

$$I_3 = I_2 + 50I_B = 0,0832 + (50)(0,03922) = 2,044 .$$

Calculemos la tensión de colector,  $V_C$ :

$$V_C = 12 - 2I_3 = 12 - (2)(2,044) = 7,912 .$$

Calculemos la tensión de emisor,  $V_E$ :

$$V_E = 0,2I = (0,2)(2) = 0,4 .$$

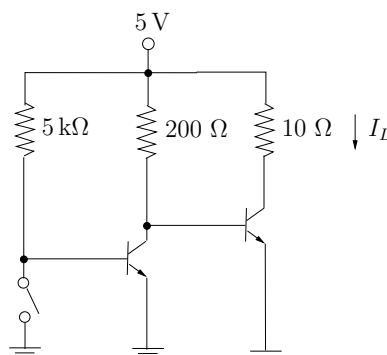
La tensión  $V_{CE}$  resulta valer

$$V_{CE} = V_C - V_E = 7,912 - 0,4 = 7,512 ,$$

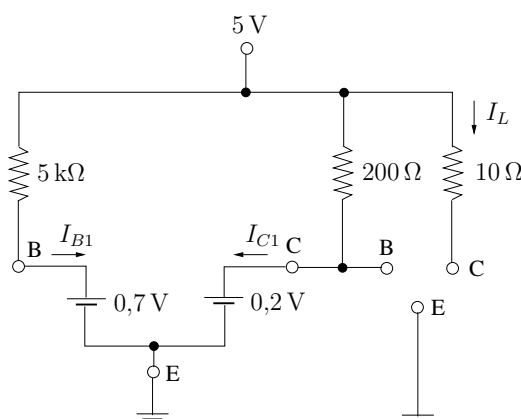
que es  $\geq 0,2$ . Por tanto, el estado supuesto para el BJT es correcto. El valor necesario para  $R$  puede ser obtenido imponiendo  $V_C - V_B = RI_2$ . Ello da

$$R = \frac{V_C - V_B}{I_2} = \frac{7,912 - 1,1}{0,08322} = 81,86 \text{ k}\Omega .$$

**Problema 37:** Determine para el circuito de la figura el valor de  $I_L$  cuando el interruptor está en OFF y cuando está en ON. Use para los BJTs el modelo con parámetros  $\beta = 50$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ .



**Solución:** Sea Q1 el BJT de la izquierda, sea Q2 el BJT de la derecha y denotemos con los sub-índices 1 y 2 las tensiones y corrientes de, respectivamente, Q1 y Q2. Empezaremos analizando el circuito para el caso interruptor en OFF. Supondremos que Q1 está en SATURACIÓN y que Q2 está en CORTE. Para esos estados, se obtiene, teniendo en cuenta que el interruptor está en OFF, el circuito



Se ha de verificar  $I_{B1} \geq 0$ ,  $I_{C1} \geq 0$ ,  $I_{C1} \leq 50I_{B1}$ ,  $V_{BE2} \leq 0,7$  y  $V_{CE2} \geq 0$ . Por inspección,  $I_L = 0$  y  $V_{BE2} = 0,2$ , que es  $\leq 0,7$ . También por inspección, teniendo en cuenta  $I_L = 0$ ,  $V_{CE2} = 5$ , que es  $\geq 0$ . Así pues, basta verificar  $I_{B1} \geq 0$ ,  $I_{C1} \geq 0$  e  $I_{C1} \leq 50I_{B1}$ . Para calcular  $I_{B1}$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor 5 kΩ y la fuente de tensión de valor 0,7 V, obteniendo

$$5 = 5I_{B1} + 0,7,$$

$$I_{B1} = \frac{5 - 0,7}{5} = 0,86,$$

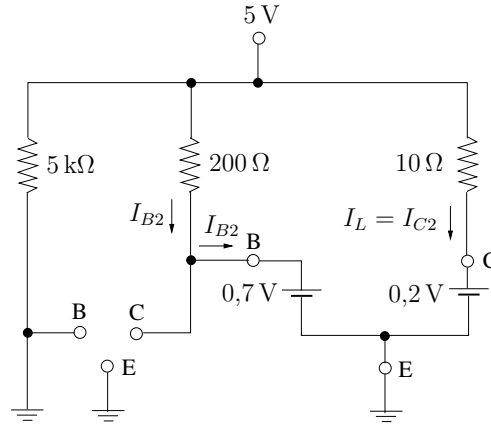
que es  $\geq 0$ . Para calcular  $I_{C1}$  aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor 200 Ω y la fuente de tensión de valor 0,2 V, obteniendo

$$5 = 0,2I_{C1} + 0,2,$$

$$I_{C1} = \frac{5 - 0,2}{0,2} = 24,$$

que es  $\geq 0$  y  $\leq 50I_{B1} = (50)(0,86) = 43$ . Así pues, los estados supuestos para los BJTs son correctos y, con el interruptor en OFF,  $I_L = 0$ .

Analizaremos por último el circuito para el caso interruptor en ON. Con  $I$  en ON,  $V_{BE1} = 0 \leq 0,7$  y, suponiendo  $V_{CE1} \geq 0$ , Q1 estará en CORTE. Supondremos Q1 en CORTE y Q2 en SATURACIÓN. Para esos estados, se obtiene, teniendo en cuenta que el interruptor está en ON, el circuito



Se ha de verificar  $V_{CE1} \geq 0$ ,  $I_{B2} \geq 0$ ,  $I_{C2} \geq 0$ , e  $I_{C2} \leq 50I_{B2}$ . Por inspección,  $V_{CE1} = 0,7$  V, que es  $\geq 0$ . Para calcular  $I_{B2}$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $200 \Omega$  y la fuente de tensión de valor 0,7 V, obteniendo

$$5 = 0,2I_{B2} + 0,7,$$

$$I_{B2} = \frac{5 - 0,7}{0,2} = 21,5,$$

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $I_{C2}$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $10 \Omega$  y la fuente de tensión de valor 0,2 V, obteniendo

$$5 = 0,01I_{C2} + 0,2,$$

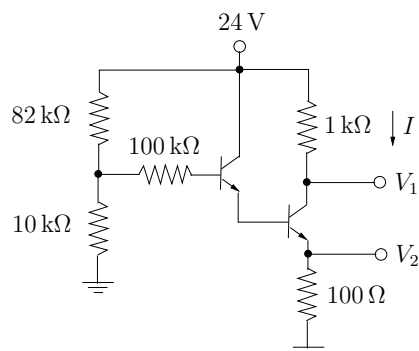
$$I_{C2} = \frac{5 - 0,2}{0,01} = 480,$$

que es  $\geq 0$  y  $\leq 50I_{B2} = (50)(21,5) = 1.075$ . Así pues, los estados supuestos para los BJTs son correctos y, con el interruptor en ON,  $I_L = I_{C2} = 480$  mA.

**Problema 38:** Determine para el circuito de la figura los valores de  $I$ ,  $V_1$  y  $V_2$ . Use para los



BJTs el modelo con parámetros  $\beta = 50$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ .

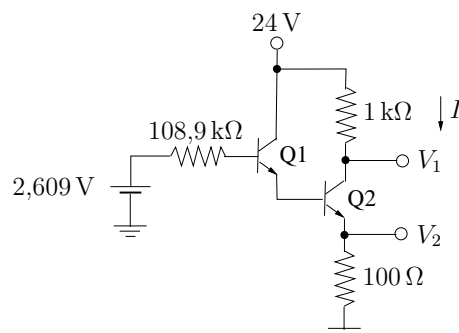


**Solución:** Sea Q1 el BJT de la izquierda, sea Q2 el BJT de la derecha, y denotemos con los subíndices 1 y 2 las tensiones y corrientes de, respectivamente, Q1 y Q2. Empezaremos determinando el equivalente de Thévenin del dipolo formado por la fuente de tensión de valor 24 V y las resistencias de valores 82 Ω, 10 kΩ y 100 kΩ, que tiene como salidas la base de Q1 y masa. La tensión de Thévenin,  $V_{th}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_{th}$ , valen

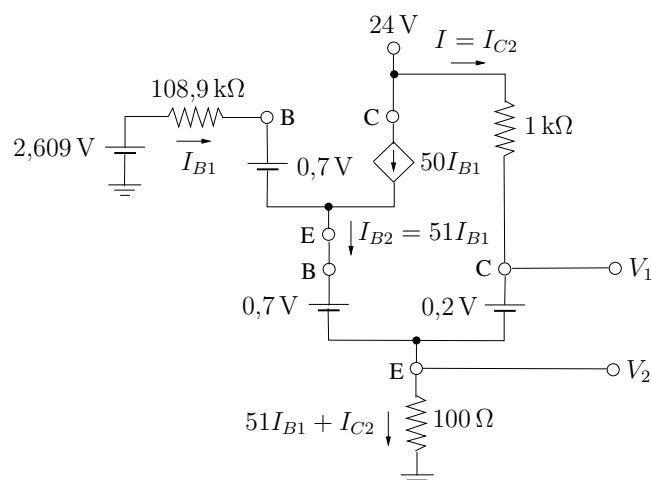
$$V_{th} = \frac{10}{10 + 82} 24 = 2,609 \text{ V},$$

$$R_{th} = 100 + 10 \parallel 82 = 100 + \frac{(10)(82)}{10 + 82} = 108,9 \text{ k}\Omega.$$

Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin se obtiene el circuito



Supongamos que Q1 está en ACTIVO y que Q2 está en SATURACIÓN. Se obtiene el circuito



Las condiciones a verificar son  $I_{B1} \geq 0$ ,  $V_{CE1} \geq 0,2$ ,  $I_{B2} \geq 0$ ,  $I_{C2} \geq 0$ , e  $I_{C2} \leq 50I_{B2}$ . Dado que  $I_{B2} = 51I_{B1}$ ,  $I_{B2} \geq 0$  queda reducida a  $I_{B1} \geq 0$ . Así pues, basta verificar  $I_{B1} \geq 0$ ,  $V_{CE1} \geq 0,2$  V,  $I_{C2} \geq 0$  e  $I_{C2} \leq 50I_{B2}$ . Empezaremos calculando  $I_{B1}$  e  $I_{C2}$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 2,609 V, la resistencia de valor 108,9 k $\Omega$ , las fuentes de tensión de valor 0,7 V y la resistencia de valor 100  $\Omega$  y a la malla formada por la fuente de tensión de valor 24 V, la resistencia de valor 1 k $\Omega$ , la fuente de tensión de valor 0,2 V y la resistencia de valor 100  $\Omega$ , se obtiene

$$2,609 = 108,9I_{B1} + 0,7 + 0,7 + 0,1(51I_{B1} + I_{C2}),$$

$$24 = (1)I_{C2} + 0,2 + (0,1)(51I_{B1} + I_{C2})$$

y el sistema de ecuaciones lineales

$$114I_{B1} + 0,1I_{C2} = 1,209$$

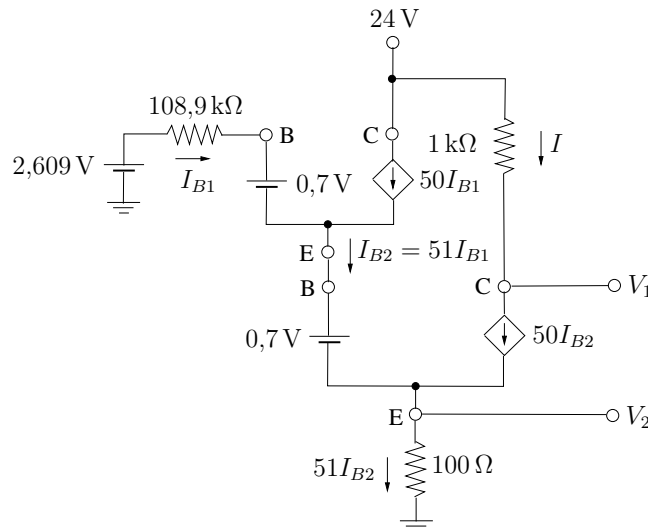
$$5,1I_{B1} + 1,1I_{C2} = 23,8$$

cuya solución es

$$I_{B1} = \frac{\begin{vmatrix} 1,209 & 0,1 \\ 23,8 & 1,1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 114 & 0,1 \\ 5,1 & 1,1 \end{vmatrix}} = \frac{-1,05}{124,9} = -0,008407,$$

$$I_{C2} = \frac{\begin{vmatrix} 114 & 1,209 \\ 5,1 & 23,8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 114 & 0,1 \\ 5,1 & 1,1 \end{vmatrix}} = \frac{2,707}{124,9} = 21,67.$$

Dado que  $I_{B1}$  no es  $\geq 0$ , el par de estados supuesto para los BJT's no es correcto. Supongamos que los dos BJT's están en ACTIVO. Con esos estados, se obtiene el circuito



Las condiciones a verificar son  $I_{B1} \geq 0$ ,  $V_{CE1} \geq 0,2$ ,  $I_{B2} \geq 0$  y  $V_{CE2} \geq 0,2$ . Dado que  $I_{B2} = 51I_{B1}$ , la condición  $I_{B2} \geq 0$  queda reducida a  $I_{B1} \geq 0$ . Así pues, basta verificar  $I_{B1} \geq 0$ ,

$V_{CE1} \geq 0,2 \text{ V}$  y  $V_{CE2} \geq 0,2 \text{ V}$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $2,609 \text{ V}$ , la resistencia de valor  $108,9 \text{ k}\Omega$ , las fuentes de tensión de valor  $0,7 \text{ V}$  y la resistencia de valor  $100 \Omega$ , se obtiene

$$2,609 = 108,9I_{B1} + 0,7 + 0,7 + (0,1)(51I_{B2}) = 108,9I_{B1} + 5,1I_{B2} + 1,4$$

y, usando  $I_{B2} = 51I_{B1}$ ,

$$2,609 = 108,9I_{B1} + (5,1)(51I_{B1}) + 1,4 = 369I_{B1} + 1,4,$$

$$I_{B1} = \frac{2,609 - 1,4}{369} = 0,003276,$$

que es  $\geq 0$ . Usando de nuevo  $I_{B2} = 51I_{B1}$ , la tensión  $V_{CE1}$  puede ser calculada de la forma

$$\begin{aligned} V_{CE1} &= V_{C1} - V_{E1} = 24 - (0,7 + (0,1)(51I_{B2})) = 23,3 - 5,1I_{B2} = 23,3 - (5,1)(51I_{B1}) \\ &= 23,3 - 260,1I_{B1} = 23,3 - (260,1)(0,003276) = 22,45, \end{aligned}$$

que es  $\geq 0,2$ . Usando  $I_{B2} = 51I_{B1}$ , la tensión  $V_{CE2}$  puede ser calculada de la forma

$$\begin{aligned} V_{CE2} &= V_{C2} - V_{E2} = (24 - (1)(50I_{B2})) - (0,1)(51I_{B2}) = 24 - 55,1I_{B2} \\ &= 24 - (55,1)(51I_{B1}) = 24 - 2.810I_{B1} = 24 - (2.810)(0,003276) = 14,79, \end{aligned}$$

que es  $\geq 0,2$ . Así pues, los estados supuestos para los BJTs son correctos. Usando  $I_{B2} = 51I_{B1}$ , la corriente  $I$  resulta valer

$$I = 50I_{B2} = (50)(51I_{B1}) = 2.550I_{B1} = (2.550)(0,003276) = 8,354 \text{ mA}.$$

La tensión  $V_1$  vale

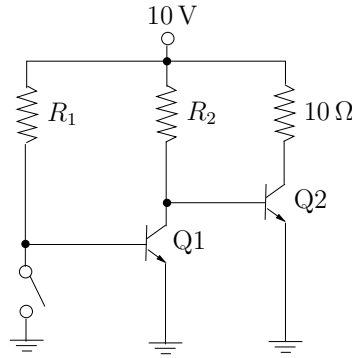
$$V_1 = 24 - (1)I = 24 - 8,354 = 15,65 \text{ V}.$$

Finalmente, usando  $I_{B2} = 51I_{B1}$ , la tensión  $V_2$  vale

$$V_2 = (0,1)(51I_{B2}) = 5,1I_{B2} = (5,1)(51I_{B1}) = 260,1I_{B1} = (260,1)(0,003276) = 0,8521 \text{ V}.$$

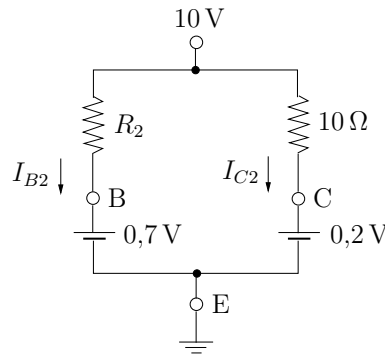
**Problema 39:** Los BJT del circuito de la figura tienen un parámetro  $\beta$  comprendido entre 20 y 150. Usando para los BJT el modelo con parámetros  $\beta$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ , analice el circuito de la figura y: 1) determine el máximo valor que puede tener  $R_2$  para que, con el interruptor en ON, el BJT Q2 esté en saturación; 2) para el valor máximo de  $R_2$  calculado en el apartado anterior, determine el valor máximo que puede tener  $R_1$  para que, con el interruptor en OFF, Q1 esté en saturación; 3) para los valores máximos de  $R_1$  y  $R_2$  calculados anteriormente,

determine el valor de la corriente por el interruptor cuando éste está en ON.



**Solución:** Usaremos el subíndice 1 para las tensiones y corrientes de Q1 y el subíndice 2 para las tensiones y corrientes de Q2.

1) Con Q2 en SATURACIÓN,  $V_{CE1} = V_{BE2} = 0,7$ , que es  $\geq 0$ . Con el interruptor en ON,  $V_{BE1} = 0$ , que es  $< 0,7$ .  $V_{CE1} \geq 0$  y  $V_{BE1} < 0,7$  implican Q1 en CORTE. Así pues, Q2 en SATURACIÓN implica Q1 en CORTE. Supongamos, pues, Q2 en SATURACIÓN y, sabiendo que Q1 está en CORTE, impongamos  $I_{B2} \geq 0$ ,  $I_{C2} \geq 0$  e  $I_{C2} \leq \beta I_{B2}$ . Con Q1 en CORTE y Q2 en SATURACIÓN, se obtiene el circuito



Para calcular  $I_{B2}$ , aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor  $R_2$  y la fuente de tensión de valor 0,7 V, obteniendo

$$10 = R_2 I_{B2} + 0,7,$$

$$I_{B2} = \frac{10 - 0,7}{R_2} = \frac{9,3}{R_2},$$

que es  $\geq 0$  para todo  $R_2$ . Para calcular  $I_{C2}$ , aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor  $10\Omega$  y la fuente de tensión de valor 0,2 V, obteniendo

$$10 = 0,01 I_{C2} + 0,2,$$

$$I_{C2} = \frac{10 - 0,2}{0,01} = 980,$$

que es  $\geq 0$ . Finalmente imponiendo  $I_{C2} \leq \beta I_{B2}$ , obtenemos

$$980 \leq \beta \frac{9,3}{R_2},$$

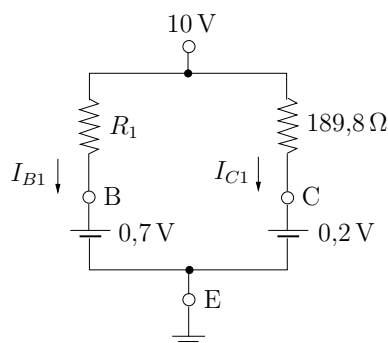
$$R_2 \leq \frac{9,3}{980} \beta = 0,00949 \beta.$$

La condición más restrictiva se obtiene para  $\beta = 20$ , dando

$$R_2 \leq (0,00949)(20) = 0,1898 \text{ k}\Omega = 189,8 \Omega.$$

Así pues, el valor máximo de  $R_2$  para el cual, con el interruptor en ON, Q2 estará en SATURACIÓN es  $189,8 \Omega$ .

2) Con Q1 en SATURACIÓN,  $V_{BE2} = V_{CE1} = 0,2$ , que es  $< 0,7$ . Ello implica que Q2 estará en CORTE, debiéndose únicamente verificar  $V_{CE2} \geq 0$ . Pero, con Q2 en CORTE, la corriente por la resistencia de valor  $10 \Omega$  es nula y  $V_{CE2} = 10 \geq 0$ . Así pues, Q1 en SATURACIÓN implica Q2 en CORTE. Supongamos Q1 en SATURACIÓN y, sabiendo que Q2 está en CORTE, impongamos  $I_{B1} \geq 0$ ,  $I_{C1} \geq 0$  e  $I_{C1} \leq \beta I_{B1}$ . Con el interruptor en OFF, Q2 en CORTE, y Q1 en SATURACIÓN, se obtiene, para el máximo valor de  $R_2$ ,  $R_2 = 189,8 \Omega$ , calculado en el apartado anterior, el circuito



Para calcular  $I_{B1}$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $10 \text{ V}$ , la resistencia de valor  $R_1$  y la fuente de tensión de valor  $0,7 \text{ V}$ , obteniendo

$$10 = R_1 I_{B1} + 0,7,$$

$$I_{B1} = \frac{10 - 0,7}{R_1} = \frac{9,3}{R_1},$$

que es  $\geq 0$  para todo  $R_1$ . Para calcular  $I_{C1}$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $10 \text{ V}$ , la resistencia de valor  $189,8 \Omega$  y la fuente de tensión de valor  $0,2 \text{ V}$ , obteniendo

$$10 = 0,1898 I_{C1} + 0,2,$$

$$I_{C1} = \frac{10 - 0,2}{0,1898} = 51,63,$$

que es  $\geq 0$ . Finalmente imponiendo  $I_{C1} \leq \beta I_{B1}$ , se obtiene

$$51,63 \leq \beta \frac{9,3}{R_1},$$

$$R_1 \leq \frac{9,3}{51,63} \beta = 0,1801 \beta.$$

La condición más restrictiva se obtiene para  $\beta = 20$ , dando

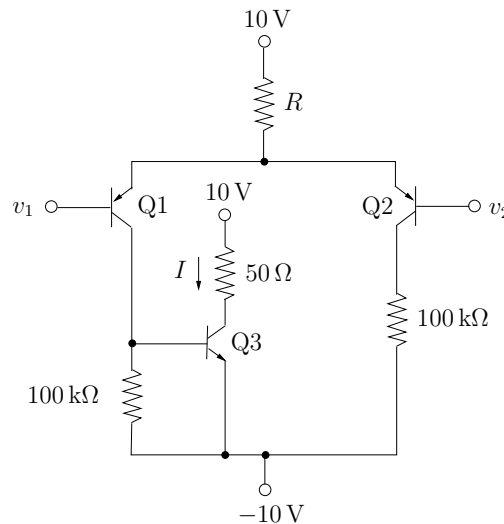
$$R_1 \leq (0,1801)(20) = 3,602 \text{ k}\Omega.$$

Así pues, para el valor máximo calculado en el apartado anterior para  $R_2$  y con el interruptor en OFF, el valor máximo de  $R_1$  para el cual Q1 estará en SATURACIÓN es 3,602 k $\Omega$ .

3) Con el interruptor en ON y con el valor máximo para  $R_2$  calculado en el apartado 1), tal y como se ha visto en ese apartado, Q1 estará en CORTE. Ello implica  $I_{B1} = 0$  y que la corriente por el interruptor sea igual a la corriente por la resistencia de valor  $R_1$ , que, con el interruptor en ON, ve una tensión de valor 10 V. Así pues, la corriente por el interruptor valdrá

$$\frac{10}{R_1} = \frac{10}{3,602} = 2,776 \text{ mA}.$$

**Problema 40:** Los BJT Q1, Q2 y Q3 del circuito de la figura tienen un parámetro  $\beta$  comprendido entre 20 y 150. Las tensiones  $v_1$  y  $v_2$  pueden variar entre 0 y 5 V. Usando para Q1 y Q2 el modelo con parámetros  $\beta$ ,  $V_{EB0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{EC,sat} = 0,2 \text{ V}$ , y para Q3 el modelo con parámetros  $\beta$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ , analice el circuito de la figura y: 1) demuestre que, con  $v_1 > v_2$ ,  $I = 0$ ; 2) determine el máximo valor de  $R$  para el cual con  $v_1 < v_2$ , Q3 está en saturación. Ayuda: para el apartado 1), suponga que Q2 está en activo o en saturación, determine los estados de Q1 y Q3, y luego demuestre que efectivamente Q2 está en activo o en saturación, dependiendo del valor de  $R$ .



**Solución:** Denotaremos mediante los subíndices 1, 2 y 3 las tensiones y corrientes correspondientes a, respectivamente, Q1, Q2 y Q3.

1) Empecemos suponiendo que Q2 está en ACTIVO o en SATURACIÓN. En ambos casos tenemos  $V_{EB2} = 0,7$  y una tensión de emisor de Q2,  $V_{E2} = v_2 + 0,7$ . La tensión  $V_{EB1}$  resulta valer

$$V_{EB1} = V_{E2} - v_1 = v_2 + 0,7 - v_1 = 0,7 + v_2 - v_1,$$

que para  $v_1 > v_2$  es  $< 0,7$ . Ello implica que Q1 estará en CORTE, debiéndose únicamente verificar  $V_{EC1} \geq 0$ . Hagámoslo y, de paso, determinemos el estado de Q3. Con Q1 en corte,  $I_{C1} = 0$ . Puede verse que eso implica que Q3 estará en CORTE. Se ha de verificar  $V_{BE3} \leq 0,7$  y  $V_{CE3} \geq 0$ . Con Q3 en CORTE,  $I_{B3} = 0$ . Siendo  $I_{C1} = 0$ , ello implica que la corriente por la resistencia de valor  $100\text{ k}\Omega$  conectada a la base de Q3 sea 0 y que  $V_{BE3} = 0$ , que es  $\leq 0,7$ . Con Q3 en CORTE,  $I = I_{C3} = 0$ , implicando  $V_{CE3} = 10 - (-10) = 20$ , que es  $\geq 0,2$ . Así pues, Q1 en CORTE implica Q3 en CORTE. Hemos de comprobar  $V_{EC1} \geq 0$  sabiendo que Q3 está en CORTE. Dado que la corriente por la resistencia de valor  $100\text{ k}\Omega$  conectada a la base de Q3 es 0, la tensión de colector de Q1 valdrá  $-10$  y

$$V_{EC1} = V_{E2} - (-10) = V_{E2} + 10 = v_2 + 0,7 + 10 = 10,7 + v_2,$$

que es  $\geq 0$  para todos los valores posibles de  $v_2$ .

En resumen, supuesto Q2 en ACTIVO o en SATURACIÓN, Q1 y Q3 estarán en CORTE e  $I = 0$ . Falta comprobar que Q2 está en ACTIVO o en SATURACIÓN. Podemos usar el hecho de que Q1 y Q3 están en CORTE.

Se ha visto antes que  $V_{E2} = v_2 + 0,7$ . Estando Q1 en CORTE, la corriente por la resistencia de valor  $R$  será la corriente de emisor de Q2,  $I_{E2}$ , y tendremos

$$I_{E2} = \frac{10 - V_{E2}}{R} = \frac{10 - (v_2 + 0,7)}{R} = \frac{9,3 - v_2}{R},$$

que, para todos los valores posibles de  $v_2$  es  $> 0$ . Supongamos Q2 en ACTIVO. Se ha de verificar  $I_{B2} \geq 0$  y  $V_{EC2} \geq 0,2$ . Dado que en ACTIVO  $I_{B2} = I_{E2}/(\beta_2 + 1)$ , tendremos  $I_{B2} > 0$ , verificándose la primera condición. La condición  $V_{EC2} \geq 0,2$  puede o no cumplirse dependiendo del valor de  $R$ . En efecto, con Q2 en ACTIVO, la corriente de colector de Q2 valdrá  $I_{C2} = \beta_2/(\beta_2 + 1)I_{E2}$ , la tensión de colector de Q2 valdrá  $V_{C2} = -10 + 100I_{C2}$ , y  $V_{EC2} = V_{E2} - V_{C2} = v_2 + 0,7 + 10 - 100I_{C2} = v_2 + 10,7 - 100I_{C2}$ . Para  $R$  suficientemente pequeña,  $I_{E2}$  e  $I_{C2}$  serán suficientemente grandes y  $V_{EC2}$  será  $< 0,2$ , en contradicción con Q2 en estado ACTIVO. Vamos a ver que en éste caso, Q2 estará en SATURACIÓN. En ese estado,  $V_{EC2} = 0,2$ . Además,  $I_{C2} < (\beta_2/(\beta_2 + 1))I_{E2}$ , pues  $V_{EC2} = v_2 + 10,7 - 100I_{C2}$  y  $I_{C2} = \beta_2/(\beta_2 + 1)I_{E2}$  conducen a  $V_{EC2} < 0,2$ . De hecho,  $I_{C2}$  valdrá

$$I_{C2} = \frac{V_{C2} - (-10)}{100} = \frac{V_{C2} + 10}{100} = \frac{V_{E2} - V_{EC2} + 10}{100} = \frac{v_2 + 0,7 - 0,2 + 10}{100} = \frac{v_2 + 10,5}{100}.$$

Hemos de verificar  $I_{B2} \geq 0$ ,  $I_{C2} \geq 0$  y  $I_{C2} \leq \beta I_{B2}$ . Dado que  $I_{B2} = I_{E2} - I_{C2}$  e  $I_{C2} < (\beta_2/(\beta_2 + 1))I_{E2}$ , tendremos  $I_{B2} > I_{E2} - (\beta_2/(\beta_2 + 1))I_{E2} = I_{E2}/(\beta_2 + 1) > 0$ . De la expresión de  $I_{C2}$  en función de  $v_2$  se deduce que para todos los valores posibles de  $v_2$ ,  $I_{C2} \geq 0$ . Finalmente, usando  $I_{C2} < (\beta_2/(\beta_2 + 1))I_{E2}$  e  $I_{B2} > I_{E2}/(\beta_2 + 1) > 0$ , teniendo en cuenta  $I_{B2} > 0$ , obtenemos

$$\frac{I_{C2}}{I_{B2}} < \frac{\frac{\beta_2}{\beta_2 + 1} I_{E2}}{\frac{I_{E2}}{\beta_2 + 1}} = \beta_2,$$

que, con  $I_{B2} > 0$ , implica  $I_{C2} < \beta_2 I_{B2}$ . Así pues, cuando Q2 no está en estado ACTIVO, está en estado SATURACIÓN y Q2 está necesariamente en uno de esos dos estados. Ello concluye la demostración.

2) Con Q3 en SATURACIÓN y  $v_1 < v_2$ , Q1 está en estado ACTIVO y Q2 está en CORTE. Veamos primero que con Q2 en CORTE, Q1 está en estado ACTIVO. Con Q1 en estado ACTIVO,  $V_{EB1} = 0,7$  y la tensión de emisor de Q1 vale  $V_{E1} = v_1 + 0,7$ . Además, la corriente por la resistencia de valor  $R$  será la corriente de emisor de Q1 y valdrá

$$I_{E1} = \frac{10 - (v_1 + 0,7)}{R} = \frac{9,3 - v_1}{R},$$

que es  $> 0$  para todos los valores posibles de  $v_1$ . Hemos de comprobar  $I_{B1} \geq 0$  y  $V_{EC1} \geq 0,2$ . Como en estado ACTIVO  $I_{B1} = I_{E1}/(\beta_1 + 1)$ , tenemos  $I_{B1} > 0$ , comprobando la primera condición. Para la segunda, con Q3 en SATURACIÓN,  $V_{BE3} = 0,7$  y  $V_{C1} = -10 + 0,7 = -9,3$ , dando

$$V_{EC1} = V_{E1} - V_{C1} = v_1 + 0,7 - (-9,3) = v_1 + 10,$$

que es  $\geq 0,2$  para todos los valores posibles de  $v_1$ . Acabamos de comprobar que con Q2 en CORTE, Q1 está en estado ACTIVO. Comprobemos que Q2 está en CORTE, sabiendo que Q1 está en estado ACTIVO. La tensión  $V_{EB2}$  vale

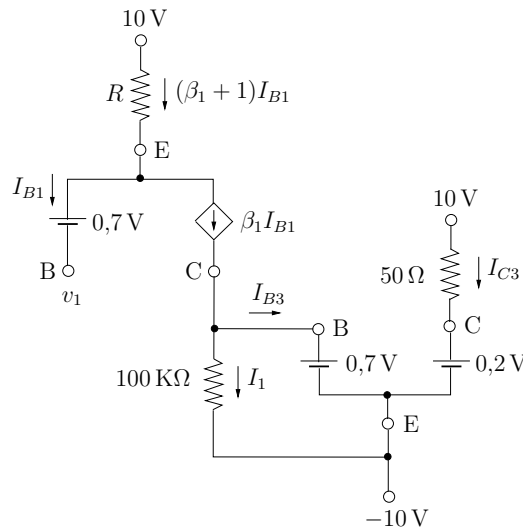
$$V_{EB2} = V_{E2} - v_2 = V_{E1} - v_2 = v_1 + 0,7 - v_2 = 0,7 + v_1 - v_2,$$

que con  $v_1 < v_2$  es  $< 0,7$ . Basta comprobar  $V_{EC2} \geq 0$ . Con Q2 en corte,  $I_{C2} = 0$  y la tensión de colector de Q2 vale  $V_{C2} = -10$ . Ello da

$$V_{EC2} = V_{E2} - V_{C2} = V_{E1} - V_{C2} = v_1 + 0,7 - (-10) = v_1 + 10,7,$$

que para todos los valores posibles de  $v_1$  es  $\geq 0$ .

En resumen, con Q3 en SATURACIÓN y  $v_1 < v_2$ , Q1 está en ACTIVO y Q2 está en CORTE. Con esos estados, obtenemos el circuito



Hemos de imponer las condiciones del estado SATURACIÓN de Q3, es decir  $I_{B3} \geq 0$ ,  $I_{C3} \geq 0$ , e  $I_{C3} \leq \beta_3 I_{B3}$ . Calculemos  $I_{B3}$  e  $I_{C3}$ .



Para calcular  $I_{C3}$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor  $50\ \Omega$ , la fuente de tensión de valor 0,2 V y la fuente de tensión de valor  $-10$  V, obteniendo

$$10 = 0,05I_{C3} + 0,2 - 10 = 0,05I_{C3} - 9,8,$$

$$I_{C3} = \frac{19,8}{0,05} = 396,$$
(2.9)

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $I_1$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 0,7 V del circuito equivalente de Q3 y la resistencia de valor  $100\ \text{k}\Omega$ , obteniendo

$$0,7 = 100I_1,$$

$$I_1 = \frac{0,7}{100} = 0,007.$$
(2.10)

Para calcular  $I_{B1}$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor  $R$ , la fuente de tensión de valor 0,7 V del circuito equivalente de Q1 y la fuente de tensión de valor  $v_1$ , obteniendo

$$10 = R(\beta_1 + 1)I_{B1} + 0,7 + v_1,$$

$$I_{B1} = \frac{9,3 - v_1}{R(\beta_1 + 1)}.$$
(2.11)

Por último, para calcular  $I_{B3}$  conociendo  $I_1$  e  $I_{B1}$ , aplicamos la primera ley de Kirchoff al nodo conectado al colector de Q1, obteniendo

$$\beta_1 I_{B1} = I_1 + I_{B3},$$

y, usando (2.10) y (2.11),

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + 1} \frac{9,3 - v_1}{R} = 0,007 + I_{B3},$$

$$I_{B3} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + 1} \frac{9,3 - v_1}{R} - 0,007.$$
(2.12)

La condición  $I_{B3} \geq 0$  se traduce en

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + 1} \frac{9,3 - v_1}{R} - 0,007 \geq 0,$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + 1} \frac{9,3 - v_1}{R} \geq 0,007,$$

$$R \leq \frac{\beta_1}{\beta_1 + 1} \frac{9,3 - v_1}{0,007}.$$

Dado que el miembro de la derecha es una función creciente de  $\beta_1$  y decreciente de  $v_1$ , la condición más restrictiva se alcanza para el menor valor posible de  $\beta_1$  y el mayor valor posible de  $v_1$ , y es

$$R \leq \frac{20}{20 + 1} \frac{9,3 - 5}{0,007} = 585,0\ \text{k}\Omega.$$

Por último, la condición  $I_{C3} \leq \beta_3 I_{B3}$  se traduce, usando (2.9) y (2.12), en

$$396 \leq \beta_3 \left( \frac{\beta_1}{\beta_1 + 1} \frac{9,3 - v_1}{R} - 0,007 \right),$$

$$396 \leq \beta_3 \frac{\beta_1}{\beta_1 + 1} \frac{9,3 - v_1}{R} - 0,007\beta_3,$$

$$\beta_3 \frac{\beta_1}{\beta_1 + 1} \frac{9,3 - v_1}{R} \geq 396 + 0,007\beta_3,$$

$$R \leq \frac{\beta_3}{0,007\beta_3 + 396} \frac{\beta_1}{\beta_1 + 1} (9,3 - v_1).$$

El miembro de la derecha es creciente con  $\beta_1$  y  $\beta_3$  y decreciente con  $v_1$ , la condición más restrictiva se alcanza con los menores valores posibles para  $\beta_1$  y  $\beta_3$  y con el mayor valor posible para  $v_1$ , y es

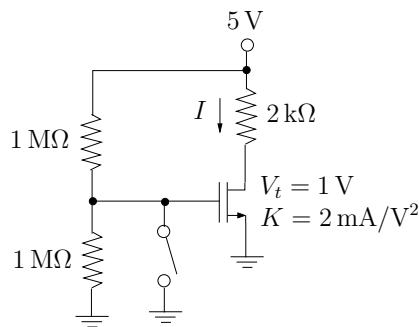
$$R \leq \frac{20}{(0,007)(20) + 396} \frac{20}{20 + 1} (9,3 - 5) = 0,2068 \text{ k}\Omega = 206,8 \Omega.$$

Dicha condición para  $R$  es más restrictiva que la condición  $R \leq 585,0 \text{ k}\Omega$  obtenida imponiendo  $I_{B3} \geq 0$ , por lo que el mayor valor de  $R$  para el cual, con  $v_1 < v_2$ , Q3 estará en SATURACIÓN es  $206,8 \Omega$ .

## Capítulo 3

# Problemas de Análisis de Circuitos con MOSFETs

**Problema 41:** Analice el circuito de la figura y determine los valores de la corriente  $I$  cuando el interruptor está en ON y cuando el interruptor está en OFF.



**Solución:** Con el interruptor en ON,  $V_{GS} = 0 < V_t = 1$ , el transistor trabajará en la zona corte e  $I = 0$ . Únicamente se ha de verificar  $V_{DS} \geq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $2\text{k}\Omega$  y el MOSFET, obtenemos

$$5 = 2I + V_{DS} = V_{DS},$$

$$V_{DS} = 5,$$

que es  $\geq 0$ .

Con el interruptor en OFF, teniendo en cuenta que la corriente por la puerta del transistor es nula, la fuente de tensión de valor 5 V y las dos resistencias de valor  $1\text{M}\Omega$  forman un divisor de tensión, y

$$V_{GS} = \frac{1\text{M}\Omega}{1\text{M}\Omega + 1\text{M}\Omega} 5 = 2,5,$$

que es  $> V_t = 1$ . Ello implica que el transistor no trabajará en la zona corte. Supongamos que trabaja en la zona saturación. La única condición a verificar es  $V_{DS} \geq V_{GS} - V_t = 2,5 - 1 = 1,5$ .

La corriente  $I$  vale

$$I = K(V_{GS} - V_t)^2 = (2)(2,5 - 1)^2 = (2)(1,5)^2 = 4,5.$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $2\text{ k}\Omega$  y el MOSFET, obtenemos

$$5 = 2I + V_{DS},$$

$$V_{DS} = 5 - 2I = 5 - (2)(4,5) = -4,$$

que no es  $\geq 1,5$ . Supongamos que el transistor trabaja en la zona óhmica. Las condiciones a verificar son  $V_{DS} \geq 0$  y  $V_{DS} \leq V_{GS} - V_t = 2,5 - 1 = 1,5$ . La corriente  $I$  valdrá, en función de  $V_{DS}$ ,

$$I = K [2(V_{GS} - V_t)V_{DS} - V_{DS}^2] = 2 [(2)(2,5 - 1)V_{DS} - V_{DS}^2] = 6V_{DS} - 2V_{DS}^2. \quad (3.1)$$

Por otro lado, aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $2\text{ k}\Omega$  y el MOSFET, se obtiene

$$5 = 2I + V_{DS},$$

que, combinada con (3.1), da la ecuación de segundo grado en  $V_{DS}$

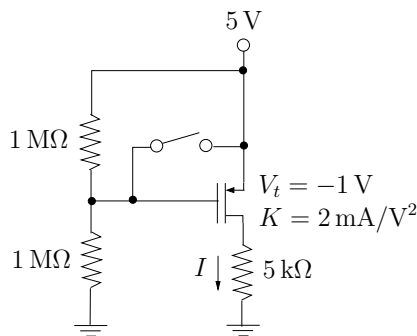
$$5 = 12V_{DS} - 4V_{DS}^2 + V_{DS},$$

$$4V_{DS}^2 - 13V_{DS} + 5 = 0,$$

cuyas soluciones son  $V_{DS} = 2,804$  y  $V_{DS} = 0,4458$ . La solución  $V_{DS} = 0,4458$  verifica  $V_{DS} \geq 0$  y  $V_{DS} \leq 1,5$ . Así pues, el transistor trabaja en la zona óhmica,  $V_{DS} = 0,4458$  y, usando (3.1),

$$I = (6)(0,4458) - (2)(0,4458)^2 = 2,277 \text{ mA}.$$

**Problema 42:** Analice el circuito de la figura y determine los valores de la corriente  $I$  cuando el interruptor está en ON y cuando el interruptor está en OFF.



**Solución:** Con el interruptor en ON,  $V_{GS} = 0 > V_t = -1$ , el transistor trabajará en la zona corte e  $I = 0$ . Únicamente se ha de verificar  $V_{DS} \leq 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la

mallla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, el MOSFET y la resistencia de valor 5 k $\Omega$ , obtenemos

$$5 = -V_{DS} + 5I = -V_{DS} ,$$

$$V_{DS} = -5 ,$$

que es  $\leq 0$ .

Con el interruptor en OFF, teniendo en cuenta que la corriente por la puerta del transistor es nula, la fuente de tensión de valor 5 V y las resistencias de valor 1 M $\Omega$  forman un divisor de tensión, y la tensión de puerta,  $V_G$ , vale

$$V_G = \frac{1 \text{ M}\Omega}{1 \text{ M}\Omega + 1 \text{ M}\Omega} 5 = 2,5 .$$

Siendo  $V_S$  la tensión de la fuente, la tensión  $V_{GS}$  vale  $V_{GS} = V_G - V_S = 2,5 - 5 = -2,5 < V_t = -1$ . Ello implica que el transistor no trabajará en la zona corte. Supongamos que trabaja en la zona saturación. Tenemos

$$I = K(V_{GS} - V_t)^2 = (2)(-2,5 - (-1))^2 = 4,5 .$$

Se ha de verificar  $V_{DS} \leq V_{GS} - V_t = -2,5 - (-1) = -1,5$ . La tensión de drenador,  $V_D$ , vale

$$V_D = 5I = (5)(4,5) = 22,5 .$$

La tensión  $V_{DS}$  resulta, por tanto, valer  $V_{DS} = V_D - V_S = 22,5 - 5 = 17,5$ , que no es  $\leq -1,5$ . Supongamos que el transistor trabaja en la zona óhmica. Se ha de verificar  $V_{DS} \leq 0$  y  $V_{DS} \geq V_{GS} - V_t = -1,5$ . La corriente  $I$ , en función de  $V_{DS}$ , vale

$$\begin{aligned} I &= K [2(V_{GS} - V_t)V_{DS} - V_{DS}^2] = 2 [(2)(-2,5 - (-1))V_{DS} - V_{DS}^2] \\ &= -6V_{DS} - 2V_{DS}^2 . \end{aligned} \quad (3.2)$$

La tensión de drenador,  $V_D$ , vale

$$V_D = 5I = -30V_{DS} - 10V_{DS}^2$$

y, utilizando  $V_{DS} = V_D - V_S = V_D - 5$ , se obtiene la ecuación de segundo grado en  $V_{DS}$

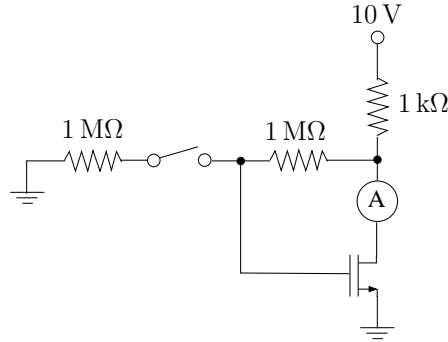
$$V_{DS} = -30V_{DS} - 10V_{DS}^2 - 5 ,$$

$$10V_{DS}^2 + 31V_{DS} + 5 = 0 ,$$

cuyas soluciones son  $V_{DS} = -0,1707$  y  $V_{DS} = -2,929$ . La solución  $V_{DS} = -0,1707$  verifica las condiciones  $V_{DS} \leq 0$  y  $V_{DS} \geq -1,5$ . Así pues, el transistor trabaja en la zona óhmica,  $V_{DS} = -0,1707$  V y, utilizando (3.2), la corriente  $I$  vale

$$I = -(6)(-0,1707) - (2)(-0,1707)^2 = 0,9659 \text{ mA} .$$

**Problema 43:** Se utiliza el circuito de la figura para caracterizar un MOSFET de enriquecimiento de canal n. Cuando el interruptor está en OFF, la lectura del amperímetro es 6,5 mA y, cuando está en ON, 4 mA. ¿Qué valores tienen los parámetros  $V_t$  y  $K$  del transistor?



**Solución:** Siendo el transistor un MOSFET de enriquecimiento de canal n,  $V_t$  será  $> 0$ . Con el interruptor en OFF, siendo nula la corriente por la puerta del transistor, la corriente por la resistencia de valor 1 kΩ es  $I_D$  y  $V_{DS} = 10 - (1)I_D = 10 - (1)(6,5) = 3,5$ . Con el interruptor en ON, despreciando la corriente por las resistencias de valor 1 MΩ, tenemos  $V_{DS} = 10 - (1)I_D = 10 - (1)(4) = 6$ . En ambos casos, pues,  $V_{DS} > 0$ . Entonces,  $I_D > 0$  implica  $V_{GS} > V_t$ , por lo que el transistor no podrá trabajar en la zona corte.

Con el interruptor en OFF, siendo nula la corriente por la puerta del transistor,  $V_{GD} = 0$  y el transistor trabajará en la zona saturación, pues se tiene  $V_{DS} = V_{DG} + V_{GS} = V_{GS} - V_{GD} = V_{GS} > V_{GS} - V_t$ . Obtenemos

$$6,5 = K(V_{GS} - V_t)^2. \quad (3.3)$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor 1 kΩ y el transistor, y utilizando  $V_{DS} = V_{GS}$ , obtenemos

$$10 = (1)I_D + V_{DS} = (1)(6,5) + V_{GS} = 6,5 + V_{GS},$$

$$V_{GS} = 3,5.$$

Sustituyendo este valor en (3.3), obtenemos

$$6,5 = K(3,5 - V_t)^2. \quad (3.4)$$

Con el interruptor en ON, siendo nula la corriente por la puerta del transistor, las resistencias de valor 1 MΩ forman un divisor de tensión, y

$$V_{GS} = \frac{1 \text{ M}\Omega}{1 \text{ M}\Omega + 1 \text{ M}\Omega} V_{DS} = \frac{V_{DS}}{2},$$

$$V_{DS} = 2V_{GS},$$

y el transistor también trabajará en la zona saturación, pues se tendrá  $V_{DS} > V_{GS} > V_{GS} - V_t$ . Obtenemos

$$4 = K(V_{GS} - V_t)^2. \quad (3.5)$$

Despreciando la corriente por las resistencias de  $1\text{ M}\Omega$ , aplicando la segunda ley de Kirchoff a la misma malla que antes, y usando  $V_{DS} = 2V_{GS}$ , obtenemos

$$10 = (1)I_D + V_{DS} = (1)(4) + 2V_{GS} = 4 + 2V_{GS} ,$$

que da

$$V_{GS} = \frac{10 - 4}{2} = 3 .$$

La corriente por las resistencias de  $1\text{ M}\Omega$  resulta valer, por tanto,  $V_{GS}/(2\text{ M}\Omega) = 3/2.000 = 0,0015\text{ mA}$ , que, efectivamente, es despreciable frente a  $4\text{ mA}$ . Sustituyendo el valor de  $V_{GS}$  en (3.5), obtenemos

$$4 = K(3 - V_t)^2 . \quad (3.6)$$

Los parámetros  $V_t$  y  $K$  del MOSFET pueden ser determinados resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (3.4) y (3.6). Dividiéndolas, obtenemos

$$\frac{6,5}{4} = \left( \frac{3,5 - V_t}{3 - V_t} \right)^2 ,$$

y, considerando que  $V_t < 3$ , pues, con el interruptor en OFF,  $V_{GS} > V_t$  y  $V_{GS} = 3$ , obtenemos

$$\frac{3,5 - V_t}{3 - V_t} = \sqrt{\frac{6,5}{4}} = 1,275 ,$$

$$3,5 - V_t = 3,825 - 1,275V_t ,$$

$$V_t = \frac{3,825 - 3,5}{1,275 - 1} = 1,182\text{ V} .$$

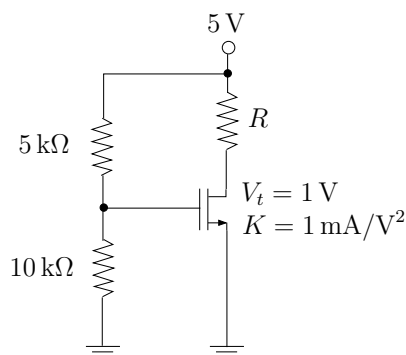
Sustituyendo ese valor en (3.6), obtenemos

$$4 = K(3 - 1,182)^2 = 3,305K$$

y

$$K = \frac{4}{3,305} = 1,21\text{ mA/V}^2 .$$

**Problema 44:** El circuito de la figura se comporta como una fuente de corriente para ciertos valores de  $R$ . ¿Cuáles?



**Solución:** Dado que la corriente por la puerta del transistor es nula, la fuente de tensión de valor

5 V, la resistencia de valor 5 k $\Omega$  y la resistencia de valor 10 k $\Omega$  forman un divisor de tensión, y

$$V_{GS} = \frac{10}{5+10} 5 = 3,333.$$

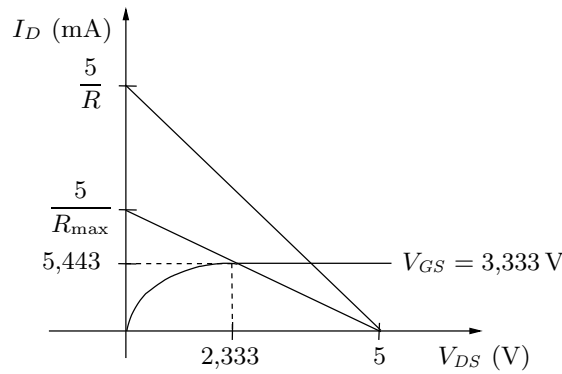
Siendo  $V_{GS} > V_t = 1$ , el transistor trabajará en la zona óhmica o en la zona saturación. El que trabaje en una zona u otra dependerá del valor de  $R$ . Ello se puede ver gráficamente considerando que el punto de trabajo del transistor estará en la intersección de la recta de carga

$$5 = RI_D + V_{DS}$$

con la característica  $I_D = f(V_{DS})$  del transistor para  $V_{GS} = 3,333$  V. Con  $V_{GS} = 3,333$ ,

$$I_{D,sat} = K(V_{GS} - V_t)^2 = (1)(3,333 - 1)^2 = 5,443 \text{ mA}$$

y la transición entre la zona óhmica y la zona saturación se producirá para  $V_{DS} = V_{DS,sat} = V_{GS} - V_t = 3,333 - 1 = 2,333$  V. Así pues, la situación será:



Para  $R \leq R_{\max}$ , el transistor trabajará en la zona saturación,  $I_D$  será independiente de  $R$  y el circuito se comportará como una fuente de corriente.  $R_{\max}$  puede ser determinada imponiendo  $I_D = I_{D,sat}$  y  $V_{DS} = V_{DS,sat}$  en la ecuación de la recta de carga:

$$5 = R_{\max} I_{D,sat} + V_{DS,sat},$$

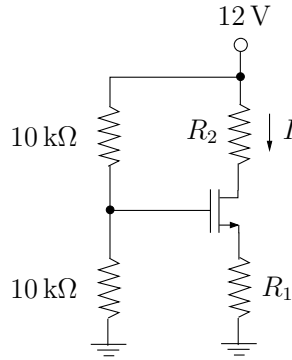
$$5 = 5,443 R_{\max} + 2,333,$$

$$R_{\max} = \frac{5 - 2,333}{5,443} = 0,49 \text{ k}\Omega = 490 \Omega.$$

**Problema 45:** El MOSFET del circuito de la figura tiene una  $V_t = 1$  V y un parámetro  $K$  que puede variar entre 10 y 40 mA/V<sup>2</sup>. Analice el circuito y: 1) determine el valor que ha de tener  $R_1$  para que, suponiendo el MOSFET trabajando en saturación y  $K = 20$  mA/V<sup>2</sup>,  $I = 10$  mA; 2) con la  $R_1$  obtenida en el apartado anterior y suponiendo el MOSFET trabajando en saturación, determine los valores entre los que puede variar  $I$  debido al rango posible de valores para  $K$ ; 3) para el valor de  $R_1$  calculado en el apartado 1), determine el máximo valor que puede tener  $R_2$



para que, para cualquier valor posible para  $K$ , el MOSFET trabaje en saturación.



**Solución:** 1) Con el MOSFET trabajando en saturación,  $I = K(V_{GS} - V_t)^2 = K(V_{GS} - 1)^2$ , y para que con  $K = 20 \text{ mA/V}^2$ ,  $I = 10 \text{ mA}$ ,  $V_{GS}$  deberá ser  $> V_t = 1$  y satisfacer

$$10 = 20(V_{GS} - 1)^2,$$

de donde, usando  $V_{GS} > 1$ ,

$$V_{GS} = 1 + \sqrt{\frac{10}{20}} = 1,707.$$

Siendo nula la corriente por la puerta del transistor, la fuente de tensión de valor 12 V y las dos resistencias de valor 10 kΩ forman un divisor de tensión, y la tensión de puerta,  $V_G$ , vale

$$V_G = \frac{10}{10 + 10} 12 = 6.$$

Para calcular el valor necesario de  $R_1$  conociendo  $V_{GS}$  y  $V_G$ , aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la resistencia inferior de valor 10 kΩ, el MOSFET y la resistencia de valor  $R_1$ , obteniendo

$$V_G = V_{GS} + R_1 I, \quad (3.7)$$

$$6 = 1,707 + 10R_1,$$

$$R_1 = \frac{6 - 1,707}{10} = 0,4293 \text{ k}\Omega = 429,3 \Omega.$$

2) Con el MOSFET trabajando en saturación y en función de  $K$ , la corriente  $I$  vale

$$I = K(V_{GS} - 1)^2.$$

Teniendo en cuenta  $V_{GS} \geq V_t = 1$ , se obtiene

$$V_{GS} = 1 + \sqrt{\frac{I}{K}}.$$

Por otro lado, usando (3.7) con  $V_G = 6$  y  $R_1 = 0,4293$ , se obtiene

$$6 = 1 + \sqrt{\frac{I}{K}} + 0,4293 I. \quad (3.8)$$

Dicha relación pone de manifiesto que  $I$  es una función creciente de  $K$  para  $K > 0$ . Por tanto, al variar  $K$  entre  $10 \text{ mA/V}^2$  y  $40 \text{ mA/V}^2$ , el valor mínimo de  $I$ ,  $I_{\min}$ , se obtiene para  $K = 10 \text{ mA/V}^2$  y el valor máximo,  $I_{\max}$ , para  $K = 40 \text{ mA/V}^2$ . Para determinar  $I_{\min}$  e  $I_{\max}$ , expresemos  $I$  en función de  $K$  usando (3.8). Podemos reescribir (3.8) en forma de ecuación de segundo grado en  $\sqrt{I}$ . Se obtiene

$$0,4293I + \frac{1}{\sqrt{K}}\sqrt{I} - 5 = 0.$$

Las soluciones de dicha ecuación de segundo grado son

$$\sqrt{I} = \frac{-1/\sqrt{K} \pm \sqrt{1/K + 8,586}}{0,8586}.$$

De ellas, la única que da  $\sqrt{I} > 0$  es la correspondiente al signo  $+$ . Tenemos, por tanto,

$$\sqrt{I} = \frac{\sqrt{1/K + 8,586} - 1/\sqrt{K}}{0,8586}$$

e

$$I = \frac{\left(\sqrt{1/K + 8,586} - 1/\sqrt{K}\right)^2}{0,7372},$$

que da

$$I_{\min} = \frac{\left(\sqrt{1/10 + 8,586} - 1/\sqrt{10}\right)^2}{0,7372} = 9,368 \text{ mA}$$

e

$$I_{\max} = \frac{\left(\sqrt{1/40 + 8,586} - 1/\sqrt{40}\right)^2}{0,7372} = 10,43 \text{ mA}.$$

3) Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $12 \text{ V}$ , las resistencias de valores  $R_1$  y  $R_2$  y el MOSFET, obtenemos

$$12 = R_2I + V_{DS} + R_1I,$$

y, usando  $R_1 = 0,4293$ ,

$$12 = V_{DS} + 0,4293I + R_2I,$$

$$V_{DS} = 12 - 0,4293I - R_2I.$$

Por otro lado, de (3.7) con  $V_G = 6$  y  $R_1 = 0,4293$ ,

$$V_{GS} = V_G - R_1I = 6 - 0,4293I.$$

Imponiendo, entonces,  $V_{DS} \geq V_{GS} - V_t = V_{GS} - 1$ , se obtiene

$$12 - 0,4293I - R_2I \geq 5 - 0,4293I,$$

$$R_2I \leq 7,$$

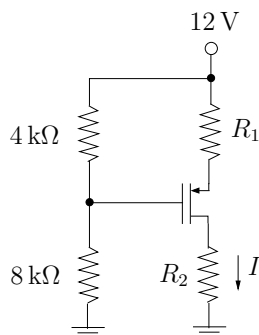
$$R_2 \leq \frac{7}{I}.$$

La condición más estricta se obtiene para el valor máximo de  $I$  y, por tanto,  $R_2$  deberá verificar

$$R_2 \leq \frac{7}{10,43} = 0,6711 \text{ k}\Omega = 671,1 \Omega.$$

Así pues, el valor máximo que deberá tener  $R_2$  para que, con el valor de  $R_1$  obtenido en el apartado 1) y para cualquier valor posible de  $K$ , el MOSFET trabaje en saturación es  $671,1 \Omega$ .

**Problema 46:** El MOSFET del circuito de la figura tiene una  $V_t = -1 \text{ V}$  y un parámetro  $K$  que puede variar entre  $5$  y  $20 \text{ mA/V}^2$ . Analice el circuito y: 1) determine el valor que ha de tener  $R_1$  para que, suponiendo el MOSFET trabajando en saturación y  $K = 10 \text{ mA/V}^2$ ,  $I = 10 \text{ mA}$ ; 2) con la  $R_1$  obtenida en el apartado anterior y suponiendo el MOSFET trabajando en saturación, determine los valores entre los que puede variar  $I$  debido al rango posible de valores para  $K$ ; 3) para el valor de  $R_1$  calculado en el apartado 1), determine el máximo valor que puede tener  $R_2$  para que, para cualquier valor posible para  $K$ , el MOSFET trabaje en saturación.



**Solución:** 1) Con el MOSFET trabajando en saturación,  $I = K(V_{GS} - V_t)^2 = K(V_{GS} + 1)^2$ , y para que con  $K = 10 \text{ mA/V}^2$ ,  $I = 10 \text{ mA}$ ,  $V_{GS}$  deberá ser  $< V_t = -1$  y satisfacer

$$10 = 10(V_{GS} + 1)^2,$$

de donde, usando  $V_{GS} < -1$ ,

$$V_{GS} = -1 - \sqrt{\frac{10}{10}} = -2.$$

Siendo nula la corriente por la puerta del transistor, la fuente de tensión de valor  $12 \text{ V}$ , la resistencia de valor  $4 \text{ k}\Omega$  y la resistencia de valor  $8 \text{ k}\Omega$  forman un divisor de tensión, y la tensión de puerta vale

$$V_G = \frac{8}{4+8} 12 = 8,$$

que implica que la resistencia de valor  $4 \text{ k}\Omega$  verá una tensión de valor  $4 \text{ V}$ . Para calcular el valor necesario de  $R_1$  conociendo  $V_{GS}$  y la tensión que ve la resistencia de valor  $4 \text{ k}\Omega$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la resistencia de valor  $4 \text{ k}\Omega$ , el MOSFET y la resistencia de valor  $R_1$ , obteniendo

$$4 = R_1 I - V_{GS}, \quad (3.9)$$

$$4 = 10R_1 + 2,$$

$$R_1 = \frac{4-2}{10} = 0,2 \text{ k}\Omega = 200 \Omega.$$

2) Con el MOSFET trabajando en saturación y en función de  $K$ , la corriente  $I$  vale

$$I = K(V_{GS} + 1)^2.$$

Teniendo en cuenta  $V_{GS} \leq V_t = -1$ , se obtiene

$$V_{GS} = -1 - \sqrt{\frac{I}{K}}.$$

Por otro lado, usando (3.9) con  $R_1 = 0,2$ , se obtiene

$$4 = 0,2I + 1 + \sqrt{\frac{I}{K}},$$

$$3 = 0,2I + \sqrt{\frac{I}{K}}. \quad (3.10)$$

Dicha relación pone de manifiesto que  $I$  es una función creciente de  $K$  para  $K > 0$ . Por tanto, al variar  $K$  entre  $5 \text{ mA/V}^2$  y  $20 \text{ mA/V}^2$ , el valor mínimo de  $I$ ,  $I_{\min}$ , se obtiene para  $K = 5 \text{ mA/V}^2$  y el valor máximo,  $I_{\max}$ , para  $K = 20 \text{ mA/V}^2$ . Para determinar  $I_{\min}$  e  $I_{\max}$ , expresemos  $I$  en función de  $K$  usando (3.10). Podemos reescribir (3.10) en forma de ecuación de segundo grado en  $\sqrt{I}$ . Se obtiene

$$0,2I + \frac{1}{\sqrt{K}}\sqrt{I} - 3 = 0.$$

La soluciones de dicha ecuación de segundo grado son

$$\sqrt{I} = \frac{-1/\sqrt{K} \pm \sqrt{1/K + 2,4}}{0,4}.$$

De ellas, la única que da  $\sqrt{I} > 0$  es la correspondiente al signo  $+$ . Tenemos, por tanto,

$$\sqrt{I} = \frac{\sqrt{1/K + 2,4} - 1/\sqrt{K}}{0,4}$$

e

$$I = \frac{\left(\sqrt{1/K + 2,4} - 1/\sqrt{K}\right)^2}{0,16},$$

que da

$$I_{\min} = \frac{\left(\sqrt{1/5 + 2,4} - 1/\sqrt{5}\right)^2}{0,16} = 8,486 \text{ mA}$$

e

$$I_{\max} = \frac{\left(\sqrt{1/20 + 2,4} - 1/\sqrt{20}\right)^2}{0,16} = 11,25 \text{ mA}.$$

3) Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 12 V, las resistencias de valores  $R_1$  y  $R_2$  y el MOSFET, obtenemos

$$12 = R_1 I - V_{DS} + R_2 I ,$$

y, usando  $R_1 = 0,2$ ,

$$12 = -V_{DS} + 0,2I + R_2 I ,$$

$$V_{DS} = -12 + 0,2I + R_2 I .$$

Por otro lado, de (3.9) con  $R_1 = 0,2$ ,

$$V_{GS} = -4 + 0,2I .$$

Imponiendo, entonces,  $V_{DS} \leq V_{GS} - V_t = V_{GS} + 1$ , se obtiene

$$-12 + 0,2I + R_2 I \leq -3 + 0,2I ,$$

$$R_2 I \leq 9 ,$$

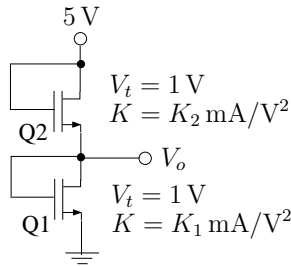
$$R_2 \leq \frac{9}{I} .$$

La condición más estricta se obtiene para el valor máximo de  $I$  y, por tanto,  $R_2$  deberá verificar

$$R_2 \leq \frac{9}{11,25} = 0,8 \text{ k}\Omega = 800 \Omega .$$

Así pues, el valor máximo que deberá tener  $R_2$  para que, con el valor de  $R_1$  calculado en el apartado 1) y para cualquier valor posible de  $K$ , el MOSFET trabaje en saturación es  $796 \Omega$ .

**Problema 47:** Analice el circuito de la figura y determine el valor de la tensión  $V_o$  en función de  $K_1/K_2$ . ¿Entre qué valores puede variar  $V_o$ ?



**Solución:** Denotemos con los subíndices 1 y 2 las tensiones y corrientes de, respectivamente, Q1 y Q2. Dado que  $V_{DS1} = V_{GS1} > V_{GS1} - V_{t1} = V_{GS1} - 1$  y  $V_{DS2} = V_{GS2} > V_{GS2} - V_{t2} = V_{GS2} - 1$ , supuesto  $V_{GS1} > V_{t1} = 1$  y  $V_{GS2} > V_{t2} = 1$ , los dos transistores trabajarán en la zona saturación. Supongámoslo. Tenemos

$$I_{D1} = K_1(V_{GS1} - 1)^2 ,$$

$$I_{D2} = K_2(V_{GS2} - 1)^2 .$$

Por otro lado, por inspección  $I_{D1} = I_{D2}$ , obteniéndose, usando  $V_{GS1} > 1$  y  $V_{GS2} > 1$ ,

$$\begin{aligned}
 K_1(V_{GS1} - 1)^2 &= K_2(V_{GS2} - 1)^2, \\
 \left(\frac{V_{GS2} - 1}{V_{GS1} - 1}\right)^2 &= \frac{K_1}{K_2}, \\
 \frac{V_{GS2} - 1}{V_{GS1} - 1} &= \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}, \\
 V_{GS2} - 1 &= \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}(V_{GS1} - 1), \\
 V_{GS2} &= 1 + \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}(V_{GS1} - 1). \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Utilizando (3.11) en  $V_{GS1} + V_{GS2} = 5$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 V_{GS1} + 1 + \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}(V_{GS1} - 1) &= 5, \\
 \left(1 + \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\right)V_{GS1} &= 4 + \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}, \\
 V_{GS1} &= \frac{4 + \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}}{1 + \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}}.
 \end{aligned}$$

Obviamente,  $V_{GS1} > 1$ , y utilizando (3.11),  $V_{GS2} > 1$ . Así pues, los dos transistores trabajan en la zona saturación y el análisis realizado es correcto. Dado que  $V_o = V_{GS1}$ , obtenemos

$$V_o = \frac{4 + \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}}{1 + \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}}.$$

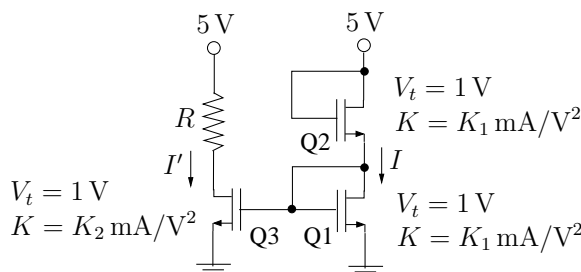
Tanto  $K_1/K_2$  como  $\sqrt{K_1/K_2}$  toman valores en el intervalo  $(0, \infty)$ . Por otro lado, la función  $f(x) = (4 + x)/(1 + x)$  es decreciente con  $x$  en  $(0, \infty)$ , como puede ser comprobado fácilmente calculando  $df/dx$ ,

$$\frac{df}{dx} = \frac{1 + x - (4 + x)}{(1 + x)^2} = -\frac{3}{(1 + x)^2} < 0.$$

Así pues,  $V_o$  puede tomar valores en el intervalo  $(V_{o,\min}, V_{o,\max})$  con

$$\begin{aligned}
 V_{o,\min} &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + x}{1 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4/x + 1}{1/x + 1} = 1, \\
 V_{o,\max} &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 4.
 \end{aligned}$$

**Problema 48:** Analice el circuito de la figura y determine: 1) el valor de la tensión  $V_{GS}$  de Q1 y valor de la corriente  $I$ , 2) el intervalo de valores de  $R$  para los cuales Q3 trabaja en la zona saturación y valor de la corriente  $I'$  en ese caso. El circuito de la figura se denomina espejo de corriente. ¿Por qué?



**Solución:** Denotaremos usando los subíndices 1, 2 y 3 los valores de las tensiones, corrientes y parámetros  $V_t$  de, respectivamente, Q1, Q2 y Q3.

1) Por inspección,  $V_{DS1} = V_{GS1}$  y  $V_{DS2} = V_{GS2}$ . Supongamos que tanto Q1 como Q2 trabajan en la zona saturación. Las condiciones a verificar son  $V_{GS1} \geq V_{t1} = 1$ ,  $V_{GS2} \geq V_{t2} = 1$ ,  $V_{DS1} \geq V_{GS1} - V_{t1} = V_{GS1} - 1$  y  $V_{DS2} \geq V_{GS2} - V_{t2} = V_{GS2} - 1$ . Las dos últimas quedan aseguradas por  $V_{DS1} = V_{GS1}$  y  $V_{DS2} = V_{GS2}$ . Así pues, las únicas condiciones a verificar son  $V_{GS1} \geq 1$  y  $V_{GS2} \geq 1$ . Con Q1 y Q2 en saturación, tenemos

$$I_{D1} = K_1(V_{GS1} - 1)^2,$$

$$I_{D2} = K_1(V_{GS2} - 1)^2.$$

Entonces,  $V_{GS1} = V_{GS2}$  es consistente con  $I_{D1} = I_{D2} = I$ . Por otro lado,  $V_{GS1} + V_{GS2} = 5$ . Así pues,  $V_{GS1} = V_{GS2} = 2,5$ , que es  $\geq 1$ . Las zonas de trabajo supuestas para Q1 y Q2 son, por tanto, correctas,  $V_{GS1} = 2,5$  V e

$$I = I_{D1} = K_1(2,5 - 1)^2 = 2,25K_1 \text{ mA}.$$

2) Por inspección, obtenemos  $V_{GS3} = V_{GS1} = 2,5 \geq V_{t3} = 1$ . Para que Q3 trabaje en la zona saturación, se deberá cumplir  $V_{DS3} \geq V_{GS3} - V_{t3} = 2,5 - 1 = 1,5$ . En esa zona, la corriente  $I'$  valdrá

$$I' = I_{D3} = K_2(V_{GS3} - 1)^2 = K_2(2,5 - 1)^2 = 2,25K_2 \text{ mA}.$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $R$  y Q3, obtenemos

$$5 = RI' + V_{DS3},$$

$$V_{DS3} = 5 - RI' = 5 - 2,25K_2R,$$

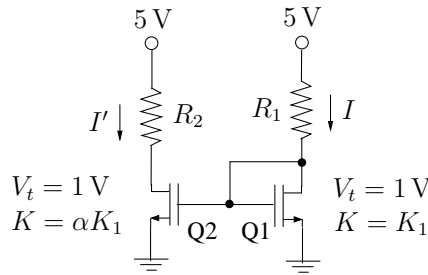
e, imponiendo  $V_{DS3} \geq 1,5$ , obtenemos

$$5 - 2,25K_2R \geq 1,5,$$

$$R \leq \frac{5 - 1,5}{2,25K_2} = \frac{1,556}{K_2} \text{ k}\Omega.$$

El circuito se denomina espejo de corriente porque, cuando Q3 trabaja en la zona saturación,  $I'/I = K_2/K_1$  y la corriente  $I'$  es una réplica de la corriente  $I$  independiente del valor de  $R$  con un factor de escalado  $K_2/K_1$ . Dicho factor de escalado puede ser ajustado escogiendo valores apropiados para  $K_1$  y  $K_2$ .

**Problema 49:** El parámetro  $K$  del MOSFET Q1 del espejo de corriente de la figura,  $K_1$ , puede variar entre  $5 \text{ mA/V}^2$  y  $20 \text{ mA/V}^2$ . Analice el circuito y: 1) determine el valor que ha de tener  $R_1$  para que, con  $K_1 = 10 \text{ mA/V}^2$ ,  $I = 1 \text{ mA}$ ; 2) para el valor de  $R_1$  calculado en el apartado anterior y suponiendo Q2 en saturación, determine los valores entre los que puede variar  $I'$  debido al rango de valores posibles para  $K_1$ ; 3) para el valor de  $R_1$  calculado en el apartado 1) y  $\alpha = 20$ , determine el máximo valor que puede tener  $R_2$  para que Q2 trabaje en saturación para todo valor posible de  $K_1$ .



**Solución:** Denotaremos con los subíndices 1 y 2 las tensiones, corrientes y parámetros  $V_t$  de, respectivamente, Q1 y Q2.

1) Por inspección,  $V_{DS1} = V_{GS1}$  y  $V_{DS1} > V_{GS1} - V_{t1} = V_{GS1} - 1$ . Ello implica que Q1 estará en saturación con  $V_{GS1} > V_{t1} = 1$ , pues  $V_{GS1} \leq V_{t1}$  conduce a  $I = 0$ . La corriente  $I$  valdrá, por tanto,

$$I = K_1(V_{GS1} - V_{t1})^2 = 10(V_{GS1} - 1)^2,$$

e, imponiendo  $I = 1$ , obtenemos, usando  $V_{GS1} > 1$ ,

$$1 = 10(V_{GS1} - 1)^2,$$

$$V_{GS1} = 1 + \sqrt{\frac{1}{10}} = 1,316.$$

Para calcular el valor necesario de  $R_1$  conociendo  $V_{GS1}$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $R_1$  y Q1, obteniendo

$$5 = R_1 I + V_{GS1}, \quad (3.12)$$

$$5 = R_1 + 1,316,$$

$$R_1 = 5 - 1,316 = 3,684 \text{ k}\Omega.$$

2) Determinemos, primero, el rango de valores posibles para  $I$ . El razonamiento del apartado anterior que ha conducido a que Q1 trabaje en saturación y a que  $V_{GS1} > 1$  es independiente del valor de  $R_1$ , siempre y cuando  $I \neq 0$ . Pero  $I = 0$  sólo es posible con Q1 en corte y, con



$I = 0$ , tenemos  $V_{GS1} = 5 > V_{t1} = 1$ , una contradicción. Por tanto, Q1 trabaja en saturación con  $V_{GS1} > 1$  para todo valor posible de  $K_1$  e

$$I = K_1(V_{GS1} - V_{t1})^2 = K_1(V_{GS1} - 1)^2, \quad (3.13)$$

que es  $> 0$ , y, teniendo en cuenta  $V_{GS1} > 1$ ,

$$V_{GS1} = 1 + \sqrt{\frac{I}{K_1}},$$

que, combinada con (3.12) da

$$5 = R_1 I + 1 + \sqrt{\frac{I}{K_1}},$$

y, con  $R_1 = 3,684$ ,

$$4 = \sqrt{\frac{I}{K_1}} + 3,684 I. \quad (3.14)$$

Dicha relación pone de manifiesto que  $I$  es una función creciente de  $K_1$  para  $K_1 > 0$ . Por tanto, al variar  $K_1$  entre  $5 \text{ mA/V}^2$  y  $20 \text{ mA/V}^2$ ,  $I$  varía entre un valor mínimo,  $I_{\min}$ , correspondiente a  $K_1 = 5 \text{ mA/V}^2$ , y un valor máximo,  $I_{\max}$ , correspondiente a  $K_1 = 20 \text{ mA/V}^2$ . Para determinar  $I_{\min}$  e  $I_{\max}$ , expresemos  $I$  en función de  $K_1$  usando (3.14). Podemos reescribir (3.14) en forma de ecuación de segundo grado en  $\sqrt{I}$ . Se obtiene

$$3,684 I + \frac{1}{\sqrt{K_1}} \sqrt{I} - 4 = 0.$$

Las soluciones de dicha ecuación de segundo grado son

$$\sqrt{I} = \frac{-1/\sqrt{K_1} \pm \sqrt{1/K_1 + 58,94}}{7,368}.$$

De ellas, la única que da  $\sqrt{I} > 0$  es la correspondiente al signo  $+$ . Tenemos, por tanto,

$$\sqrt{I} = \frac{\sqrt{1/K_1 + 58,94} - 1/\sqrt{K_1}}{7,368},$$

e

$$I = \frac{\left(\sqrt{1/K_1 + 58,94} - 1/\sqrt{K_1}\right)^2}{54,29},$$

que da

$$I_{\min} = \frac{\left(\sqrt{1/5 + 58,94} - 1/\sqrt{5}\right)^2}{54,29} = 0,9663 \text{ mA}$$

e

$$I_{\max} = \frac{\left(\sqrt{1/20 + 58,94} - 1/\sqrt{20}\right)^2}{54,29} = 1,024 \text{ mA}.$$

Por otro lado, con Q2 en saturación y siendo  $V_{GS2} = V_{GS1}$ ,

$$I' = K_2(V_{GS2} - V_{t2})^2 = \alpha K_1(V_{GS1} - 1)^2,$$

que, combinada con (3.13), da

$$I' = \alpha I.$$

Por tanto,  $I'$  variará entre un valor mínimo

$$I'_{\min} = 0,9663\alpha \text{ mA}$$

y un valor máximo

$$I'_{\max} = 1,024\alpha \text{ mA}.$$

3) Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $R_2$  y Q2, obtenemos, usando  $I' = \alpha I$ ,

$$5 = R_2 I' + V_{DS2} = \alpha R_2 I + V_{DS2},$$

$$V_{DS2} = 5 - \alpha R_2 I.$$

Usando  $V_{GS2} = V_{GS1}$ , de (3.12), con  $R_1 = 3,684$ , obtenemos

$$V_{GS2} = V_{GS1} = 5 - 3,684 I,$$

e, imponiendo  $V_{DS2} \geq V_{GS2} - V_{t2} = V_{GS2} - 1$ ,

$$5 - \alpha R_2 I \geq 4 - 3,684 I,$$

$$\alpha R_2 I \leq 1 + 3,684 I,$$

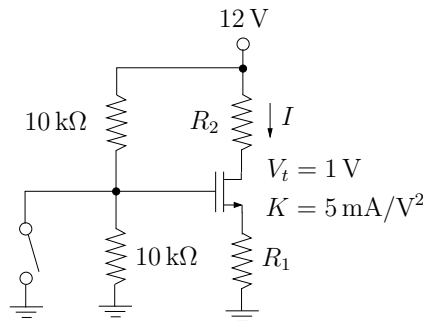
$$R_2 \leq \frac{1 + 3,684 I}{\alpha I} = \frac{1 + 3,684 I}{20 I} = \frac{1}{20 I} + 0,1842.$$

La condición más estricta se obtiene para  $I = I_{\max}$  y es

$$R_2 \leq \frac{1}{(20)(1,024)} + 0,1842 = 0,233 \text{ k}\Omega = 233 \Omega.$$

Por tanto, para que con el valor de  $R_1$  calculado en el apartado 1) y con  $\alpha = 20$ , Q2 trabaje en saturación para cualquier valor posible de  $K_1$ ,  $R_2$  no deberá superar  $233 \Omega$ .

**Problema 50:** Analice el circuito de la figura y: 1) determine el valor de la corriente  $I$  cuando el interruptor está en ON; 2) determine el valor que ha de tener  $R_1$  para que, cuando el interruptor está en OFF y suponiendo que el MOSFET trabaja en saturación,  $I = 10 \text{ mA}$ ; 3) para el valor de  $R_1$  calculado en el apartado anterior y con el interruptor en OFF, determine el máximo valor que puede tener  $R_2$  de modo que el MOSFET trabaje en saturación.



**Solución:** 1) Con el interruptor en ON, la tensión de puerta del MOSFET,  $V_G$ , vale 0. Vamos a ver que ello implica que el MOSFET estará en corte. Se ha de verificar  $V_{GS} \leq V_t = 1$  y

$V_{DS} \geq 0$ . Con el MOSFET en corte,  $I = 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por el interruptor, el MOSFET y la resistencia de valor  $R_1$  se obtiene

$$0 = V_{GS} + R_1 I = V_{GS} ,$$

y  $V_{GS} = 0 \leq 1$ . Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 12 V, la resistencia de valor  $R_2$ , el MOSFET y la resistencia de valor  $R_1$ , se obtiene

$$12 = R_2 I + V_{DS} + R_1 I = V_{DS} ,$$

y  $V_{DS} = 12 \geq 0$ . Así pues, con el interruptor en ON, el MOSFET está en corte e  $I = 0$ .

2) Con el interruptor en OFF, teniendo en cuenta que la corriente por el interruptor es nula y que la corriente por la puerta del MOSFET es también nula, resulta que la fuente de tensión de valor 12 V y las resistencias de valor 10 k $\Omega$  forman un divisor de tensión, y la tensión de puerta del MOSFET,  $V_G$ , valdrá

$$V_G = \frac{10}{10 + 10} 12 = 6 .$$

Con el MOSFET en saturación, la corriente  $I$  vale

$$I = K(V_{GS} - V_t)^2 = K(V_{GS} - 1)^2 .$$

Para que  $I = 10$  mA,  $V_{GS}$  deberá verificar

$$10 = 5(V_{GS} - 1)^2 ,$$

que, teniendo en cuenta que  $V_{GS}$  deberá ser  $> 1$ , pues el MOSFET está en saturación e  $I > 0$ , conduce a

$$V_{GS} = 1 + \sqrt{\frac{10}{5}} = 2,414 .$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la resistencia inferior de valor 10 k $\Omega$ , el MOSFET y la resistencia de valor  $R_1$ , obtenemos

$$V_G = V_{GS} + R_1 I ,$$

y, usando  $V_G = 6$ ,  $V_{GS} = 2,414$  e  $I = 10$ ,  $R_1$  deberá verificar

$$6 = 2,414 + 10R_1 ,$$

de donde  $R_1$  deberá valer

$$R_1 = \frac{6 - 2,414}{10} = 0,3586 \text{ k}\Omega = 358,6 \Omega .$$

3) Bastará calcular, para  $R_1 = 358,6 \Omega$ ,  $V_{DS}$  en función de  $R_2$  e imponer  $V_{DS} \geq V_{GS} - V_t = V_{GS} - 1$ . Podemos usar  $V_{GS} = 2,414$  e  $I = 10$ . Para calcular  $V_{DS}$  en función de  $R_2$  aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 12 V, la resistencia de valor  $R_2$ , el MOSFET y la resistencia de valor  $R_1$ , obteniendo

$$12 = R_2 I + V_{DS} + R_1 I .$$

Usando  $I = 10$  y  $R_1 = 358,6 \Omega$ , obtenemos

$$12 = 10R_2 + V_{DS} + (0,3586)(10) ,$$

$$V_{DS} = 8,414 - 10R_2 .$$

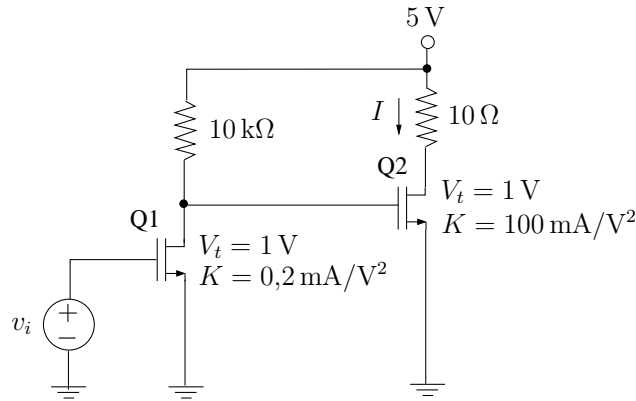
Finalmente, imponiendo  $V_{DS} \geq V_{GS} - 1 = 2,414 - 1 = 1,414$ , obtenemos

$$8,414 - 10R_2 \geq 1,414 ,$$

$$R_2 \leq \frac{8,414 - 1,414}{10} = 0,7 \text{ k}\Omega = 700 \Omega .$$

Así pues, para que con el valor de  $R_1$  calculado en el apartado anterior y con el interruptor en OFF, el MOSFET trabaje en saturación, el valor de  $R_2$  no deberá superar  $700 \Omega$ .

**Problema 51:** Analice el circuito de la figura y determine el valor de la corriente  $I$  para  $v_i = 0$  y para  $v_i = 5 \text{ V}$ .



**Solución:** Denotaremos con los subíndices 1 y 2 las tensiones, corrientes y parámetros  $V_t$  y  $K$  de, respectivamente, Q1 y Q2.

Para  $v_i = 0$ ,  $V_{GS1} = 0 < V_{t1} = 1$  y Q1 está en corte. Sólo hay que verificar  $V_{DS1} \geq 0$ . Pero, teniendo en cuenta que la corriente por la puerta de Q2 es nula,  $V_{DS1} = 5 - 10I_{D1} = 5 \geq 0$ . Dado que  $V_{GS2} = V_{DS1} = 5 > 1$ , Q2 no estará en corte. Supongamos que trabaja en la zona óhmica. Se ha de verificar  $V_{DS2} \geq 0$  y  $V_{DS2} \leq V_{GS2} - V_{t2} = 5 - 1 = 4$ . Tenemos

$$\begin{aligned} I_{D2} &= K_2[2(V_{GS2} - V_{t2})V_{DS2} - V_{DS2}^2] = 100[(2)(5 - 1)V_{DS2} - V_{DS2}^2] \\ &= 800V_{DS2} - 100V_{DS2}^2 . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por otro lado, aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $5 \text{ V}$ , la resistencia de valor  $10 \Omega$  y Q2, obtenemos

$$5 = 0,01I_{D2} + V_{DS2} . \quad (3.16)$$

Combinando (3.15) y (3.16) obtenemos la ecuación de segundo grado en  $V_{DS2}$

$$5 = 8V_{DS2} - V_{DS2}^2 + V_{DS2} ,$$

$$V_{DS2}^2 - 9V_{DS2} + 5 = 0,$$

cuyas soluciones son  $V_{DS2} = 8,405$  y  $V_{DS2} = 0,5949$ . La solución  $V_{DS2} = 0,5949$  verifica  $V_{DS2} \geq 0$  y  $V_{DS2} \leq 4$ . Así pues, el transistor Q2 trabaja en la zona óhmica y  $V_{DS2} = 0,5949$ . Usando (3.15) obtenemos

$$I = I_{D2} = (800)(0,5949) - (100)(0,5949)^2 = 440,5 \text{ mA}.$$

Para  $v_i = 5 \text{ V}$ ,  $V_{GS1} = 5 > V_{t1} = 1$  y Q1 no estará en corte. Supongamos que trabaja en la zona óhmica. Se ha de verificar  $V_{DS1} \geq 0$  y  $V_{DS1} \leq V_{GS1} - V_{t1} = 5 - 1 = 4$ . Tenemos

$$\begin{aligned} I_{D1} &= K_1[2(V_{GS1} - V_{t1})V_{DS1} - V_{DS1}^2] = 0,2[(2)(5 - 1)V_{DS1} - V_{DS1}^2] \\ &= 1,6V_{DS1} - 0,2V_{DS1}^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por otro lado, aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor 10 k $\Omega$  y Q1, teniendo en cuenta que la corriente por la puerta de Q2 es nula, obtenemos

$$5 = 10I_{D1} + V_{DS1}. \quad (3.18)$$

Combinando (3.17) y (3.18) obtenemos la ecuación de segundo grado en  $V_{DS1}$

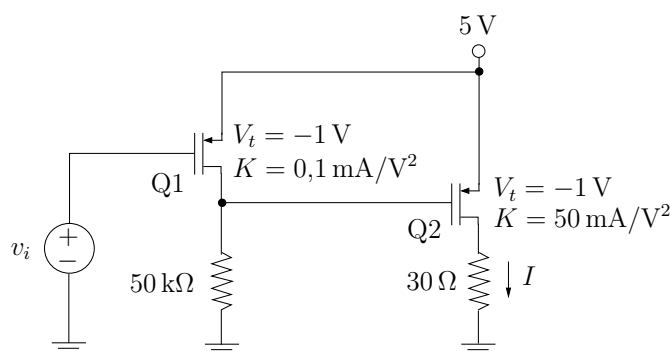
$$5 = 16V_{DS1} - 2V_{DS1}^2 + V_{DS1},$$

$$2V_{DS1}^2 - 17V_{DS1} + 5 = 0,$$

$$V_{DS1}^2 - 8,5V_{DS1} + 2,5 = 0,$$

cuyas soluciones son  $V_{DS1} = 8,195$  y  $V_{DS1} = 0,3051$ . La solución  $V_{DS1} = 0,3051$  verifica  $V_{DS1} \geq 0$  y  $V_{DS1} \leq 4$ . Así pues, el transistor Q1 trabaja en la zona óhmica y  $V_{DS1} = 0,3051 \text{ V}$ . Dado que  $V_{GS2} = V_{DS1} = 0,3051 < V_{t1} = 1$ , el transistor Q2 trabajará en la zona corte. Sólo hay que verificar  $V_{DS2} \geq 0$ . Pero, con Q2 en corte,  $I = 0$  y  $V_{DS2} = 5 - 0,01I = 5 \geq 0$ . La corriente  $I$  valdrá, por tanto,  $I = 0$ .

**Problema 52:** Analice el circuito de la figura y determine el valor de la corriente  $I$  para  $v_i = 0$  y para  $v_i = 5 \text{ V}$ .



**Solución:** Denotaremos con los subíndices 1 y 2 las tensiones, corrientes y parámetros  $V_t$  y  $K$  de, respectivamente, Q1 y Q2.

Para  $v_i = 0$ ,  $V_{GS1} = -5 < V_{t1} = -1$  y Q1 no estará en corte. Supongamos que está en la zona óhmica. Se ha de verificar  $V_{DS1} \leq 0$  y  $V_{DS1} \geq V_{GS1} - V_{t1} = -5 + 1 = -4$ . Con Q1 en la zona óhmica,

$$\begin{aligned} I_{D1} &= K_1[2(V_{GS1} - V_{t1})V_{DS1} - V_{DS1}^2] = 0,1[(2)(-5 + 1)V_{DS1} - V_{DS1}^2] \\ &= -0,8V_{DS1} - 0,1V_{DS1}^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por otro lado, aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, Q1 y la resistencia de valor 50 k $\Omega$ , teniendo en cuenta que la corriente por la puerta de Q2 es nula, obtenemos

$$5 = -V_{DS1} + 50I_{D1},$$

que, combinada con (3.19), conduce a la ecuación de segundo grado en  $V_{DS1}$

$$5 = -V_{DS1} - 40V_{DS1} - 5V_{DS1}^2,$$

$$5V_{DS1}^2 + 41V_{DS1} + 5 = 0,$$

cuyas soluciones son  $V_{DS1} = -0,1238$  y  $V_{DS1} = -8,076$ . La solución  $V_{DS1} = -0,1238$  verifica  $V_{DS1} \leq 0$  y  $V_{DS1} \geq -4$ . Así pues, con  $v_i = 0$ , Q1 está en la zona óhmica y  $V_{DS1} = -0,1238$ . Por inspección,  $V_{GS2} = V_{DS1}$  y  $V_{GS2} = -0,1238 > V_{t2} = -1$ , implicando que Q2 estará en corte, debiéndose únicamente verificar  $V_{DS2} \leq 0$ . Con Q2 en corte,  $I = 0$  y, aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, Q2 y la resistencia de valor 30  $\Omega$ , obtenemos

$$5 = -V_{DS2} + 0,03I = -V_{DS2},$$

$$V_{DS2} = -5,$$

que es  $\leq 0$ . Así pues, con  $v_i = 0$ , Q2 está en corte e  $I = 0$ .

Para  $v_i = 5$ ,  $V_{GS1} = 0 > V_{t1} = -1$ , implicando que Q1 estará en corte, debiéndose únicamente verificar  $V_{DS1} \leq 0$ . Con Q1 en corte,  $I_{D1} = 0$  y, aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, Q1 y la resistencia de valor 50 k $\Omega$ , teniendo en cuenta que la corriente por la puerta de Q2 es nula, obtenemos

$$5 = -V_{DS1} + 50I_{D1} = -V_{DS1},$$

$$V_{DS1} = -5,$$

que es  $\leq 0$ . Así pues, para  $v_i = 5$ , Q1 está en corte y  $V_{DS1} = -5$ . Por inspección,  $V_{GS2} = V_{DS1} = -5$  y  $V_{GS2} < V_{t2} = -1$ , implicando que Q2 no estará en corte. Supongamos que está en la zona óhmica. Se ha de verificar  $V_{DS2} \leq 0$  y  $V_{DS2} \geq V_{GS2} - V_{t2} = -5 + 1 = -4$ . Con Q2 en óhmica, la corriente  $I$  vale

$$\begin{aligned} I &= K_2[2(V_{GS2} - V_{t2})V_{DS2} - V_{DS2}^2] = 50[(2)(-5 + 1)V_{DS2} - V_{DS2}^2] \\ &= -400V_{DS2} - 50V_{DS2}^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por otro lado, aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, Q2 y la resistencia de valor 30  $\Omega$ , obtenemos

$$5 = -V_{DS2} + 0,03I,$$

que, combinada con (3.20), conduce a la ecuación de segundo grado en  $V_{DS2}$

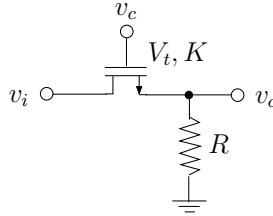
$$5 = -V_{DS2} - 12V_{DS2} - 1,5V_{DS2}^2,$$

$$1,5V_{DS2}^2 + 13V_{DS2} + 5 = 0,$$

cuyas soluciones con  $V_{DS2} = -0,4034$  y  $V_{DS2} = -8,263$ . La solución  $V_{DS2} = -0,4034$  verifica  $V_{DS2} \leq 0$  y  $V_{DS2} \geq -4$ . Así pues, para  $v_i = 5$ , Q2 está en la zona óhmica y  $V_{DS2} = -0,4034$ . La corriente  $I$  puede ser calculada utilizando (3.20):

$$I = -(400)(-0,4034) - (50)(-0,4034)^2 = 153,2 \text{ mA}.$$

**Problema 53:** Con  $V_t = 1 \text{ V}$ ,  $K = 1 \text{ mA/V}^2$  y  $R = 10 \text{ k}\Omega$ , determine la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ ,  $0 \leq v_i \leq 5 \text{ V}$  del circuito de la figura para: 1)  $v_c = 0$ , 2)  $v_c = 5 \text{ V}$ . Suponga, a continuación,  $V_t < 5 \text{ V}$  y, para  $v_c = 5 \text{ V}$ , 3) obtenga  $v_o = F(v_i)$ ,  $0 \leq v_i \leq 5 \text{ V}$  en función de  $K$ ,  $V_t$  y  $R$ , 4) demuestre que  $dv_o/dR$  es  $> 0$  para todo  $v_i$ ,  $0 < v_i \leq 5 \text{ V}$ , 5) obtenga  $v_o = F(v_i)$ ,  $0 \leq v_i \leq 5 \text{ V}$  para  $R \rightarrow \infty$ .



**Solución:** 1) Para  $v_c = 0$ , el transistor trabaja en la zona corte,  $I_D = 0$  y  $v_o = 10I_D = 0$ . Comprobémoslo. Las condiciones a verificar son  $V_{GS} \leq 1$  y  $V_{DS} \geq 0$ . Tenemos  $V_{GS} = v_c - v_o = 0$ , que es  $\leq 1$ . Tenemos  $V_{DS} = v_i - v_o = v_i$ , que, para  $0 \leq v_i \leq 5$ , es  $\geq 0$ .

2) Con  $v_c = 5 \text{ V}$ , el transistor no puede trabajar en la zona corte, pues en ese caso  $V_{GS} = v_c - v_o = v_c - RI_D = 5 - 0 = 5$ , que es  $> 1$ , una contradicción. Supongamos que el transistor trabaja en la zona óhmica. Las condiciones a verificar son  $V_{GS} \geq 1$  y  $0 \leq V_{DS} \leq V_{GS} - V_t = V_{GS} - 1$ . La condición  $V_{DS} \geq 0$  es fácil de verificar. En la zona óhmica, el transistor es equivalente a una resistencia  $R_{DS}$  entre el drenador y la fuente de valor dependiente de  $V_{GS}$  y  $V_{DS}$ , y  $V_{DS} = v_i - v_o = v_i - (R/(R_{DS} + R))v_i = (R_{DS}/(R_{DS} + R))v_i \geq 0$ . Siendo  $V_{GS} = 5 - v_o$  y  $V_{DS} = v_i - v_o$ , la condición  $V_{DS} \leq V_{GS} - 1$  se traduce en  $v_i - v_o \leq 4 - v_o$ ,  $v_i \leq 4$ . Ésta última condición asegura  $V_{GS} \geq 1$ , pues  $v_o = (R/(R_{DS} + R))v_i \leq v_i$  y, con  $v_i \leq 4$ ,  $V_{GS} = 5 - v_o \geq 5 - v_i \geq 1$ . Así pues, para  $0 \leq v_i \leq 4$ , el transistor trabajará en la zona óhmica. Al hacerse  $v_i > 4$ , el transistor pasará a trabajar en la zona saturación, la corriente  $I_D$  no variará y  $v_o$  mantendrá el valor correspondiente a  $v_i = 4$ . En efecto, la condición  $V_{GS} \geq 1$  queda asegurada por  $V_{GS} = 5 - v_o$  y por el hecho de que  $v_o$  mantenga su valor y la condición  $V_{DS} > V_{GS} - 1$  queda asegurada por la condición  $v_i > 4$ , pues  $V_{DS} > V_{GS} - 1$  se traduce en  $v_i - v_o > 5 - v_o - 1$ ,  $v_i > 4$ .

Para determinar la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ ,  $0 \leq v_i \leq 5$  bastará analizar el circuito para  $0 \leq v_i \leq 4$ , sabiendo que el transistor trabaja en la zona óhmica. La corriente  $I_D$  valdrá

$$I_D = K [2(V_{GS} - V_t)V_{DS} - V_{DS}^2] = 2(V_{GS} - 1)V_{DS} - V_{DS}^2.$$

Con  $V_{GS} = 5 - v_o$  y  $V_{DS} = v_i - v_o$ , se obtiene

$$\begin{aligned} I_D &= 2(4 - v_o)(v_i - v_o) - (v_i - v_o)^2 \\ &= 8v_i - 8v_o - 2v_i v_o + 2v_o^2 - v_i^2 + 2v_i v_o - v_o^2 = v_o^2 - 8v_o + 8v_i - v_i^2. \end{aligned}$$

Por otro lado,  $v_o = 10I_D$ , obteniéndose la ecuación de segundo grado en  $v_o$

$$\begin{aligned} v_o &= 10(v_o^2 - 8v_o + 8v_i - v_i^2), \\ v_o &= 10v_o^2 - 80v_o + 80v_i - 10v_i^2, \\ 10v_o^2 - 81v_o + 80v_i - 10v_i^2 &= 0, \\ v_o^2 - 8,1v_o + 8v_i - v_i^2 &= 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$v_o = \frac{8,1 \pm \sqrt{65,61 - 32v_i + 4v_i^2}}{2} = 4,05 \pm \sqrt{v_i^2 - 8v_i + 16,4025}.$$

Discutamos el signo. Para  $v_i = 0$ , el signo + da  $v_o = 8,1$  y el signo - da  $v_o = 0$ . Dado que  $v_o = (R/(R_{DS} + R))v_i$ , para  $v_i = 0$ ,  $v_o$  deberá valer 0, y el signo correcto para  $v_i = 0$  es el -. El discriminante de la ecuación  $v_i^2 - 8v_i + 16,4025 = 0$  es  $< 0$  y dicha ecuación no tiene soluciones reales. Siendo positivo el coeficiente de  $v_i^2$  en  $v_i^2 - 8v_i + 16,4025$ , se tendrá  $v_i^2 - 8v_i + 16,4025 > 0$  para toda  $v_i$ . Ello implica que el signo - se ha de mantener para toda  $v_i$ ,  $0 \leq v_i \leq 4$ , pues, de lo contrario, la función de transferencia no sería continua. Así pues, para  $0 \leq v_i \leq 4$ ,

$$v_o = 4,05 - \sqrt{v_i^2 - 8v_i + 16,4025}.$$

Con  $v_i = 4$ , se obtiene  $v_o = 3,416$  y, para  $4 < v_i \leq 5$ ,  $v_o = 3,416$ .

3) Una generalización de los razonamientos realizados en 2) lleva a las conclusiones de que, para  $0 \leq v_i \leq 5 - V_t$ , el transistor trabajará en la zona óhmica y de que, al hacerse  $v_i > 5 - V_t$ , el transistor pasará a trabajar a la zona saturación y  $v_o$  mantendrá el valor correspondiente a  $v_i = 5 - V_t$ .

Para determinar la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ ,  $0 \leq v_i \leq 5$  bastará analizar el circuito para  $0 \leq v_i \leq 5 - V_t$ , sabiendo que el transistor trabaja en la zona óhmica. Teniendo en cuenta que  $V_{GS} = 5 - v_o$  y  $V_{DS} = v_i - v_o$ , la corriente  $I_D$  valdrá

$$\begin{aligned} I_D &= K [2(V_{GS} - V_t)V_{DS} - V_{DS}^2] = 2K(5 - V_t - v_o)(v_i - v_o) - K(v_i - v_o)^2 \\ &= 2K(5 - V_t)v_i - 2K(5 - V_t)v_o - 2Kv_i v_o + 2Kv_o^2 - Kv_i^2 - Kv_o^2 + 2Kv_i v_o \\ &= Kv_o^2 - 2K(5 - V_t)v_o + 2K(5 - V_t)v_i - Kv_i^2. \end{aligned}$$

Usando  $v_o = RI_D$  se obtiene la ecuación de segundo grado en  $v_o$

$$\begin{aligned} v_o &= R [Kv_o^2 - 2K(5 - V_t)v_o + 2K(5 - V_t)v_i - Kv_i^2], \\ \frac{v_o}{KR} &= v_o^2 - 2(5 - V_t)v_o + 2(5 - V_t)v_i - v_i^2, \end{aligned}$$



$$v_o^2 - \left[ 2(5 - V_t) + \frac{1}{KR} \right] v_o + 2(5 - V_t)v_i - v_i^2 = 0.$$

Las soluciones de dicha ecuación son

$$v_o = 5 - V_t + \frac{1}{2KR} \pm \sqrt{v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + \left( 5 - V_t + \frac{1}{2KR} \right)^2}.$$

Como en 2), hay que discutir el signo. Para  $v_i = 0$ , el signo + da  $v_o = 2(5 - V_t) + 1/(KR)$  y el signo - da  $v_o = 0$ . Como  $v_o$  ha de ser 0, el signo correcto para  $v_i = 0$  es el -. El discriminante de la ecuación  $v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + [5 - V_t + 1/(2KR)]^2 = 0$  vale

$$4(5 - V_t)^2 - 4 \left( 5 - V_t + \frac{1}{2KR} \right)^2 < 0.$$

Así pues, la ecuación  $v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + [5 - V_t + 1/(2KR)]^2 = 0$  no tiene soluciones reales y, siendo positivo el coeficiente de  $v_i^2$  en  $v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + [5 - V_t + 1/(2KR)]^2$ , se tendrá  $v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + [5 - V_t + 1/(2KR)]^2 > 0$  para toda  $v_i$ . Ello implica que el signo - se ha de mantener para  $0 \leq v_i \leq 5 - V_t$ , pues, de lo contrario, la función de transferencia no sería continua. Así pues, para  $0 \leq v_i \leq 5 - V_t$ ,

$$v_o = 5 - V_t + \frac{1}{2KR} - \sqrt{v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + \left( 5 - V_t + \frac{1}{2KR} \right)^2}. \quad (3.21)$$

El valor de  $v_o$  para  $5 - V_t < v_i \leq 5$  se obtiene evaluando (3.21) para  $v_i = 5 - V_t$  y es

$$v_o = 5 - V_t + \frac{1}{2KR} - \sqrt{\left( 5 - V_t + \frac{1}{2KR} \right)^2 - (5 - V_t)^2}.$$

4) Basta demostrar el resultado para  $0 \leq v_i \leq 5 - V_t$ . Calculando  $dv_o/dR$  usando (3.21), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dv_o}{dR} &= -\frac{1}{2KR^2} - \frac{1}{2} \frac{2 \left( 5 - V_t + \frac{1}{2KR} \right) \left( -\frac{1}{2KR^2} \right)}{\sqrt{v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + \left( 5 - V_t + \frac{1}{2KR} \right)^2}} \\ &= \frac{1}{2KR^2} \frac{5 - V_t + \frac{1}{2KR} - \sqrt{v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + \left( 5 - V_t + \frac{1}{2KR} \right)^2}}{\sqrt{v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + \left( 5 - V_t + \frac{1}{2KR} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Dado que, como se ha visto en 3),  $v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + [5 - V_t + 1/(2KR)]^2$  es  $> 0$ , basta verificar que

$$5 - V_t + \frac{1}{2KR} > \sqrt{v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + \left( 5 - V_t + \frac{1}{2KR} \right)^2}.$$

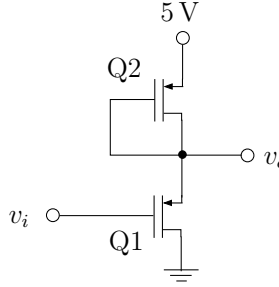
Pero  $v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i = v_i[v_i - 2(5 - V_t)]$ , que, para  $0 < v_i \leq 5 - V_t$ , es  $< 0$ .

5) Calculando el límite para  $R \rightarrow \infty$  de (3.21) se obtiene, para  $0 \leq v_i \leq 5 - V_t$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} v_o &= 5 - V_t - \sqrt{v_i^2 - 2(5 - V_t)v_i + (5 - V_t)^2} \\ &= 5 - V_t - \sqrt{[v_i - (5 - V_t)]^2} \\ &= 5 - V_t - [(5 - V_t) - v_i] = v_i. \end{aligned}$$

La función de transferencia límite para  $5 - V_t < v_i \leq 5$  se obtiene evaluando el límite anterior en  $v_i = 5 - V_t$ , con el resultado  $\lim_{R \rightarrow \infty} v_o = 5 - V_t$ ,  $5 - V_t < v_i \leq 5$ .

**Problema 54:** Los MOSFETs del circuito de la figura son idénticos y tienen una  $V_t = -1$  V. Analice el circuito y demuestre que para  $-1 \leq v_i \leq 3$ ,  $v_o = (v_i + 5)/2$ . Sugerencia: suponga que los dos MOSFETs trabajan en saturación y determine los valores de  $v_i$  para los que eso es cierto y la relación que hay entre  $v_o$  y  $v_i$ .



**Solución:** Sea  $K$  el parámetro de escala de corriente de los dos MOSFETs y denotemos con los subíndices 1 y 2 las tensiones, corrientes y parámetros  $V_t$  y  $K$  de, respectivamente, Q1 y Q2. Supongamos Q1 y Q2 en saturación. Dado que, por inspección,  $V_{GS2} = V_{DS2}$ , tenemos  $V_{DS2} < V_{GS2} - V_{t2} = V_{GS2} + 1$ , por lo que para determinar los valores de  $v_i$  para los cuales Q1 y Q2 están en saturación bastará imponer  $V_{GS1} \leq V_{t1} = -1$ ,  $V_{DS1} \leq V_{GS1} - V_{t1} = V_{GS1} + 1$  y  $V_{GS2} \leq V_{y2} = -1$ . Por inspección,  $V_{GS1} = v_i - v_o$  y  $V_{GS2} = v_o - 5$ . Con Q1 y Q2 en saturación, tenemos

$$I_{D1} = K_1(V_{GS1} - V_{t1})^2 = K_1(v_i - v_o + 1)^2$$

e

$$I_{D2} = K_2(V_{GS2} - V_{t2})^2 = K_2(v_o - 4)^2.$$

Imponiendo  $I_{D1} = I_{D2}$ , obtenemos, usando  $K_1 = K_2$ ,

$$K_1(v_i - v_o + 1)^2 = K_2(v_o - 4)^2,$$

$$\left( \frac{v_i - v_o + 1}{v_o - 4} \right)^2 = 1,$$

$$\frac{v_i - v_o + 1}{v_o - 4} = \pm 1.$$

Consideremos primero el signo  $+$ . Se tiene

$$v_i - v_o + 1 = v_o - 4,$$

$$v_o = \frac{v_i + 5}{2}.$$

Imponiendo  $V_{GS1} \leq -1$ , se obtiene

$$\begin{aligned} v_i - v_o &\leq -1, \\ v_i - \frac{v_i + 5}{2} &\leq -1, \\ \frac{v_i}{2} - \frac{5}{2} &\leq -1, \\ v_i &\leq 3. \end{aligned}$$

Imponiendo  $V_{DS1} \leq V_{GS1} + 1$ , se obtiene, teniendo en cuenta  $V_{DS1} = -v_o$ ,

$$\begin{aligned} -v_o &\leq v_i - v_o + 1, \\ v_i &\geq -1. \end{aligned}$$

Por último, imponiendo  $V_{GS2} \leq -1$ , se obtiene

$$\begin{aligned} v_o - 5 &\leq -1, \\ \frac{v_i + 5}{2} - 5 &\leq -1, \\ \frac{v_i}{2} - \frac{5}{2} &\leq -1, \\ v_i &\leq 3. \end{aligned}$$

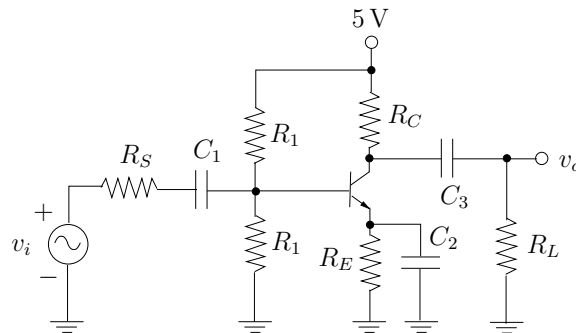
Así pues, para  $-1 \leq v_i \leq 3$ , los dos MOSFETs están en saturación y  $v_o = (v_i + 5)/2$ .



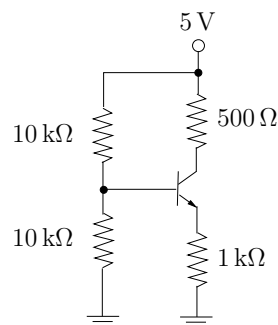
## Capítulo 4

# Problemas de Análisis de Amplificadores de Pequeña Señal

**Problema 55:** Analice el circuito de la figura y determine la ganancia de tensión  $A = v_o/v_i$  para frecuencias suficientemente grandes sabiendo que la  $\beta$  del BJT vale  $\beta = 200$  y que las resistencias del circuito valen  $R_S = 10\text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 10\text{ k}\Omega$ ,  $R_C = 500\text{ }\Omega$ ,  $R_E = 1\text{ k}\Omega$  y  $R_L = 1\text{ k}\Omega$ . Para el BJT use el modelo lineal a tramos con parámetros  $\beta$ ,  $V_{BE0} = 0,7\text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2\text{ V}$ . Use  $V_T = 25,9\text{ mV}$ .



**Solución:** Empezaremos realizando el análisis de polarización. Ello permitirá verificar que el BJT está en estado activo y permitirá calcular la componente de polarización de la corriente de colector,  $I_C$ , que es necesaria para determinar el valor del parámetro  $r_\pi$  del modelo de pequeña señal del BJT. El circuito de polarización es

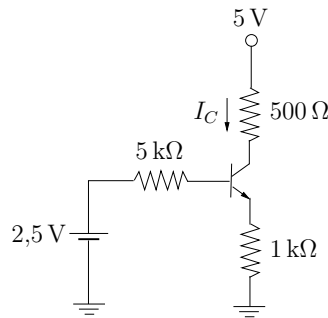


Determinemos el equivalente de Thévenin del dipolo formado por la fuente de tensión de valor 5 V y las dos resistencias de valor 10 kΩ que tiene como salidas la base del BJT y masa. Se obtiene

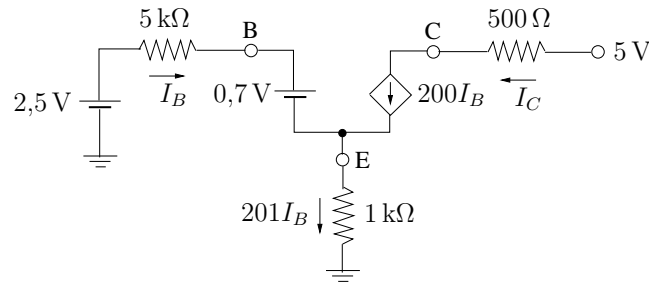
$$V_{th} = \frac{10}{10 + 10} 5 = 2,5 \text{ V},$$

$$R_{th} = 10 \parallel 10 = \frac{10}{2} = 5 \text{ k}\Omega.$$

Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin, obtenemos el circuito



Comprobemos que el BJT está en estado activo y calculemos  $I_C$ . Con el BJT en estado activo, obtenemos el circuito



Hemos de verificar  $I_B \geq 0$  y  $V_{CE} \geq 0,2$ . Para calcular  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 2,5 V, la resistencia de valor 5 kΩ, la fuente de tensión de valor 0,7 V y la resistencia de valor 1 kΩ, obteniendo

$$2,5 = 5I_B + 0,7 + (1)(201I_B),$$

$$1,8 = 206I_B,$$

$$I_B = \frac{1,8}{206} = 0,008738,$$

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $V_{CE}$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor 500 Ω, la fuente de corriente controlada y la resistencia de valor 1 kΩ, obteniendo

$$5 = (0,5)(200I_B) + V_{CE} + (1)(201I_B),$$

$$5 = V_{CE} + 301I_B,$$

$$V_{CE} = 5 - 301I_B = 5 - (301)(0,008738) = 2,37,$$

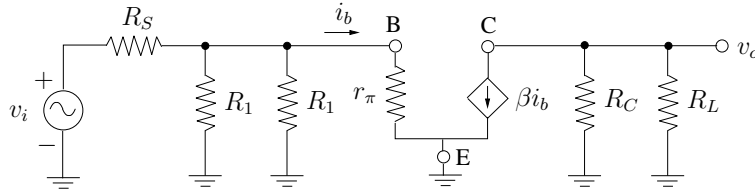
que es  $\geq 0,2$ . Así pues, en el circuito de polarización, el BJT está en estado activo. La componente de polarización de la corriente de colector vale

$$I_C = 200I_B = (200)(0,008738) = 1,748 \text{ mA},$$

y el parámetro  $r_\pi$  del modelo de pequeña señal del BJT vale

$$r_\pi = \frac{\beta V_T}{I_C} = \frac{(200)(0,0259)}{1,748} = 2,963 \text{ k}\Omega.$$

El condensador de capacidad  $C_3$  hace que la tensión en la salida del circuito  $v_o$  tenga sólo componente de pequeña señal. La ganancia  $A = v_o/v_i$  puede ser, pues, determinada haciendo el análisis de pequeña señal. Para frecuencias suficientemente grandes, los condensadores pueden ser sustituidos por cortocircuitos en el circuito de pequeña señal y éste es



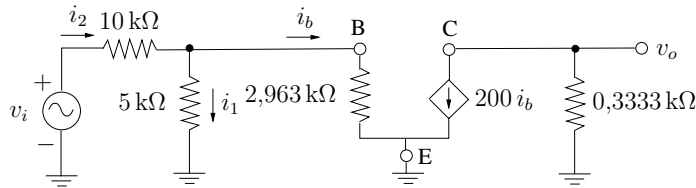
Calculando los equivalentes de las resistencias en paralelo de valores  $R_1$  y  $R_1$ , por un lado, y  $R_C$  y  $R_L$ , por otro, obtenemos

$$R_1 \parallel R_1 = \frac{R_1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ k}\Omega$$

y

$$R_C \parallel R_L = \frac{R_C R_L}{R_C + R_L} = \frac{(0,5)(1)}{0,5 + 1} = 0,3333 \text{ k}\Omega,$$

y utilizándolos obtenemos el circuito de pequeña señal



Para determinar la ganancia  $A = v_o/v_i$ , calculemos  $v_i$  y  $v_o$  en función de  $i_b$ . Obtenemos

$$v_b = 2,963 i_b,$$

$$i_1 = \frac{v_b}{5} = \frac{2,963 i_b}{5} = 0,5926 i_b,$$

$$i_2 = i_1 + i_b = 0,5926 i_b + i_b = 1,593 i_b,$$

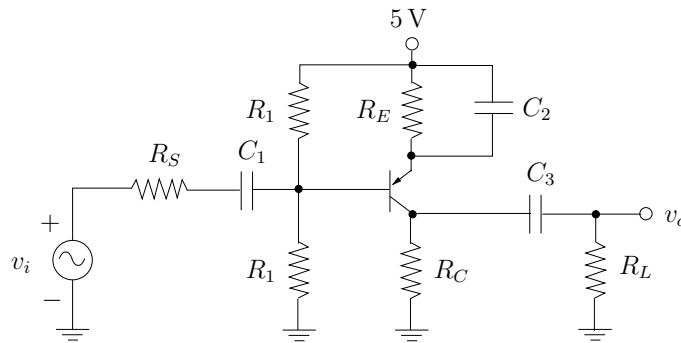
$$v_i = 10i_2 + v_b = (10)(1,593 i_b) + 2,963 i_b = 18,89 i_b, \quad (4.1)$$

$$v_o = -(0,3333)(200 i_b) = -66,66 i_b. \quad (4.2)$$

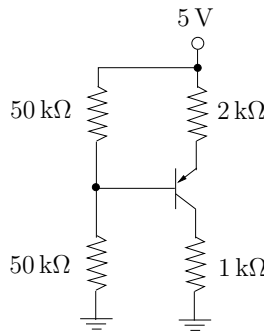
Finalmente, combinando (4.1) y (4.2),

$$A = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-66,66 i_b}{18,89 i_b} = -3,529.$$

**Problema 56:** Analice el circuito de la figura y determine la ganancia de tensión  $A = v_o/v_i$  para frecuencias suficientemente grandes sabiendo que la  $\beta$  del BJT vale  $\beta = 200$  y que las resistencias del circuito valen  $R_S = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$ ,  $R_C = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_E = 2 \text{ k}\Omega$  y  $R_L = 10 \text{ k}\Omega$ . Para el BJT use el modelo lineal a tramos con parámetros  $\beta$ ,  $V_{EB0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{EC,sat} = 0,2 \text{ V}$ . Use  $V_T = 25,9 \text{ mV}$ .



**Solución:** Empezaremos realizando el análisis de polarización, comprobando que el BJT está en estado activo y calculando la componente de polarización de la corriente de colector,  $I_C$ , y el parámetro  $r_\pi$  del modelo de pequeña señal del BJT. El circuito de polarización es



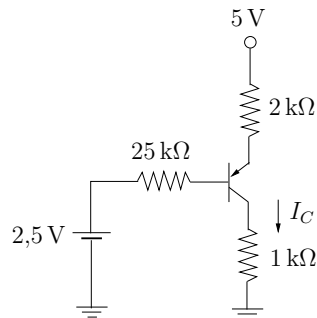
Determinemos el equivalente de Thévenin del dipolo formado por la fuente de tensión de valor  $5 \text{ V}$  y las dos resistencias de valor  $50 \text{ k}\Omega$  que tiene como salidas la base del BJT y masa.

$$V_{th} = \frac{50}{50 + 50} 5 = 2,5 \text{ V},$$

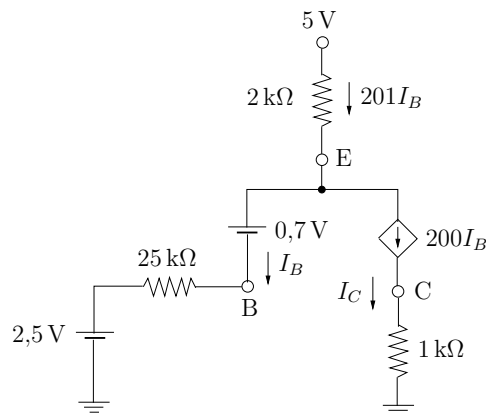
$$R_{th} = 50 \parallel 50 = \frac{50}{2} = 25 \text{ k}\Omega.$$



Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin, obtenemos el circuito



Comprobemos que el BJT está en estado activo y calculemos  $I_C$ . Con el BJT en estado activo, obtenemos el circuito



Hemos de verificar  $I_B \geq 0$  y  $V_{EC} \geq 0,2$ . Para calcular  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $2\text{ k}\Omega$ , la fuente de tensión de valor 0,7 V, la resistencia de valor  $25\text{ k}\Omega$  y la fuente de tensión de valor 2,5 V, obteniendo

$$5 = (2)(201I_B) + 0,7 + 25I_B + 2,5 ,$$

$$1,8 = 427I_B ,$$

$$I_B = \frac{1,8}{427} = 0,004215 ,$$

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $V_{EC}$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor  $2\text{ k}\Omega$ , la fuente de corriente controlada y la resistencia de valor  $1\text{ k}\Omega$ , obteniendo

$$5 = (2)(201I_B) + V_{EC} + (1)(200I_B) ,$$

$$5 = V_{EC} + 602I_B ,$$

$$V_{EC} = 5 - 602I_B = 5 - (602)(0,004215) = 2,463 ,$$

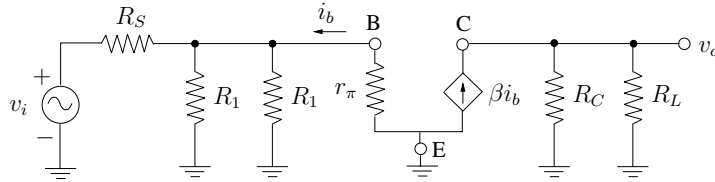
que es  $\geq 0,2$ . Así pues, en el circuito de polarización el BJT está en estado activo, la componente de polarización de la corriente de colector vale

$$I_C = 200I_B = (200)(0,004215) = 0,843 \text{ mA} ,$$

y el parámetro  $r_\pi$  del circuito de pequeña señal del BJT vale

$$r_\pi = \frac{\beta V_T}{I_C} = \frac{(200)(0,0259)}{0,843} = 6,145 \text{ k}\Omega .$$

El condensador de capacidad  $C_3$  hace que la tensión en la salida del circuito  $v_o$  tenga sólo componente de pequeña señal. La ganancia  $A = v_o/v_i$  puede ser, pues, determinada haciendo el análisis de pequeña señal. Para frecuencias suficientemente grandes, los condensadores pueden ser sustituidos por cortocircuitos en el circuito de pequeña señal y éste es



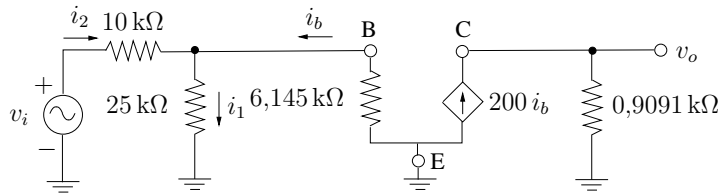
Calculando los equivalentes de las resistencias en paralelo de valores  $R_1$  y  $R_1$ , por un lado, y  $R_C$  y  $R_L$ , por otro, obtenemos

$$R_1 \parallel R_1 = \frac{R_1}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ k}\Omega$$

y

$$R_C \parallel R_L = \frac{R_C R_L}{R_C + R_L} = \frac{(1)(10)}{1 + 10} = 0,9091 \text{ k}\Omega ,$$

y utilizándolos obtenemos el circuito de pequeña señal



Para determinar la ganancia  $A = v_o/v_i$ , calculemos  $v_i$  y  $v_o$  en función de  $i_b$ . Obtenemos

$$v_b = -6,145 i_b ,$$

$$i_1 = \frac{v_b}{25} = \frac{-6,145 i_b}{25} = -0,2458 i_b ,$$

$$i_2 = i_1 - i_b = -0,2458 i_b - i_b = -1,246 i_b ,$$

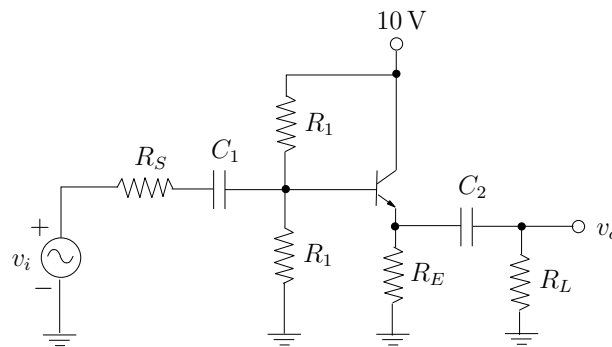
$$v_i = 10 i_2 + v_b = (10)(-1,246 i_b) - 6,145 i_b = -18,61 i_b , \quad (4.3)$$

$$v_o = (0,9091)(200 i_b) = 181,8 i_b . \quad (4.4)$$

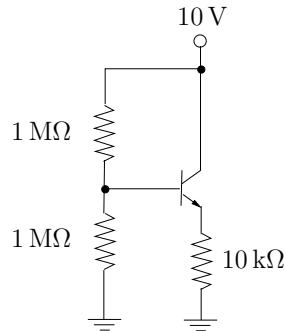
Finalmente, combinando (4.3) y (4.4),

$$A = \frac{v_o}{v_i} = \frac{181,8 i_b}{-18,61 i_b} = -9,769 .$$

**Problema 57:** Analice el circuito de la figura y determine la ganancia de tensión  $A = v_o/v_i$  para frecuencias suficientemente grandes sabiendo que la  $\beta$  del BJT vale  $\beta = 100$  y que las resistencias del circuito valen  $R_S = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_E = 10 \text{ k}\Omega$  y  $R_L = 10 \text{ k}\Omega$ . Para el BJT use el modelo lineal a tramos con parámetros  $\beta$ ,  $V_{BE0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{CE,sat} = 0,2 \text{ V}$ . Use  $V_T = 25,9 \text{ mV}$ .



**Solución:** Empezaremos realizando el análisis de polarización, comprobando que el BJT está en estado activo y calculando la componente de polarización de la corriente de colector,  $I_C$ , y el parámetro  $r_\pi$  del modelo de pequeña señal del BJT. El circuito de polarización es

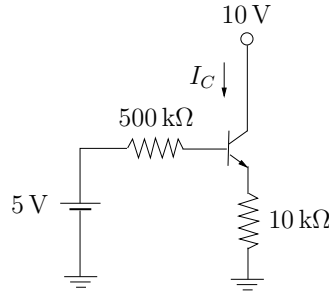


Determinemos el equivalente de Thévenin del dipolo formado por la fuente de tensión de valor 10 V y las resistencias de valor  $1 \text{ M}\Omega$  que tiene como salidas la base del BJT y masa. Se obtiene

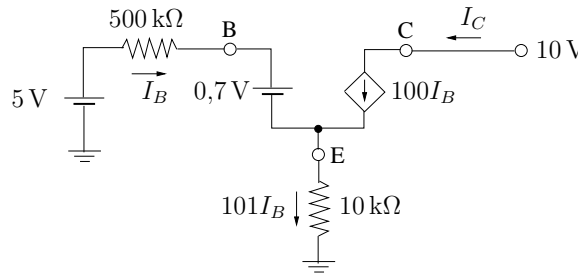
$$V_{th} = \frac{1 \text{ M}\Omega}{1 \text{ M}\Omega + 1 \text{ M}\Omega} 10 = 5 \text{ V} ,$$

$$R_{th} = 1 \text{ M}\Omega \parallel 1 \text{ M}\Omega = \frac{1 \text{ M}\Omega}{2} = 500 \text{ k}\Omega .$$

Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin, obtenemos el circuito



Con el BJT en estado activo, obtenemos el circuito



Hemos de verificar  $I_B \geq 0$  y  $V_{CE} \geq 0,2$ . Para calcular  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor 500 kΩ, la fuente de tensión de valor 0,7 V y la resistencia de valor 10 kΩ, obteniendo

$$5 = 500I_B + 0,7 + (10)(101I_B),$$

$$4,3 = 1.510I_B,$$

$$I_B = \frac{4,3}{1.510} = 0,002848,$$

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $V_{CE}$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la fuente de corriente controlada y la resistencia de valor 10 kΩ, obteniendo

$$10 = V_{CE} + (10)(101I_B),$$

$$10 = V_{CE} + 1.010I_B,$$

$$V_{CE} = 10 - 1.010I_B = 10 - (1.010)(0,002848) = 7,124,$$

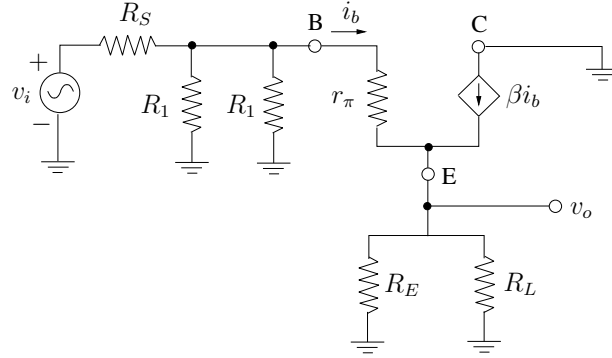
que es  $\geq 0,2$ . La componente de polarización de la corriente de colector vale

$$I_C = 100I_B = (100)(0,002848) = 0,2848 \text{ mA},$$

y el parámetro  $r_\pi$  del modelo de pequeña señal del BJT vale

$$r_\pi = \frac{\beta V_T}{I_C} = \frac{(100)(0,0259)}{0,2848} = 9,094 \text{ k}\Omega.$$

El condensador de capacidad  $C_2$  hace que la tensión en la salida del circuito  $v_o$  tenga sólo componente de pequeña señal. La ganancia  $A = v_o/v_i$  puede ser, pues, determinada haciendo el análisis de pequeña señal. Para frecuencias suficientemente grandes, los condensadores pueden ser sustituidos por cortocircuitos en el circuito de pequeña señal y éste es



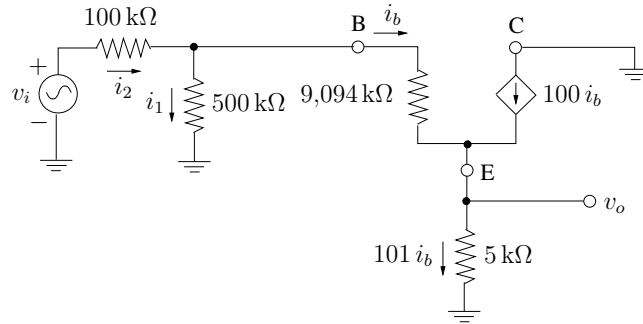
Calculando los equivalentes de las resistencias en paralelo de valores  $R_1$  y  $R_1$ , por un lado, y  $R_E$  y  $R_L$ , por otro, obtenemos

$$R_1 \parallel R_1 = \frac{R_1}{2} = \frac{1 \text{ M}\Omega}{2} = 500 \text{ k}\Omega$$

y

$$R_E \parallel R_L = \frac{R_E R_L}{R_E + R_L} = \frac{(10)(10)}{10 + 10} = 5 \text{ k}\Omega,$$

y utilizándolos obtenemos el circuito de pequeña señal



Para calcular la ganancia  $A = v_o/v_i$ , calcularemos  $v_i$  y  $v_o$  en función de  $i_b$ . Obtenemos

$$v_b = 9,094 i_b + 5(101 i_b) = 514,1 i_b,$$

$$i_1 = \frac{v_b}{500} = \frac{514,1 i_b}{500} = 1,028 i_b,$$

$$i_2 = i_1 + i_b = 1,028 i_b + i_b = 2,028 i_b,$$

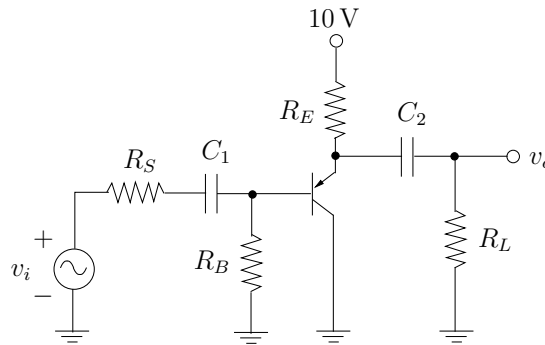
$$v_i = v_b + 100 i_2 = 514,1 i_b + (100)(2,028 i_b) = 716,9 i_b, \quad (4.5)$$

$$v_o = (5)(101 i_b) = 505 i_b. \quad (4.6)$$

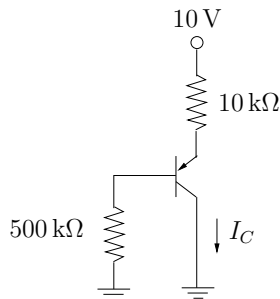
Finalmente, combinando (4.5) y (4.6),

$$A = \frac{v_o}{v_i} = \frac{505 i_b}{716,9 i_b} = 0,7044.$$

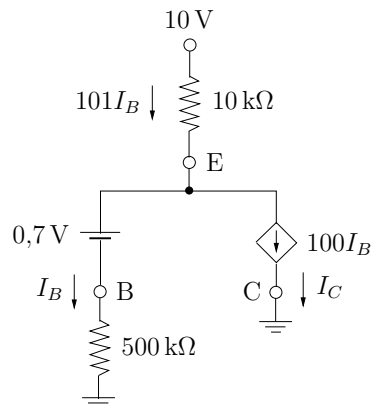
**Problema 58:** Analice el circuito de la figura y determine la ganancia de tensión  $A = v_o/v_i$  para frecuencias suficientemente grandes sabiendo que la  $\beta$  del BJT vale  $\beta = 100$  y que las resistencias del circuito valen  $R_S = 200 \text{ k}\Omega$ ,  $R_B = 500 \text{ k}\Omega$ ,  $R_E = 10 \text{ k}\Omega$  y  $R_L = 20 \text{ k}\Omega$ . Para el BJT use el modelo lineal a tramos con parámetros  $\beta$ ,  $V_{EB0} = 0,7 \text{ V}$  y  $V_{EC,sat} = 0,2 \text{ V}$ . Use  $V_T = 25,9 \text{ mV}$ .



**Solución:** Empezaremos realizando el análisis de polarización, comprobando que el BJT está en estado activo y calculando la componente de polarización de la corriente de colector,  $I_C$ , y el parámetro  $r_\pi$  del modelo de pequeña señal del BJT. El circuito de polarización es



Con el BJT en estado activo, obtenemos el circuito



Hemos de verificar  $I_B \geq 0$  y  $V_{EC} \geq 0,2$ . Para calcular  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor 10 k $\Omega$ , la fuente de tensión de valor 0,7 V y la resistencia de valor 500 k $\Omega$ , obteniendo

$$10 = (10)(101I_B) + 0,7 + 500I_B ,$$

$$1.510I_B = 9,3 ,$$

$$I_B = \frac{9,3}{1.510} = 0,006159 ,$$

que es  $\geq 0$ . Para calcular  $V_{EC}$  conociendo  $I_B$ , aplicamos la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor 10 k $\Omega$  y la fuente de corriente controlada, obteniendo

$$10 = (10)(101I_B) + V_{EC} ,$$

$$10 = 1.010I_B + V_{EC} ,$$

$$V_{EC} = 10 - 1.010I_B = 10 - (1.010)(0,006159) = 3,779 ,$$

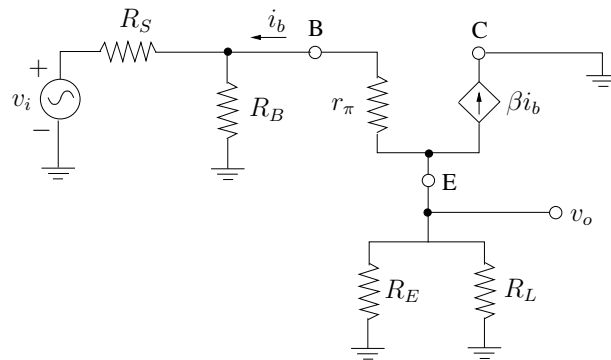
que es  $\geq 0,2$ . El BJT está, pues, en estado activo, la componente de polarización de la corriente de colector vale

$$I_C = 100I_B = (100)(0,006159) = 0,6159 \text{ mA} ,$$

y el parámetro  $r_\pi$  del modelo de pequeña señal del BJT vale

$$r_\pi = \frac{\beta V_T}{I_C} = \frac{(100)(0,0259)}{0,6159} = 4,205 \text{ k}\Omega .$$

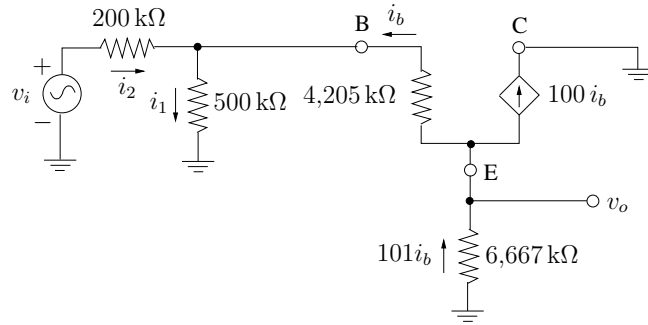
El condensador de capacidad  $C_2$  hace que la tensión en la salida del circuito  $v_o$  tenga sólo componente de pequeña señal. La ganancia  $A = v_o/v_i$  puede ser, pues, determinada haciendo el análisis de pequeña señal. Para frecuencias suficientemente grandes, los condensadores pueden ser sustituidos por cortocircuitos en el circuito de pequeña señal y éste es



Calculando el equivalente de las resistencias en paralelo de valores  $R_E$  y  $R_L$ , obtenemos

$$R_E \parallel R_L = \frac{R_E R_L}{R_E + R_L} = \frac{(10)(20)}{10 + 20} = 6,667 \text{ k}\Omega ,$$

y utilizándolo obtenemos el circuito de pequeña señal



Para calcular la ganancia  $A = v_o/v_i$ , calcularemos  $v_i$  y  $v_o$  en función de  $i_b$ . Obtenemos

$$v_b = -4,205 i_b - (6,667)(101 i_b) = -677,6 i_b,$$

$$i_1 = \frac{v_b}{500} = \frac{-677,6 i_b}{500} = -1,355 i_b,$$

$$i_2 = i_1 - i_b = -1,355 i_b - i_b = -2,355 i_b,$$

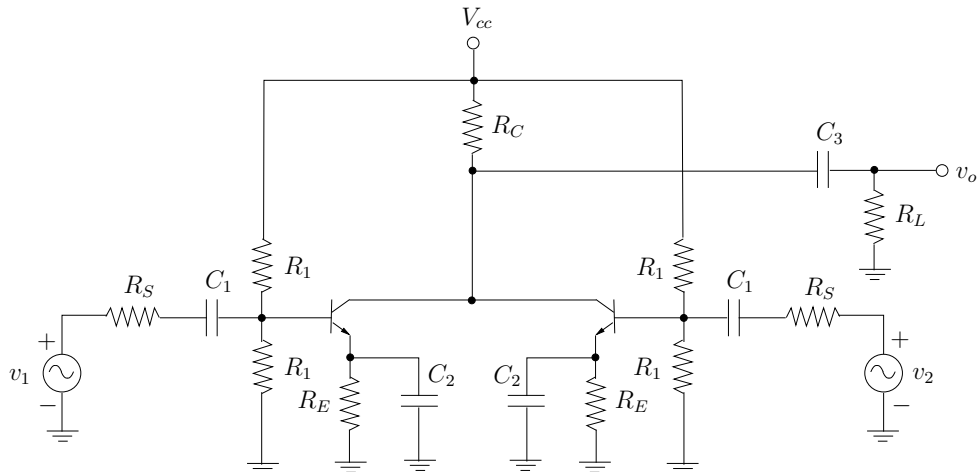
$$v_i = 200 i_2 + v_b = (200)(-2,355 i_b) - 677,6 i_b = -1.149 i_b, \quad (4.7)$$

$$v_o = -(6,667)(101 i_b) = -673,4 i_b. \quad (4.8)$$

Finalmente, combinando (4.7) y (4.8),

$$A = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-673,4 i_b}{-1.149 i_b} = 0,5856.$$

**Problema 59:** Suponiendo que los BJTs trabajan en el estado activo y que las frecuencias de las tensiones  $v_1$  y  $v_2$  son suficientemente grandes, analice el circuito de la figura y exprese  $v_o$  en función de  $v_1$ ,  $v_2$ , los parámetros  $r_\pi$  y  $\beta$  de los modelos de pequeña señal de los BJTs y las resistencias del circuito.



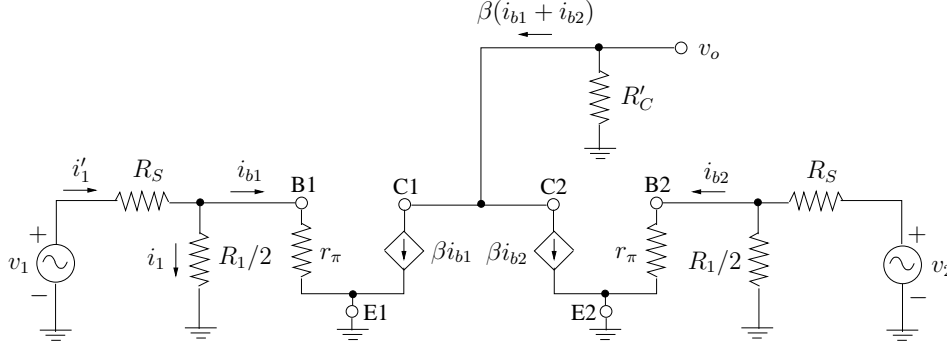
**Solución:** El condensador de capacidad  $C_3$  hace que la tensión de salida  $v_o$  tenga sólo componente de pequeña señal. Para frecuencias suficientemente grandes, las capacidades pueden ser



sustituidas por cortocircuitos y, con

$$R'_C = R_C \parallel R_L = \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}, \quad (4.9)$$

el circuito de pequeña señal es



Para analizar el circuito, empezaremos calculando  $i_{b1}$  en función de  $v_1$ . Para ello, lo más fácil es calcular  $v_1$  en función de  $i_{b1}$  e invertir la relación.

$$v_{b1} = r_\pi i_{b1},$$

$$i_1 = \frac{v_{b1}}{R_1/2} = \frac{r_\pi i_{b1}}{R_1/2} = \frac{2r_\pi}{R_1} i_{b1},$$

$$i'_1 = i_1 + i_{b1} = \frac{2r_\pi}{R_1} i_{b1} + i_{b1} = \left(1 + \frac{2r_\pi}{R_1}\right) i_{b1} = \frac{R_1 + 2r_\pi}{R_1} i_{b1},$$

$$v_1 = R_S i'_1 + v_{b1} = R_S \frac{R_1 + 2r_\pi}{R_1} i_{b1} + r_\pi i_{b1} = \left(\frac{R_1 + 2r_\pi}{R_1} R_S + r_\pi\right) i_{b1},$$

$$i_{b1} = \frac{v_1}{\frac{R_1 + 2r_\pi}{R_1} R_S + r_\pi}. \quad (4.10)$$

Por simetría,

$$i_{b2} = \frac{v_2}{\frac{R_1 + 2r_\pi}{R_1} R_S + r_\pi}. \quad (4.11)$$

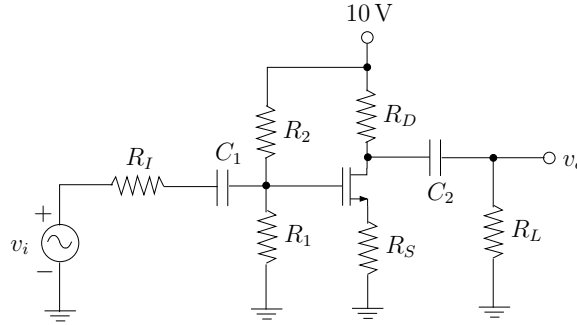
Finalmente,

$$v_o = -R'_C \beta (i_{b1} + i_{b2}),$$

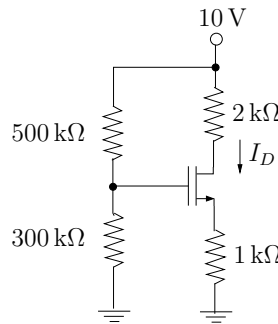
y, usando (4.9), (4.10) y (4.11),

$$v_o = -\beta \frac{\frac{R_C R_L}{R_C + R_L}}{\frac{R_1 + 2r_\pi}{R_1} R_S + r_\pi} (v_1 + v_2).$$

**Problema 60:** Analice el circuito de la figura y determine la ganancia de tensión  $A = v_o/v_i$  para frecuencias suficientemente grandes sabiendo que los parámetros  $V_t$  y  $K$  del MOSFET valen  $V_t = 1$  V y  $K = 50$  mA/V<sup>2</sup> y que las resistencias del circuito valen  $R_I = 10$  k $\Omega$ ,  $R_1 = 300$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 500$  k $\Omega$ ,  $R_D = 2$  k $\Omega$ ,  $R_S = 1$  k $\Omega$  y  $R_L = 1$  k $\Omega$ .



**Solución:** Empezaremos realizando el análisis de polarización, comprobando que el MOSFET trabaja en la zona saturación y calculando la componente de polarización de la corriente de drenador,  $I_D$ , lo cual permitirá calcular el valor del parámetro  $g_m$  del modelo de pequeña señal del MOSFET. El circuito de polarización es



Supongamos que el MOSFET trabaja en saturación. Se ha de verificar  $V_{GS} \geq V_t = 1$  y  $V_{DS} \geq V_{GS} - V_t = V_{GS} - 1$ . Teniendo en cuenta que la corriente por la puerta del MOSFET es nula, la fuente de tensión de valor 10 V, la resistencia de valor 500 k $\Omega$  y la resistencia de valor 300 k $\Omega$  forman un divisor de tensión, y la tensión de puerta,  $V_G$ , resulta valer

$$V_G = \frac{300}{300 + 500} 10 = 3,75 .$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla formada por la resistencia de valor 300 k $\Omega$ , el MOSFET y la resistencia de valor 1 k $\Omega$ , obtenemos

$$3,75 = V_{GS} + (1)I_D = V_{GS} + I_D .$$

Por otro lado, con el MOSFET en saturación,

$$I_D = K(V_{GS} - V_t)^2 = 50(V_{GS} - 1)^2 , \quad (4.12)$$

que, combinada con la ecuación anterior, da la ecuación de segundo grado en  $V_{GS}$

$$3,75 = V_{GS} + 50(V_{GS} - 1)^2 = 50V_{GS}^2 - 99V_{GS} + 50 ,$$

$$50V_{GS}^2 - 99V_{GS} + 46,25 = 0,$$

cuyas soluciones son  $V_{GS} = 1,225$  y  $V_{GS} = 0,7553$ . Sólo la solución  $V_{GS} = 1,225$  verifica  $V_{GS} \geq 1$ . Retengámosla y verifiquemos  $V_{DS} \geq V_{GS} - 1 = 1,225 - 1 = 0,225$ . De (4.12),

$$I_D = 50(1,225 - 1)^2 = 2,531.$$

Calculemos la tensión de fuente,  $V_S$ , y la tensión de drenador,  $V_D$ :

$$V_S = (1)I_D = 2,531,$$

$$V_D = 10 - 2I_D = 10 - (2)(2,531) = 4,938.$$

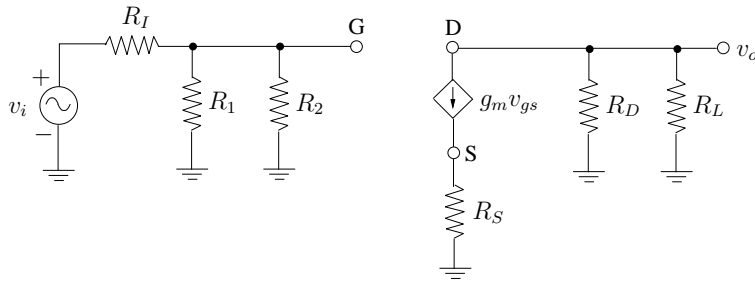
Resulta

$$V_{DS} = V_D - V_S = 4,938 - 2,531 = 2,407,$$

que es  $\geq 0,225$ . Así pues, el MOSFET trabaja en saturación e  $I_D = 2,531$  mA. El parámetro  $g_m$  del modelo de pequeña señal del MOSFET resulta valer

$$g_m = 2\sqrt{KI_D} = 2\sqrt{(50)(2,531)} = 22,5 \text{ mA/V}.$$

El condensador de capacidad  $C_2$  hace que la tensión  $v_o$  tenga sólo componente de pequeña señal. Así pues, la ganancia  $A = v_o/v_i$  puede ser calculada analizando el circuito de pequeña señal. Para frecuencias suficientemente grandes, los condensadores pueden ser sustituidos por cortocircuitos y el circuito de pequeña señal resulta ser

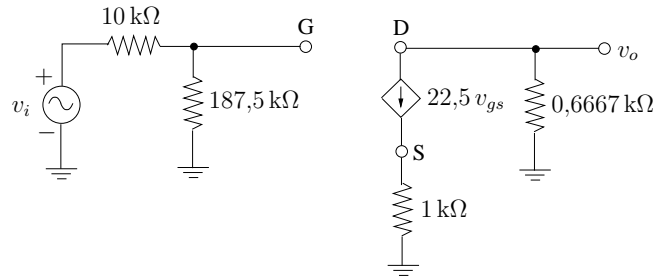


Calculando los equivalentes de las resistencias en paralelo de valores  $R_1$  y  $R_2$ , por un lado, y  $R_D$  y  $R_L$ , por otro, obtenemos

$$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(300)(500)}{300 + 500} = 187,5 \text{ k}\Omega,$$

$$R_D \parallel R_L = \frac{R_D R_L}{R_D + R_L} = \frac{(2)(1)}{2 + 1} = 0,6667 \text{ k}\Omega,$$

y utilizándolos obtenemos el circuito de pequeña señal



Calculemos  $v_{gs}$  en función de  $v_i$ . Obtenemos

$$v_g = \frac{187,5}{10 + 187,5} v_i = 0,9494 v_i ,$$

$$v_s = (1)(22,5 v_{gs}) = 22,5 v_{gs} ,$$

$$v_{gs} = v_g - v_s = 0,9494 v_i - 22,5 v_{gs} ,$$

$$23,5 v_{gs} = 0,9494 v_i ,$$

$$v_{gs} = \frac{0,9494 v_i}{23,5} = 0,0404 v_i .$$

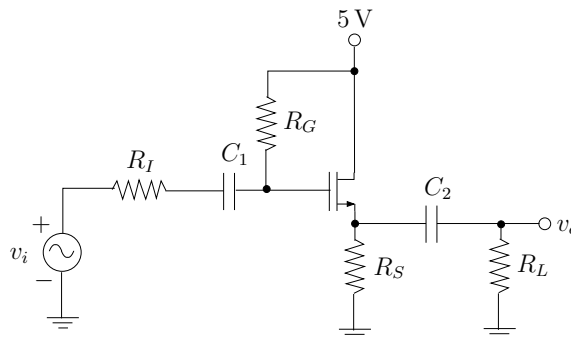
Finalmente,

$$v_o = -(0,6667)(22,5 v_{gs}) = -(0,6667)(22,5)(0,0404 v_i) = -0,606 v_i ,$$

y

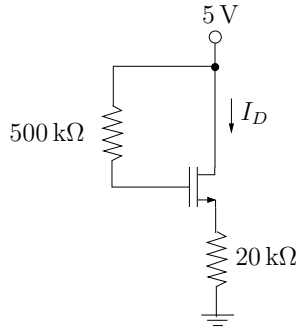
$$A = \frac{v_o}{v_i} = -0,606 .$$

**Problema 61:** Analice el circuito de la figura y determine la ganancia de tensión  $A = v_o/v_i$  para frecuencias suficientemente grandes sabiendo que los parámetros  $V_t$  y  $K$  del MOSFET valen  $V_t = 1 \text{ V}$  y  $K = 1 \text{ mA/V}^2$  y que las resistencias del circuito valen  $R_I = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_G = 500 \text{ k}\Omega$ ,  $R_S = 20 \text{ k}\Omega$  y  $R_L = 1 \text{ k}\Omega$ .



**Solución:** Empezaremos realizando el análisis de polarización, comprobando que el MOSFET trabaja en la zona saturación y calculando la componente de polarización de la corriente de drena-

dor,  $I_D$ , y el parámetro  $g_m$  del modelo de pequeña señal del MOSFET. El circuito de polarización es



Supongamos que el MOSFET trabaja en saturación. Se ha de verificar  $V_{GS} \geq V_t = 1$  y  $V_{DS} \geq V_{GS} - V_t = V_{GS} - 1$ . Siendo nula la corriente por la puerta del MOSFET, la tensión de puerta vale  $V_G = 5$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, las dos resistencias y el MOSFET, obtenemos

$$5 = V_{GS} + 20I_D ,$$

por otro lado, con el MOSFET en saturación,

$$I_D = K(V_{GS} - V_t)^2 = (V_{GS} - 1)^2 . \quad (4.13)$$

Combinándola con la anterior, obtenemos la ecuación de segundo grado en  $V_{GS}$ ,

$$5 = V_{GS} + 20(V_{GS} - 1)^2 = 20V_{GS}^2 - 39V_{GS} + 20 ,$$

$$20V_{GS}^2 - 39V_{GS} + 15 = 0 ,$$

cuyas soluciones son  $V_{GS} = 1,423$  y  $V_{GS} = 0,527$ . Sólo la solución  $V_{GS} = 1,423$  verifica  $V_{GS} \geq 1$ . Retengámosla y verifiquemos  $V_{DS} \geq V_{GS} - 1 = 1,423 - 1 = 0,423$ . De (4.13), obtenemos

$$I_D = (1,423 - 1)^2 = 0,179 .$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, el MOSFET y la resistencia de valor 20 kΩ, obtenemos

$$5 = V_{DS} + 20 I_D ,$$

de donde,

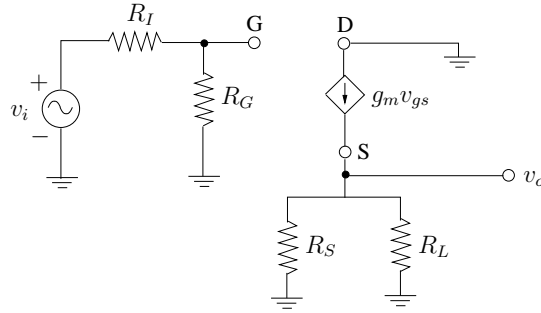
$$V_{DS} = 5 - 20 I_D = 5 - (20)(0,179) = 1,42 ,$$

que es  $\geq 0,423$ . Así pues, el MOSFET trabaja en saturación e  $I_D = 0,179$  mA. El parámetro  $g_m$  del modelo de pequeña señal del MOSFET vale

$$g_m = 2\sqrt{KI_D} = 2\sqrt{(1)(0,179)} = 0,846 \text{ mA/V} .$$

El condensador de capacidad  $C_2$  hace que la tensión  $v_o$  tenga sólo componente de pequeña señal. Así pues, la ganancia  $A = v_o/v_i$  puede ser calculada analizando el circuito de pequeña

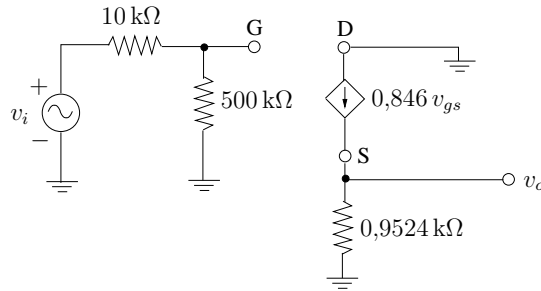
señal. Para frecuencias suficientemente grandes, los condensadores pueden ser sustituidos por cortocircuitos y el circuito de pequeña señal resulta ser



Calculando el equivalente de las resistencias en paralelo de valores  $R_S$  y  $R_L$ , obtenemos

$$R_S \parallel R_L = \frac{R_S R_L}{R_S + R_L} = \frac{(20)(1)}{20 + 1} = 0,9524 \text{ k}\Omega ,$$

y utilizándolo obtenemos el circuito de pequeña señal



Calculemos  $v_{gs}$  en función de  $v_i$ . Obtenemos

$$v_g = \frac{500}{10 + 500} v_i = 0,9804 v_i ,$$

$$v_s = (0,9524)(0,846 v_{gs}) = 0,8057 v_{gs} ,$$

$$v_{gs} = v_g - v_s = 0,9804 v_i - 0,8057 v_{gs} ,$$

$$1,806 v_{gs} = 0,9804 v_i ,$$

$$v_{gs} = \frac{0,9804 v_i}{1,806} = 0,5429 v_i .$$

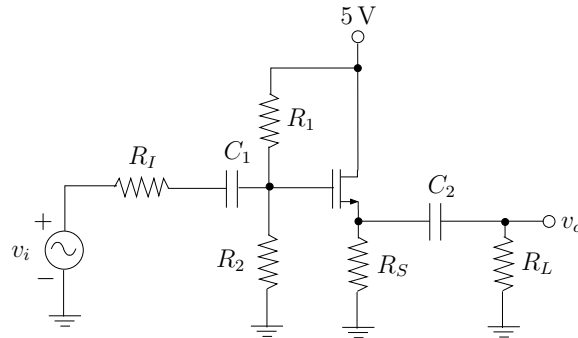
Finalmente,

$$v_o = v_s = 0,8057 v_{gs} = (0,8057)(0,5429 v_i) = 0,4374 v_i ,$$

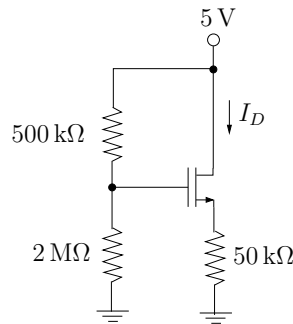
y

$$A = \frac{v_o}{v_i} = 0,4374 .$$

**Problema 62:** Analice el circuito de la figura y determine la ganancia de tensión  $A = v_o/v_i$  para frecuencias suficientemente grandes sabiendo que los parámetros  $V_t$  y  $K$  del MOSFET valen  $V_t = 1\text{ V}$  y  $K = 10\text{ mA/V}^2$  y que las resistencias del circuito valen  $R_I = 100\text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 500\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2\text{ M}\Omega$ ,  $R_S = 50\text{ k}\Omega$  y  $R_L = 10\text{ k}\Omega$ .



**Solución:** Empezaremos realizando el análisis de polarización, comprobando que el MOSFET trabaja en la zona saturación y calculando la componente de polarización de la corriente de drenador,  $I_D$ , y el parámetro  $g_m$  del modelo de pequeña señal del MOSFET. El circuito de polarización es



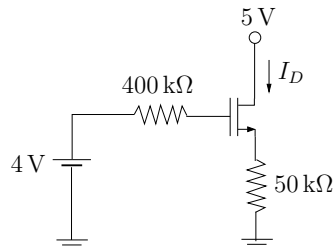
Determinemos el equivalente de Thévenin del dipolo formado por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor 500 kΩ y la resistencia de valor 2 MΩ que tiene como salidas la puerta del MOSFET y masa. Se obtiene

$$V_{th} = \frac{2.000}{500 + 2.000} 5 = 4\text{ V}$$

y

$$R_{th} = 500 \parallel 2.000 = \frac{(500)(2.000)}{500 + 2.000} = 400\text{ k}\Omega.$$

Sustituyendo el dipolo por su equivalente de Thévenin, se obtiene el circuito



Supongamos que el MOSFET trabaja en saturación. Se ha de verificar  $V_{GS} \geq V_t = 1$  y  $V_{DS} \geq$

$V_{GS} - V_t = V_{GS} - 1$ . Siendo nula la corriente por la puerta del MOSFET, la tensión de puerta vale  $V_G = 4$  V. Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 4 V, las dos resistencias y el MOSFET, obtenemos

$$4 = V_{GS} + 50I_D ,$$

por otro lado, con el MOSFET en saturación,

$$I_D = K(V_{GS} - V_t)^2 = 10(V_{GS} - 1)^2 . \quad (4.14)$$

Combinándola con la anterior, obtenemos la ecuación de segundo grado en  $V_{GS}$ ,

$$4 = V_{GS} + 500(V_{GS} - 1)^2 = 500V_{GS}^2 - 999V_{GS} + 500 ,$$

$$500V_{GS}^2 - 999V_{GS} + 496 = 0 ,$$

cuyas soluciones son  $V_{GS} = 1,076$  y  $V_{GS} = 0,9215$ . Sólo la solución  $V_{GS} = 1,076$  verifica  $V_{GS} \geq 1$ . Retengámosla y verifiquemos  $V_{DS} \geq V_{GS} - 1 = 1,076 - 1 = 0,076$ . De (4.14), obtenemos

$$I_D = (10)(1,076 - 1)^2 = 0,05776 .$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, el MOSFET y la resistencia de valor 50 k $\Omega$ , obtenemos

$$5 = V_{DS} + 50I_D ,$$

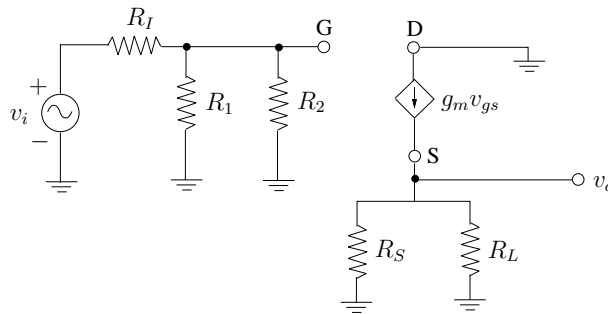
de donde,

$$V_{DS} = 5 - 50I_D = 5 - (50)(0,05776) = 2,112 ,$$

que es  $\geq 0,076$ . Así pues, el MOSFET trabaja en saturación e  $I_D = 0,05776$  mA. El parámetro  $g_m$  del modelo de pequeña señal del MOSFET vale

$$g_m = 2\sqrt{KI_D} = 2\sqrt{(10)(0,05776)} = 1,52 \text{ mA/V} .$$

El condensador de capacidad  $C_2$  hace que la tensión  $v_o$  tenga sólo componente de pequeña señal. Así pues, la ganancia  $A = v_o/v_i$  puede ser calculada analizando el circuito de pequeña señal. Para frecuencias suficientemente grandes, los condensadores pueden ser sustituidos por cortocircuitos y el circuito de pequeña señal resulta ser



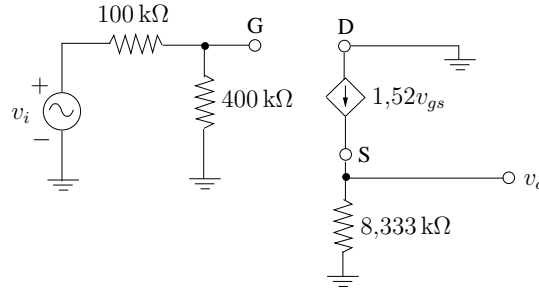
Calculando los equivalentes de las resistencias en paralelo de valores  $R_1$  y  $R_2$ , por un lado, y  $R_S$  y  $R_L$ , por otro, obtenemos

$$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(500)(2.000)}{500 + 2.000} = 400 \text{ k}\Omega ,$$



$$R_S \parallel R_L = \frac{R_S R_L}{R_S + R_L} = \frac{(50)(10)}{50 + 10} = 8,333 \text{ k}\Omega ,$$

y utilizándolos obtenemos el circuito de pequeña señal



Calculemos  $v_{gs}$  en función de  $v_i$ . Obtenemos

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{400}{100 + 400} v_i = 0,8 v_i , \\ v_s &= (8,333)(1,52 v_{gs}) = 12,67 v_{gs} , \\ v_{gs} &= v_g - v_s = 0,8 v_i - 12,67 v_{gs} , \\ 13,67 v_{gs} &= 0,8 v_i , \\ v_{gs} &= \frac{0,8 v_i}{13,67} = 0,05852 v_i . \end{aligned}$$

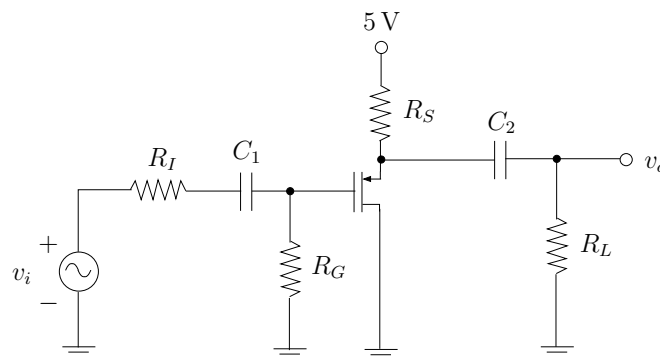
Finalmente,

$$v_o = v_s = 12,67 v_{gs} = (12,67)(0,05852 v_i) = 0,7414 v_i ,$$

y

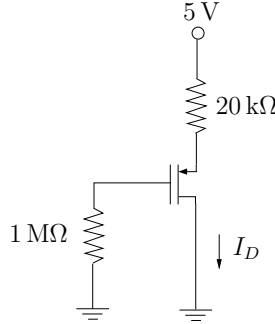
$$A = \frac{v_o}{v_i} = 0,7414 .$$

**Problema 63:** Analice el circuito de la figura y determine la ganancia de tensión  $A = v_o/v_i$  para frecuencias suficientemente grandes sabiendo que los parámetros  $V_t$  y  $K$  del MOSFET valen  $V_t = -1 \text{ V}$  y  $K = 5 \text{ mA/V}^2$  y que las resistencias del circuito valen  $R_I = 50 \text{ k}\Omega$ ,  $R_G = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_S = 20 \text{ k}\Omega$  y  $R_L = 10 \text{ k}\Omega$ .



**Solución:** Empezaremos realizando el análisis de polarización, comprobando que el MOSFET

trabaja en la zona saturación y calculando la componente de polarización de la corriente de drenador,  $I_D$ , y el parámetro  $g_m$  del modelo de pequeña señal del MOSFET. El circuito de polarización es



Supongamos que el MOSFET trabaja en saturación. Se ha de verificar  $V_{GS} \leq V_t = -1$  y  $V_{DS} \leq V_{GS} - V_t = V_{GS} + 1$ . Siendo nula la corriente por la puerta del MOSFET, la tensión de puerta vale  $V_G = 0$ . Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, las dos resistencias y el MOSFET, obtenemos

$$5 = 20I_D - V_{GS} ,$$

por otro lado, con el MOSFET en saturación,

$$I_D = K(V_{GS} - V_t)^2 = 5(V_{GS} + 1)^2 . \quad (4.15)$$

Combinándola con la anterior, obtenemos la ecuación de segundo grado en  $V_{GS}$ ,

$$\begin{aligned} 5 &= 100(V_{GS} + 1)^2 - V_{GS} = 100V_{GS}^2 + 199V_{GS} + 100 , \\ 100V_{GS}^2 + 199V_{GS} + 95 &= 0 , \end{aligned}$$

cuyas soluciones son  $V_{GS} = -0,7949$  y  $V_{GS} = -1,195$ . Sólo la solución  $V_{GS} = -1,195$  verifica  $V_{GS} \leq -1$ . Retengámosla y verifiquemos  $V_{DS} \leq V_{GS} + 1 = -1,195 + 1 = -0,195$ . De (4.15), obtenemos

$$I_D = (5)(-1,195 + 1)^2 = 0,1901 .$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor 5 V, la resistencia de valor 20 kΩ y el MOSFET, obtenemos

$$5 = 20I_D - V_{DS} ,$$

de donde,

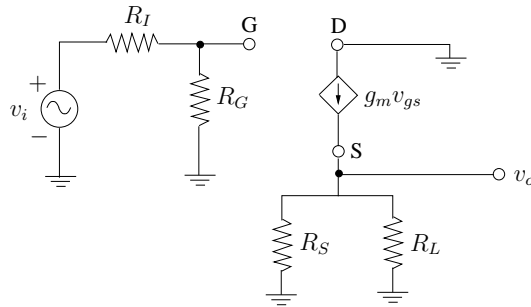
$$V_{DS} = -5 + 20I_D = -5 + (20)(0,1901) = -1,198 ,$$

que es  $\leq -0,195$ . Así pues, el MOSFET trabaja en saturación e  $I_D = 0,1901$  mA. El parámetro  $g_m$  del modelo de pequeña señal del MOSFET vale

$$g_m = 2\sqrt{KI_D} = 2\sqrt{(5)(0,1901)} = 1,95 \text{ mA/V} .$$

El condensador de capacidad  $C_2$  hace que la tensión  $v_o$  tenga sólo componente de pequeña señal. Así pues, la ganancia  $A = v_o/v_i$  puede ser calculada analizando el circuito de pequeña

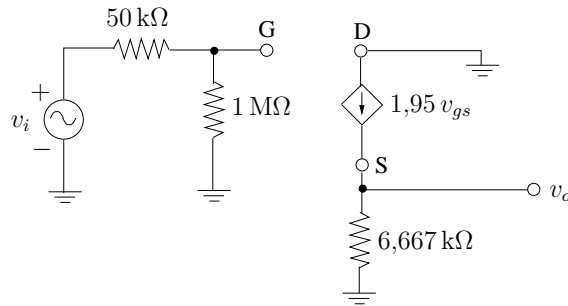
señal. Para frecuencias suficientemente grandes, los condensadores pueden ser sustituidos por cortocircuitos y el circuito de pequeña señal resulta ser



Calculando el equivalente de las resistencias en paralelo de valores  $R_S$  y  $R_L$ , obtenemos

$$R_S \parallel R_L = \frac{R_S R_L}{R_S + R_L} = \frac{(20)(10)}{20 + 10} = 6,667 \text{ k}\Omega ,$$

y utilizándolo obtenemos el circuito de pequeña señal



Calculemos  $v_{gs}$  en función de  $v_i$ . Obtenemos

$$v_g = \frac{1.000}{50 + 1.000} v_i = 0,9524 v_i ,$$

$$v_s = (6,667)(1,95 v_{gs}) = 13 v_{gs} ,$$

$$v_{gs} = v_g - v_s = 0,9524 v_i - 13 v_{gs} ,$$

$$14 v_{gs} = 0,9524 v_i ,$$

$$v_{gs} = \frac{0,9524 v_i}{14} = 0,06803 v_i .$$

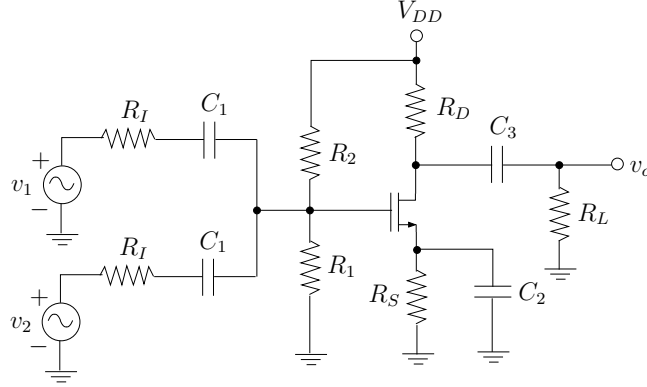
Finalmente,

$$v_o = v_s = 13 v_{gs} = (13)(0,06803 v_i) = 0,8844 v_i ,$$

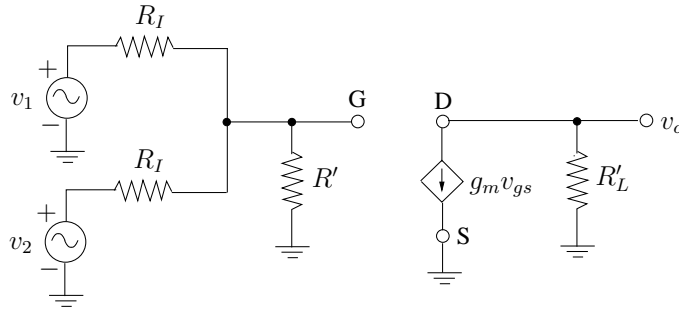
y

$$A = \frac{v_o}{v_i} = 0,8844 .$$

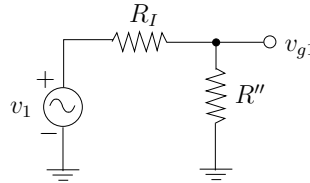
**Problema 64:** Suponiendo que el MOSFET trabaja en la zona saturación, analice el circuito de la figura y, para frecuencias suficientemente grandes, exprese  $v_o$  en función de  $v_1$ ,  $v_2$ , el parámetro  $g_m$  del modelo de pequeña señal del MOSFET y las resistencias del circuito.



**Solución:** El condensador de capacidad  $C_3$  hace que la tensión de salida  $v_o$  tenga sólo componente de pequeña señal, por lo que  $v_o$  puede ser determinada analizando el circuito de pequeña señal. Para frecuencias suficientemente grandes, las capacidades pueden ser sustituidas por cortocircuitos en el circuito de pequeña señal y, con  $R' = R_1 \parallel R_2$  y  $R'_L = R_D \parallel R_L$ , éste es



Aplicando el principio de superposición, la tensión  $v_g$  vale  $v_g = v_{g1} + v_{g2}$ , donde  $v_{g1}$  es la componente debida a  $v_1$  y  $v_{g2}$  es la componente debida a  $v_2$ . Con  $R'' = R_I \parallel R' = R_I \parallel R_1 \parallel R_2$ ,  $v_{g1}$  puede ser evaluada analizando el circuito



Obtenemos

$$v_{g1} = \frac{R''}{R_I + R''} v_1.$$

Por simetría,

$$v_{g2} = \frac{R''}{R_I + R''} v_2 ,$$

y

$$v_g = \frac{R''}{R_I + R''} (v_1 + v_2) .$$

Finalmente,

$$v_o = -R'_L g_m v_{gs} = -R'_L g_m v_g = -R'_L g_m \frac{R''}{R_I + R''} (v_1 + v_2) = -R'_L g_m \frac{1}{1 + R_I/R''} (v_1 + v_2) ,$$

y, usando

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

y

$$R'_L = \frac{R_D R_L}{R_D + R_L} ,$$

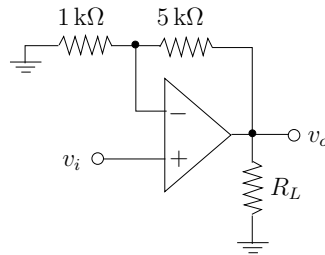
$$v_o = -\frac{R_D R_L}{R_D + R_L} g_m \frac{1}{2 + R_I/R_1 + R_I/R_2} (v_1 + v_2) .$$



## Capítulo 5

# Problemas de Análisis de Circuitos con Amplificadores Operacionales

**Problema 65:** Sabiendo que el amplificador operacional tiene tensiones de saturación  $-10\text{ V}$  y  $10\text{ V}$ , determine la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$  del circuito de la figura para  $-5\text{ V} \leq v_i \leq 5\text{ V}$ . A continuación, suponiendo que  $v_i$  es una tensión senoidal de amplitud  $3\text{ V}$ , determine la potencia media entregada a la resistencia de carga  $R_L$  para  $R_L = 2\text{ k}\Omega$ .



**Solución:** El amplificador operacional está realimentado negativamente y, por tanto, suponiendo  $-10 \leq v_o \leq 10$ , el amplificador operacional trabajará en la zona lineal. El circuito es un amplificador no inversor y, con el amplificador operacional trabajando en la zona lineal, se tendrá

$$\frac{v_o}{v_i} = 1 + \frac{5}{1} = 6,$$

$$v_o = 6v_i.$$

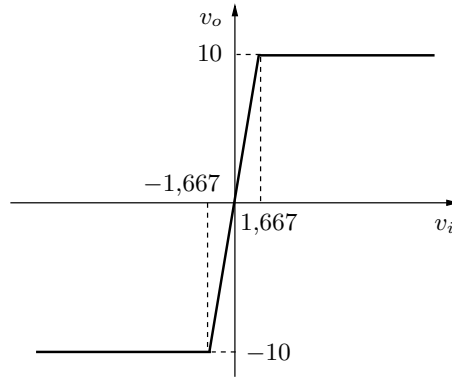
Imponiendo  $-10 \leq v_o \leq 10$ , obtenemos  $-10 \leq 6v_i \leq 10$ ,  $-1,667 \leq v_i \leq 1,667$ . Para  $v_i > 1,67$ , el amplificador operacional estará saturado positivamente y  $v_o = 10$ . Para comprobarlo, hemos de verificar que  $v_+ > v_-$ , donde  $v_+$  es la tensión en la entrada no inversora del amplificador operacional y  $v_-$  es la tensión en la entrada inversora del amplificador operacional. Por inspección,  $v_+ = v_i$  y, usando el hecho de que la corriente por la entrada inversora del amplificador operacional es nula, obtenemos

$$v_- = \frac{1}{1+5} v_o = \frac{10}{6} = 1,667,$$

y  $v_+ > v_-$  para  $v_i > 1,667$ . Para  $v_i < -1,667$ , el amplificador operacional estará saturado negativamente y  $v_o = -10$ . Para comprobarlo, hemos de verificar que  $v_+ < v_-$ . Por inspección,  $v_+ = v_i$  y, usando el hecho de que la corriente por la entrada inversora del amplificador operacional es nula, obtenemos

$$v_- = \frac{1}{1+5} v_o = \frac{-10}{6} = -1,667,$$

y  $v_+ < v_-$  para  $v_i < -1,667$ . La siguiente figura muestra la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$



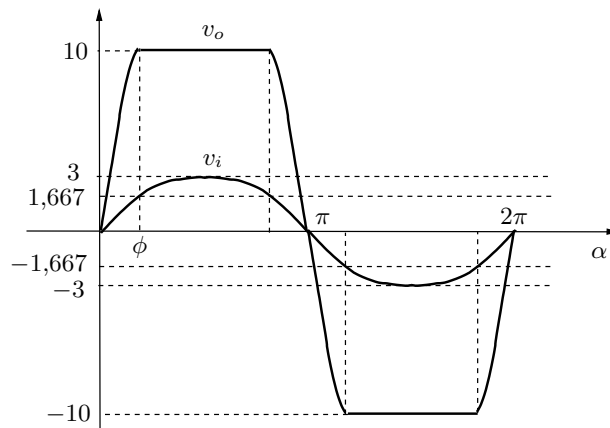
La potencia media entregada a la carga vale

$$\overline{P} = \frac{V_{o,ef}^2}{R_L},$$

donde  $V_{o,ef}$  es el valor eficaz de la tensión de salida  $v_o$ . Siendo  $T$  el periodo de  $v_i$ , se tiene

$$v_i(t) = 3 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

La tensión  $v_o(t)$  también tendrá periodo  $T$ . La siguiente figura representa  $v_i(t)$  y  $v_o(t)$  usando la variable  $\alpha = 2\pi t/T$ .



Determinemos  $\phi$ :

$$1,667 = 3 \sin(\phi), \quad 0 < \phi < \pi/2,$$



$$\phi = \arcsen\left(\frac{1,667}{3}\right) = \arcsen(0,5557) = 0,5892 \text{ rad}.$$

$V_{o,ef}^2$  vale

$$V_{o,ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v_o^2(t) dt.$$

Dadas las simetrías de  $v_o^2(t)$ , tenemos

$$V_{o,ef}^2 = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} v_o^2(t) dt. \quad (5.1)$$

En el intervalo  $[0, T/4]$ ,  $v_o(t)$  vale

$$v_o(t) = \begin{cases} 6 v_i(t) = 18 \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{T}\right), & 0 \leq 2\pi \frac{t}{T} \leq \phi \\ 10, & \phi \leq 2\pi \frac{t}{T} \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable  $\alpha = 2\pi t/T$  en (5.1), obtenemos

$$\begin{aligned} V_{o,ef}^2 &= \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} v_o^2(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi/2} \left[ \int_0^\phi (18 \operatorname{sen} \alpha)^2 d\alpha + \int_\phi^{\pi/2} 10^2 d\alpha \right] \\ &= \frac{1}{\pi/2} \left[ 324 \int_0^\phi \operatorname{sen}^2 \alpha d\alpha + 100 \int_\phi^{\pi/2} d\alpha \right] \\ &= \frac{1}{\pi/2} \left\{ 324 \left[ \frac{\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4} \right]_0^\phi + 100 \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi/2} (62\phi - 81 \operatorname{sen}(2\phi) + 50\pi), \end{aligned}$$

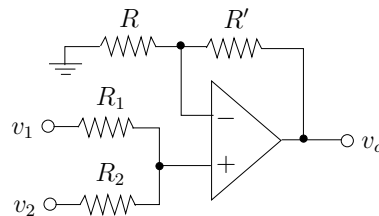
y, usando  $\phi = 0,5892 \text{ rad}$ ,

$$V_{o,ef}^2 = 75,61 \text{ V}^2,$$

obteniéndose

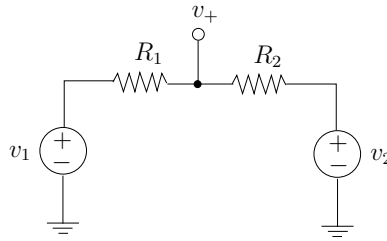
$$\overline{P} = \frac{V_{o,ef}^2}{R_L} = \frac{75,61 \text{ V}^2}{2.000 \Omega} = \frac{75,61}{2.000} \text{ W} = 0,03781 \text{ W} = 37,81 \text{ mW}.$$

**Problema 66:** Suponiendo que  $v_o$  está comprendida entre las tensiones de saturación del amplificador operacional, analice el circuito de la figura y determine  $v_o$  en función de  $v_1$ ,  $v_2$  y las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R$  y  $R'$ . Se escoge  $R = R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ . ¿Qué valores deberán tener  $R_2$  y  $R'$  para que  $v_o = 4v_1 + v_2$ ?



**Solución:** Usando el hecho de que la corriente por la entrada no inversora del amplificador

operacional es nula, es posible calcular la tensión de dicha entrada,  $v_+$ , analizando el circuito



Aplicando el principio de superposición, obtenemos

$$v_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_2 ,$$

y, considerando que desde la entrada no inversora a la salida el circuito es un amplificador no inversor,

$$v_o = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) v_+ = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1 + \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_2 .$$

Con  $R = R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,

$$v_o = (1 + R') \frac{R_2}{R_2 + 1} v_1 + (1 + R') \frac{1}{R_2 + 1} v_2 .$$

Identificando coeficientes, obtenemos el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} (1 + R') \frac{R_2}{R_2 + 1} &= 4 \\ (1 + R') \frac{1}{R_2 + 1} &= 1 . \end{aligned}$$

Dividiéndolas, obtenemos  $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$ . Sustituyendo dicho valor en la segunda ecuación, obtenemos

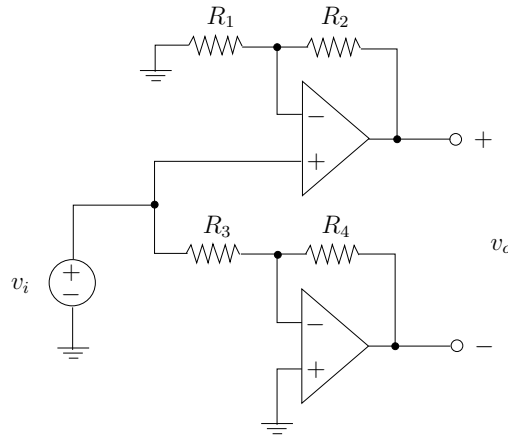
$$(1 + R') \frac{1}{5} = 1 ,$$

$$1 + R' = 5 ,$$

$$R' = 4 \text{ k}\Omega .$$

**Problema 67:** Analice el circuito de la figura y, suponiendo que las tensiones en las salidas de los dos amplificadores operacionales están comprendidas entre las tensiones de saturación, determine el valor de  $v_o$  en función de  $v_i$ . Suponga ahora que los dos amplificadores operacionales tienen tensiones de saturación  $V$  y  $-V$ , donde  $V > 0$ . ¿De qué valores habrá que escoger  $R_2/R_1$

y  $R_4/R_3$  para que  $v_o = 3v_i$  para el mayor rango de valores posible para  $v_i$ ?



**Solución:** Llamemos  $v_{o1}$  a la tensión en la salida del amplificador operacional superior y  $v_{o2}$  a la tensión en la salida del amplificador operacional inferior. De  $v_i$  a  $v_{o1}$  tenemos un amplificador inversor y de  $v_i$  a  $v_{o2}$  tenemos un amplificador no inversor. Entonces, suponiendo que  $v_{o1}$  y  $v_{o2}$  estén comprendidas entre las tensiones de saturación de los amplificadores operacionales respectivos, tendremos

$$v_{o1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_i,$$

$$v_{o2} = -\frac{R_4}{R_3},$$

y

$$v_o = v_{o1} - v_{o2} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_4}{R_3}\right) v_i.$$

Para que  $v_o = 3v_i$ ,  $R_2/R_1$  y  $R_4/R_3$  deberán satisfacer

$$1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_4}{R_3} = 3,$$

$$\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_4}{R_3} = 2. \quad (5.2)$$

Para que el amplificador operacional superior no se sature,  $v_i$  deberá satisfacer

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) |v_i| \leq V,$$

$$|v_i| \leq \frac{V}{1 + R_2/R_1}.$$

Para que el amplificador operacional inferior no se sature,  $v_i$  deberá satisfacer

$$\frac{R_4}{R_3} |v_i| \leq V,$$

$$|v_i| \leq \frac{V}{R_4/R_3}.$$

Por tanto, para que  $v_o = 3v_i$ ,  $v_i$  deberá satisfacer

$$|v_i| \leq \min \left\{ \frac{V}{1 + R_2/R_1}, \frac{V}{R_4/R_3} \right\} = V \min \left\{ \frac{1}{1 + R_2/R_1}, \frac{1}{R_4/R_3} \right\},$$

y el rango de valores para  $v_i$  para los cuales  $v_o = 3v_i$  será  $[-V_I, V_I]$ , con

$$V_I = V \min \left\{ \frac{1}{1 + R_2/R_1}, \frac{1}{R_4/R_3} \right\}.$$

Dicho rango se maximiza maximizando  $V_I$ . Así pues, se trata de localizar el máximo de  $V_I$  sujeto a las restricciones  $R_2/R_1 \geq 0$ ,  $R_4/R_3 \geq 0$  y (5.2). Con  $x = R_2/R_1$ , se trata de localizar el máximo de

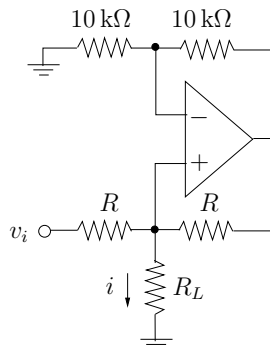
$$\min \left\{ \frac{1}{1+x}, \frac{1}{2-x} \right\}$$

en el intervalo para  $x$ ,  $[0, 2]$ . La función  $1/(1+x)$  es decreciente con  $x$  y varía en el intervalo entre 1 y  $1/3$ . La función  $1/(2-x)$  es creciente con  $x$  y varía en el intervalo entre  $1/2$  e  $\infty$ . El máximo se encuentra pues en el  $x$  que verifica

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{2-x}, \\ 2-x &= 1+x, \\ 1 &= 2x, \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así pues, el rango de valores de  $v_i$  para los cuales  $v_o = 3v_i$  se maximiza para  $R_2/R_1 = 1/2$  y  $R_4/R_3 = 2 - R_2/R_1 = 2 - 1/2 = 3/2$ .

**Problema 68:** Analice el circuito de la figura suponiendo  $R > 0$  y a) demuestre que la realimentación es negativa; b) suponiendo que el amplificador operacional trabaja en la zona lineal, demuestre que  $i = v_i/R$ ; c) con  $R = 5 \text{ k}\Omega$  y  $R_L = 1 \text{ k}\Omega$ , obtenga el intervalo para  $v_i$  en el cual  $i(\text{mA}) = v_i(\text{V})/5$  sabiendo que las tensiones de saturación del amplificador operacional son  $-10 \text{ V}$  y  $10 \text{ V}$ .

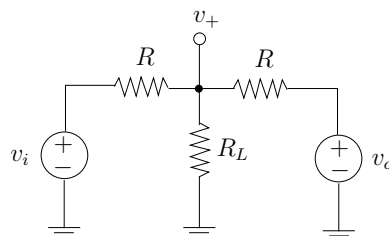


**Solución:** a) Sea  $v_o$  la tensión en la salida del amplificador operacional. Utilizando el hecho de que las corrientes por las entradas del amplificador operacional son nulas, obtenemos que la

tensión de la entrada inversora vale

$$v_- = \frac{10}{10 + 10} v_o = \frac{v_o}{2}$$

y que la tensión de la entrada no inversora,  $v_+$ , puede ser evaluada en función de  $v_i$  y  $v_o$  analizando el circuito

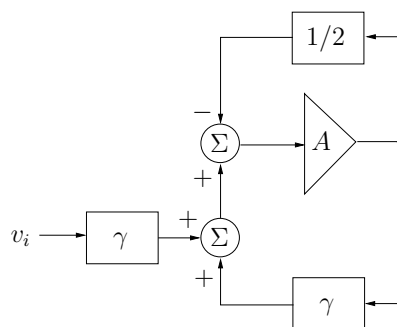


Utilizando el principio de superposición para analizar este último circuito obtenemos, con  $R' = R \parallel R_L = RR_L/(R + R_L)$ ,

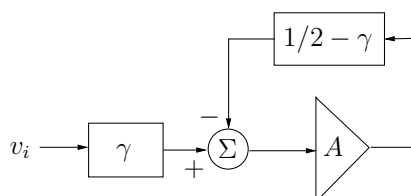
$$v_+ = \frac{R'}{R' + R} v_i + \frac{R'}{R' + R} v_o = \gamma v_i + \gamma v_o,$$

$$\gamma = \frac{R'}{R' + R} = \frac{\frac{RR_L}{R + R_L}}{\frac{RR_L}{R + R_L} + R} = \frac{RR_L}{2RR_L + R^2} < \frac{1}{2}.$$

Llamando  $A$  a la ganancia diferencial del amplificador operacional, las ecuaciones obtenidas para  $v_-$  y  $v_+$  en función de  $v_i$  y  $v_o$  conducen al diagrama de bloques

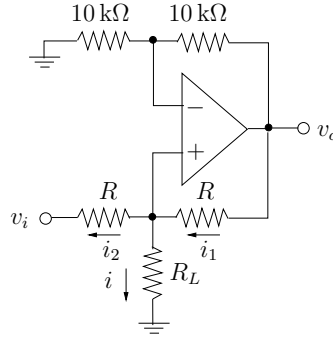


que puede ser reducido a



Siendo  $\gamma < 1/2$ ,  $1/2 - \gamma > 0$ , y la realimentación es negativa.

b) Analizaremos el circuito usando el hecho de que las corrientes por las entradas del amplificador operacional son nulas y usando el teorema del cortocircuito virtual. Sean  $i_1$  e  $i_2$  las corrientes y sea  $v_o$  la tensión indicadas en la figura



Utilizando el hecho de que la corriente por la entrada inversora del amplificador operacional es nula, la tensión en dicha entrada vale

$$v_- = \frac{10}{10 + 10} v_o = \frac{v_o}{2}.$$

Aplicando el teorema del cortocircuito virtual, la tensión en la entrada no inversora vale

$$v_+ = v_- = \frac{v_o}{2}.$$

La corriente  $i_1$  resulta, por tanto, valer

$$i_1 = \frac{v_o - v_+}{R} = \frac{v_o - v_o/2}{R} = \frac{v_o}{2R}$$

y la corriente  $i_2$

$$i_2 = \frac{v_+ - v_i}{R} = \frac{v_o/2 - v_i}{R} = \frac{v_o}{2R} - \frac{v_i}{R}.$$

Finalmente, aplicando la primera ley de Kirchoff al nodo donde se conectan las dos resistencias  $R$  y la resistencia  $R_L$ , teniendo en cuenta que la corriente por la entrada no inversora del amplificador operacional es nula,

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i, \\ i &= i_1 - i_2 = \frac{v_i}{R}. \end{aligned}$$

c) Obtengamos una expresión para la tensión en la salida del amplificador operacional,  $v_o$ , en función de  $v_i$ . Utilizando la ley de Ohm y la relación entre  $i$  y  $v_i$ ,

$$v_+ = R_L i = \frac{R_L}{R} v_i.$$

Tal y como se ha visto en b),

$$v_+ = \frac{v_o}{2}.$$

Combinándolas obtenemos

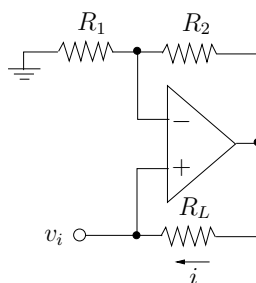
$$v_o = 2 v_+ = 2 \frac{R_L}{R} v_i.$$

Para  $R = 5 \text{ k}\Omega$  y  $R_L = 1 \text{ k}\Omega$ ,

$$v_o = \frac{2}{5} v_i = 0,4 v_i.$$

La relación entre  $i$  y  $v_i$  se ha obtenido suponiendo que el amplificador trabajaba en la zona lineal. Siendo la realimentación negativa, la única condición a imponer es  $-10 \leq v_o \leq 10$ . Ello conduce a  $-10 \leq 0,4 v_i \leq 10$  y a  $-25 \leq v_i \leq 25$ . Así pues, el intervalo para  $v_i$  es  $[-25, 25]$ .

**Problema 69:** Analice el circuito de la figura y, suponiendo que el amplificador operacional trabaja en la zona lineal, demuestre que  $i = (R_2/R_1)(v_i/R_L)$ . Suponga, a continuación,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$  y que las tensiones de saturación del amplificador operacional valen  $-5 \text{ V}$  y  $10 \text{ V}$ . ¿Entre qué valores podrá variar  $v_i$  de modo que  $i = 5v_i/R_L$ ?



**Solución:** De la entrada no inversora a la salida del amplificador operacional, el circuito es un amplificador no inversor. Así pues, llamando  $v_o$  a la tensión de salida del amplificador operacional, se tendrá

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_i. \quad (5.3)$$

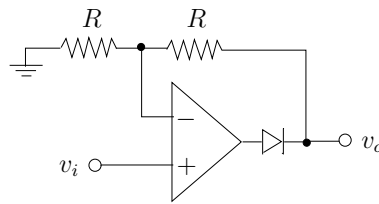
Finalmente, aplicando la ley de Ohm,

$$i = \frac{v_o - v_i}{R_L} = \frac{(1 + R_2/R_1)v_i - v_i}{R_L} = \frac{R_2}{R_1} \frac{v_i}{R_L}.$$

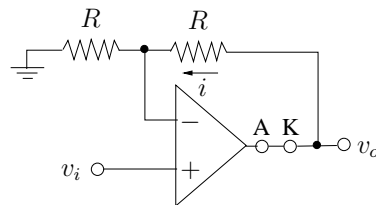
Con  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ , de (5.3), obtenemos  $v_o = 6 v_i$ . La realimentación es negativa y la única condición necesaria para que la relación entre  $v_i$  e  $i$  obtenida anteriormente sea válida es  $-5 \leq v_o \leq 10$ . Imponiéndola, obtenemos  $-5 \leq 6 v_i \leq 10$ ,  $-0,8333 \leq v_i \leq 1,667$ . Así pues,  $v_i$  podrá variar entre  $-0,8333 \text{ V}$  y  $1,667 \text{ V}$ .

**Problema 70:** Suponiendo que el diodo es ideal y que las tensiones de saturación positiva y negativa del amplificador operacional son suficientemente grandes en valor absoluto, analice el circuito de la figura y determine la función de transferencia  $v_o = F(v_i)$ . ¿Cuánto valdrá el valor

medio de la tensión  $v_o$  cuando  $v_i$  sea una tensión senoidal de amplitud 5 V?



**Solución:** Para  $v_i \geq 0$ , el amplificador operacional trabaja en la zona lineal y el diodo está en ON. En efecto, sustituyendo el diodo por su circuito equivalente para el estado ON, obtenemos el circuito



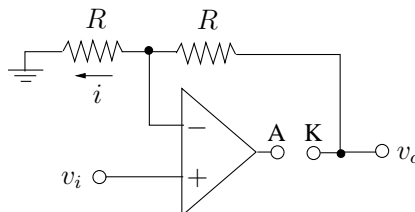
Dicho circuito es un amplificador no inversor y

$$v_o = \left(1 + \frac{R}{R}\right) v_i = 2 v_i .$$

Únicamente se ha de verificar que la corriente directa por el diodo,  $i$ , es  $\geq 0$ . Aplicando el teorema del cortocircuito virtual, la tensión en la entrada inversora,  $v_-$ , vale  $v_- = v_i$ . Aplicando la ley de Ohm,

$$i = \frac{v_o - v_-}{R} = \frac{2v_i - v_i}{R} = \frac{v_i}{R} ,$$

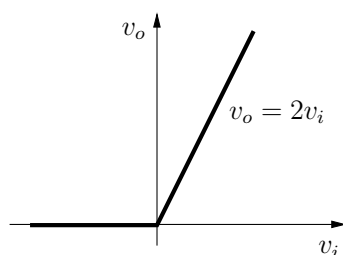
y la condición  $i \geq 0$  se cumple para  $v_i \geq 0$ . Para  $v_i < 0$ , el amplificador operacional está saturado negativamente y el diodo está en OFF. En efecto, sustituyendo el diodo por el circuito equivalente a su estado, obtenemos el circuito



Siendo nula la corriente por la entrada inversora del amplificador operacional, la corriente  $i$  será nula y la tensión de la entrada inversora,  $v_-$ , valdrá  $v_- = Ri = 0$ , que, para  $v_i < 0$ , es  $> v_+ = v_i$ , verificando que el amplificador operacional está saturado negativamente. La tensión  $v_o$  valdrá  $v_- + Ri = 0$  y la tensión ánodo-cátodo del diodo será negativa, verificando que el diodo está en



estado OFF. La función de transferencia  $v_o = F(v_i)$  resulta ser



Sea  $T$  el periodo de la tensión senoidal  $v_i(t)$ . La tensión  $v_o(t)$  también tendrá periodo  $T$  y valdrá en  $[0, T]$

$$v_o(t) = \begin{cases} 2v_i(t) = 10 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right), & 0 \leq 2\pi \frac{t}{T} \leq \pi \\ 0, & \pi \leq 2\pi \frac{t}{T} \leq 2\pi. \end{cases}$$

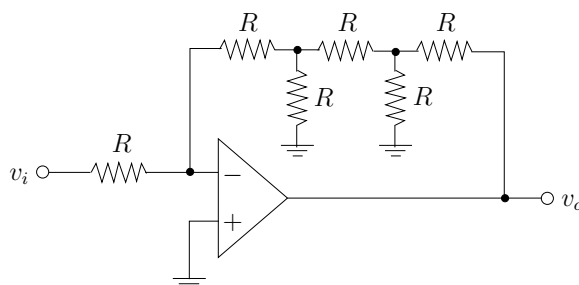
El valor medio de la tensión  $v_o(t)$  valdrá

$$\bar{V}_o = \frac{1}{T} \int_0^T v_o(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 10 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) dt,$$

y, haciendo el cambio de variable  $\alpha = 2\pi(t/T)$ ,

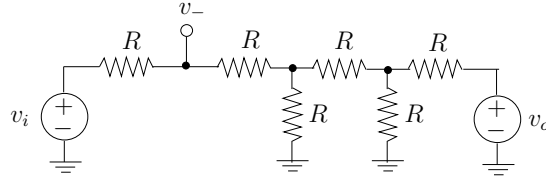
$$\bar{V}_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 10 \sin \alpha d\alpha = \frac{10}{2\pi} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{10}{2\pi} [-\cos \alpha]_0^\pi = \frac{10}{2\pi} (1 + 1) = \frac{10}{\pi} = 3,18 \text{ V}.$$

**Problema 71:** Analice el circuito de la figura y a) demuestre que la realimentación es negativa; b) suponiendo que el amplificador trabaja en la zona lineal, determine  $v_o/v_i$ .

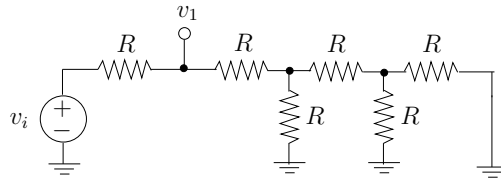


**Solución:** a) Calculemos la tensión de la entrada inversora del amplificador operacional,  $v_-$ , en

función de  $v_i$  y  $v_o$ . Hay que analizar el circuito



Lo haremos aplicando el principio de superposición. Tenemos  $v_- = v_1 + v_2$ , donde  $v_1$  es la componente debida a  $v_i$  y  $v_2$  es la componente debida a  $v_o$ . La tensión  $v_1$  puede ser calculada analizando el circuito



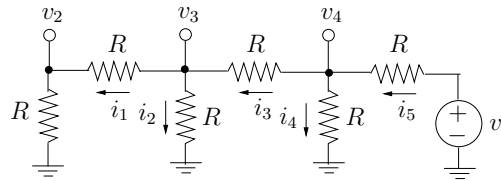
La resistencia vista a la derecha de  $v_1$  vale

$$\begin{aligned} R' &= R + R \parallel (R + R \parallel R) = R + R \parallel (R + R/2) = R + R \parallel 3R/2 \\ &= R + \frac{\frac{3}{2}R^2}{R + \frac{3}{2}R} = R + \frac{3}{5}R = \frac{8}{5}R, \end{aligned}$$

y

$$\frac{v_1}{v_i} = \frac{R'}{R + R'} = \frac{\frac{8}{5}R}{R + \frac{8}{5}R} = \frac{8}{13},$$

obteniéndose  $v_1 = (8/13)v_i$ . Para calcular  $v_2$  debemos analizar el circuito



El análisis se puede realizar fácilmente aplicando la ley de Ohm y la segunda ley de Kirchoff a nodos apropiados

$$i_1 = \frac{v_2}{R},$$

$$v_3 = 2Ri_1 = 2v_2,$$

$$i_2 = \frac{v_3}{R} = \frac{2v_2}{R},$$

$$i_3 = i_1 + i_2 = \frac{v_2}{R} + \frac{2v_2}{R} = \frac{3v_2}{R},$$

$$v_4 = v_3 + Ri_3 = 2v_2 + 3v_2 = 5v_2,$$

$$i_4 = \frac{v_4}{R} = \frac{5v_2}{R},$$

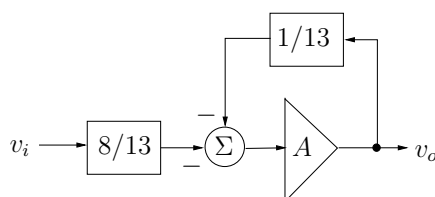
$$i_5 = i_3 + i_4 = \frac{3v_2}{R} + \frac{5v_2}{R} = \frac{8v_2}{R},$$

$$v_o = v_4 + Ri_5 = 5v_2 + 8v_2 = 13v_2,$$

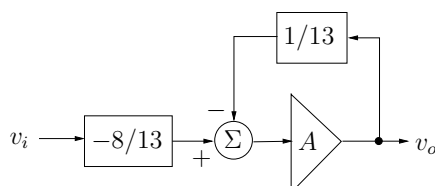
obteniéndose  $v_2 = v_o/13$ . La tensión  $v_-$  vale, por tanto,

$$v_- = v_1 + v_2 = \frac{8}{13}v_i + \frac{v_o}{13}.$$

Llamando  $A$  a la ganancia diferencial del amplificador operacional, el circuito puede ser representado por el diagrama de bloques



que puede ser transformado en



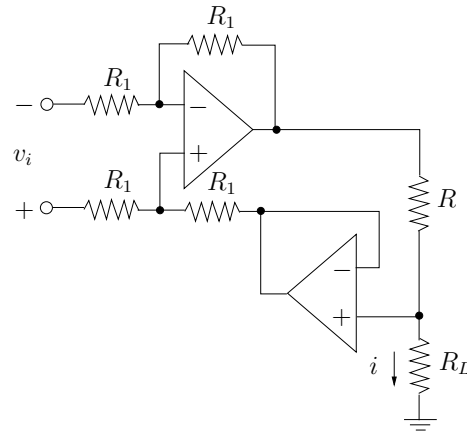
demostrando que la realimentación es negativa.

b) Usando el hecho de que la ganancia de un amplificador con ganancia infinita realimentado negativamente con ganancia  $\beta$  es  $1/\beta$ , del último diagrama de bloques obtenido en a), se deduce

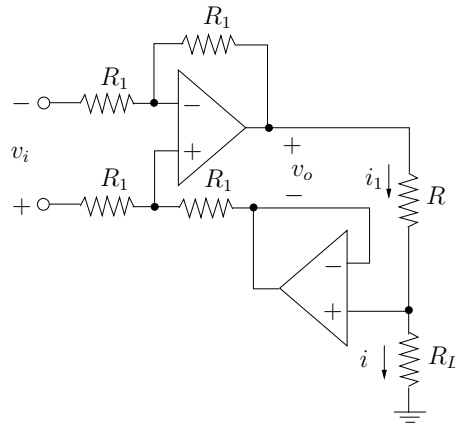
$$\frac{v_o}{v_i} = \left( -\frac{8}{13} \right) 13 = -8.$$

**Problema 72:** Suponiendo que los dos amplificadores operacionales trabajan en la zona lineal, analice el circuito de la figura y demuestre que  $i = v_i/R$ . Suponga, a continuación, que las tensiones de saturación de los amplificadores operacionales son  $-10$  V y  $10$  V. ¿Para qué valores

de  $v_i$  se cumplirá  $i = v_i/R$ ?



**Solución:** El circuito formado por el amplificador operacional de la izquierda y las cuatro resistencias  $R_1$  es un amplificador diferencial básico. Por tanto, siendo  $v_o$  la tensión diferencial indicada en la siguiente figura



se tendrá  $v_o = (R_1/R_1)v_i = v_i$ . Siendo  $i_1$  la corriente indicada en la figura anterior y, aplicando el teorema del cortocircuito virtual al amplificador operacional de la derecha y la ley de Ohm, se tendrá

$$i_1 = \frac{v_o}{R} = \frac{v_i}{R}.$$

Por último, usando el hecho de que la corriente por la entrada no inversora del amplificador operacional de la derecha es nula, se tendrá

$$i = i_1 = \frac{v_i}{R}.$$

Los dos amplificadores operacionales están realimentados negativamente y el análisis efectuado anteriormente, que depende del trabajo de ambos amplificadores operacionales en la zona lineal, será válido con las únicas condiciones de que las tensiones en las salidas de los amplificadores operacionales estén comprendidas entre las tensiones de saturación. Llamando  $v_{o1}$  a la tensión de la salida del amplificador operacional de la izquierda y llamando  $v_{o2}$  a la tensión de la salida

del amplificador operacional de la derecha, se deberá cumplir  $-10 \leq v_{o1} \leq 10$  y  $-10 \leq v_{o2} \leq 10$ . Calculemos, pues,  $v_{o1}$  y  $v_{o2}$  en función de  $v_i$  y los valores de las resistencias del circuito, suponiendo que ambos amplificadores operacionales trabajan en la zona lineal. Aplicando el teorema del cortocircuito virtual al amplificador operacional de la derecha, obtenemos que  $v_{o2}$  es igual a la tensión de la entrada no inversora de dicho amplificador operacional y

$$v_{o2} = R_L i = \frac{R_L}{R} v_i.$$

Por otro lado tenemos

$$v_{o1} = v_{o2} + v_o = \frac{R_L}{R} v_i + v_i = \left(1 + \frac{R_L}{R}\right) v_i.$$

Imponiendo  $-10 \leq v_{o1} \leq 10$  y  $-10 \leq v_{o2} \leq 10$ , obtenemos

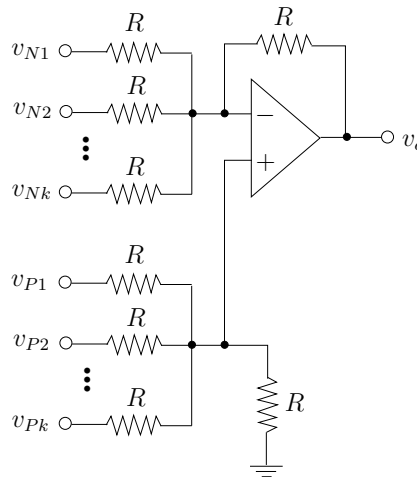
$$\begin{aligned} -10 &\leq \frac{R_L}{R} v_i \leq 10, \\ -10 &\leq \left(1 + \frac{R_L}{R}\right) v_i \leq 10, \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} -10 \frac{R}{R_L} &\leq v_i \leq 10 \frac{R}{R_L}, \\ -10 \frac{R}{R + R_L} &\leq v_i \leq 10 \frac{R}{R + R_L}. \end{aligned}$$

Así pues, los valores de  $v_i$  para los cuales  $i = v_i/R$  son los comprendidos en el intervalo  $[-10(R/(R + R_L)), 10(R/(R + R_L))]$ .

**Problema 73:** Suponiendo que el amplificador operacional trabaja en la zona lineal, analice el circuito de la figura y demuestre que  $v_o = (v_{P1} - v_{N1}) + (v_{P2} - v_{N2}) + \dots + (v_{Pk} - v_{Nk})$ .



**Solución:** Siendo el circuito lineal, la tensión de la salida  $v_o$  será función lineal de las tensiones  $v_{N1}, v_{N2}, \dots, v_{Nk}, v_{P1}, v_{P2}, \dots, v_{Pk}$ . Además, por simetría, los coeficientes asociados

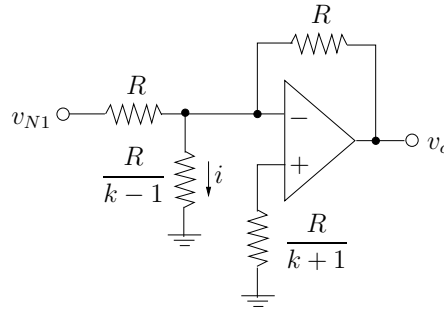
a las tensiones  $v_{N1}, v_{N2}, \dots, v_{Nk}$  serán iguales y los coeficientes asociados a las tensiones  $v_{P1}, v_{P2}, \dots, v_{Pk}$  serán iguales. Tenemos, por tanto,

$$v_o = A + B_N v_{N1} + B_N v_{N2} + \dots + B_N v_{Nk} + B_P v_{P1} + B_P v_{P2} + \dots + B_P v_{Pk}.$$

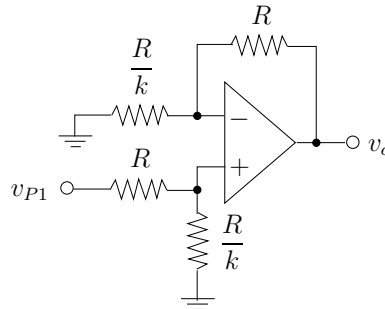
Para  $v_{N1} = v_{N2} = \dots = v_{Nk} = v_{P1} = v_{P2} = \dots = v_{Pk} = 0$ , las corrientes por las resistencias conectadas a la entrada no inversora son nulas, la tensión de esa entrada es nula, aplicando el teorema del cortocircuito virtual, la tensión de la entrada inversora es también nula, las corrientes por las resistencias  $R$  conectadas a las tensiones  $v_{N1}, v_{N2}, \dots, v_{Nk}$  son nulas, la corriente por la resistencia  $R$  de realimentación es nula, y  $v_o = 0$ . Por tanto,  $A = 0$  y

$$v_o = B_N v_{N1} + B_N v_{N2} + \dots + B_N v_{Nk} + B_P v_{P1} + B_P v_{P2} + \dots + B_P v_{Pk}.$$

Para determinar  $B_N$ , podemos analizar el circuito con  $v_{N2} = \dots = v_{Nk} = v_{P1} = v_{P2} = \dots = v_{Pk} = 0$ . Calculando los equivalentes de las resistencias que quedan en paralelo, se obtiene el circuito



Siendo nula la corriente por la entrada no inversora del amplificador operacional, la tensión de dicha entrada valdrá  $v_+ = 0$ . Aplicando el teorema del cortocircuito virtual, la tensión en la entrada inversora valdrá  $v_- = 0$ . La corriente  $i$  será nula, y el circuito es esencialmente equivalente a un amplificador inversor, resultando  $v_o = -(R/R)v_{N1} = -v_{N1}$  y  $B_N = -1$ . Para determinar  $B_P$ , podemos analizar el circuito con  $v_{N1} = v_{N2} = \dots = v_{Nk} = v_{P2} = \dots = v_{Pk} = 0$ . Calculando los equivalentes de las resistencias que quedan en paralelo, obtenemos el circuito



Teniendo en cuenta que la corriente por la entrada no inversora del amplificador operacional es nula, la tensión de dicha entrada resulta valer

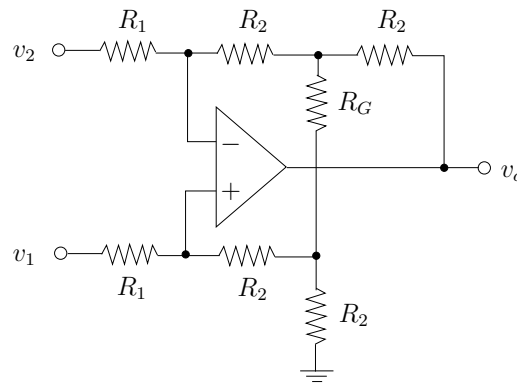
$$v_+ = \frac{R/k}{R + R/k} v_{P1} = \frac{v_{P1}}{k+1}.$$

De la entrada no inversora a la salida, el circuito es un amplificador no inversor, y

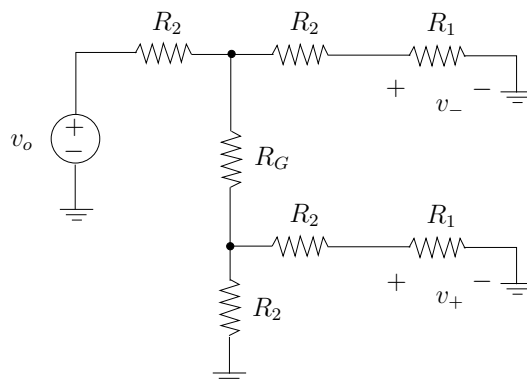
$$v_o = \left(1 + \frac{R}{R/k}\right) v_+ = (k+1)v_+ = v_{P1},$$

resultando  $B_P = 1$ .

**Problema 74:** Se trata de analizar el circuito de la figura, suponiendo que todas las resistencias son  $> 0$ . 1) Demuestre que la realimentación es negativa con una ganancia de realimentación  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ . 2) Determine el valor de  $\beta$ . Suponiendo que el amplificador operacional trabaja en la zona lineal, 3) demuestre que  $v_o = \gamma(v_1 - v_2)$ , es decir, que el circuito es un amplificador diferencial; 4) determine el valor de la ganancia diferencial  $\gamma$ ; 5) determine un diagrama de bloques lo más simple posible que tenga como entradas  $v_1$  y  $v_2$  y como salida  $v_o$  y que refleje la realimentación negativa presente en el circuito; 6) compare el circuito con el amplificador diferencial básico y con el amplificador de instrumentación.



**Solución:** 1) Sea  $v_d = v_+ - v_-$  la tensión diferencial que ve el amplificador operacional. Claramente,  $v_d$  es una función lineal de  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_o$ . Para demostrar que la realimentación es negativa con una ganancia de realimentación  $\beta$ , basta demostrar que la parte de  $v_d$  proporcional a  $v_o$  tiene la forma  $-\beta v_o$ . Dicha parte puede ser obtenida haciendo  $v_1 = v_2 = 0$ , y, por tanto, es la dada por el circuito



Demostremos, sin calcular  $\beta$ , que la parte de  $v_d$  proporcional a  $v_o$  es  $-\beta v_o$  con  $0 < \beta < 1$ . Sean

las resistencias

$$R' = R_2 \parallel (R_1 + R_2),$$

$$R'' = R_G + R'$$

y

$$R''' = R'' \parallel (R_1 + R_2).$$

Tenemos

$$v_+ = \frac{R'''}{R_2 + R'''} \frac{R'}{R_G + R'} \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o$$

y

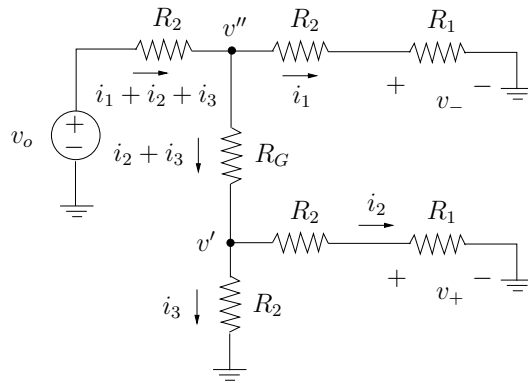
$$v_- = \frac{R'''}{R_2 + R'''} \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o.$$

De donde, obtenemos

$$\begin{aligned} v_d &= v_+ - v_- = -\frac{R'''}{R_2 + R'''} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(1 - \frac{R'}{R_G + R'}\right) v_o \\ &= -\frac{R'''}{R_2 + R'''} \frac{R_G}{R_G + R'} \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o, \end{aligned}$$

pero, en la expresión anterior, el valor absoluto del factor de  $v_o$  es  $> 0$  y  $< 1$ .

2) Podríamos evaluar  $\beta$  evaluando  $R'$ ,  $R''$  y  $R'''$  y utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior para  $v_d$  cuando  $v_1 = v_2 = 0$ , pero la evaluación de  $R'$ ,  $R''$  y  $R'''$  es farragosa. En su lugar analizaremos directamente el circuito del apartado anterior. La siguiente figura lo muestra de nuevo con las variables que usaremos para su análisis.



Calculando  $v'$  por las dos ramas a masa e igualando los valores, obtenemos

$$R_2 i_3 = (R_1 + R_2) i_2,$$

$$i_3 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_2, \quad (5.4)$$

y

$$i_2 + i_3 = \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_2. \quad (5.5)$$



Aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla formada por la fuente de tensión de valor  $v_o$  y las tres resistencias superiores y usando (5.5), obtenemos

$$\begin{aligned} v_o &= R_2(i_1 + i_2 + i_3) + (R_1 + R_2)i_1 = (R_1 + 2R_2)i_1 + R_2(i_2 + i_3) \\ &= (R_1 + 2R_2)i_1 + (R_1 + 2R_2)i_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Calculando  $v''$  por dos caminos a masa distintos apropiados e igualando los valores, obtenemos

$$(R_1 + R_2)i_1 = R_G(i_2 + i_3) + (R_1 + R_2)i_2,$$

$$(R_1 + R_2)i_1 = (R_1 + R_2 + R_G)i_2 + R_G i_3,$$

y, usando (5.4),

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)i_1 &= \left( R_1 + R_2 + 2R_G + \frac{R_1 R_G}{R_2} \right) i_2, \\ i_2 &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + 2R_G + R_1 R_G / R_2} i_1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Sustituyendo (5.7) en (5.6), obtenemos

$$\begin{aligned} v_o &= (R_1 + 2R_2)i_1 + \frac{(R_1 + R_2)(R_1 + 2R_2)}{R_1 + R_2 + 2R_G + R_1 R_G / R_2} i_1 \\ &= \frac{(R_1 + 2R_2)(2R_1 + 2R_2 + 2R_G + R_1 R_G / R_2)}{R_1 + R_2 + 2R_G + R_1 R_G / R_2} i_1 \\ &= \frac{2R_1^2 + 6R_1 R_2 + 4R_1 R_G + 4R_2^2 + 4R_2 R_G + R_1^2 R_G / R_2}{R_1 + R_2 + 2R_G + R_1 R_G / R_2} i_1, \end{aligned}$$

e

$$i_1 = \frac{R_1 + R_2 + 2R_G + R_1 R_G / R_2}{2R_1^2 + 6R_1 R_2 + 4R_1 R_G + 4R_2^2 + 4R_2 R_G + R_1^2 R_G / R_2} v_o. \quad (5.8)$$

Utilizando (5.7), obtenemos

$$i_2 = \frac{R_1 + R_2}{2R_1^2 + 6R_1 R_2 + 4R_1 R_G + 4R_2^2 + 4R_2 R_G + R_1^2 R_G / R_2} v_o. \quad (5.9)$$

La tensión  $v_+$  resulta valer, usando (5.9),

$$v_+ = R_1 i_2 = \frac{R_1^2 + R_1 R_2}{2R_1^2 + 6R_1 R_2 + 4R_1 R_G + 4R_2^2 + 4R_2 R_G + R_1^2 R_G / R_2} v_o.$$

La tensión  $v_-$  resulta valer, usando (5.8),

$$v_- = R_1 i_1 = \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + 2R_1 R_G + R_1^2 R_G / R_2}{2R_1^2 + 6R_1 R_2 + 4R_1 R_G + 4R_2^2 + 4R_2 R_G + R_1^2 R_G / R_2} v_o.$$

Finalmente,

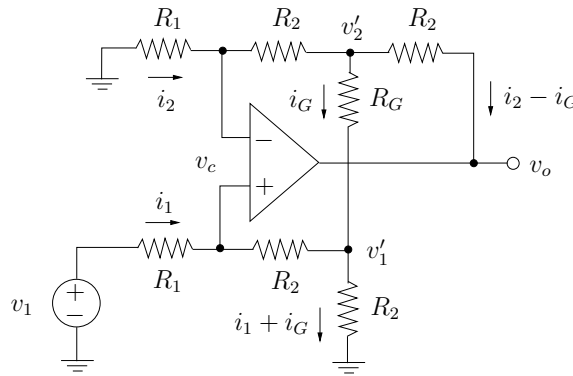
$$v_d = v_+ - v_- = -\frac{2R_1 R_G + R_1^2 R_G / R_2}{2R_1^2 + 6R_1 R_2 + 4R_1 R_G + 4R_2^2 + 4R_2 R_G + R_1^2 R_G / R_2} v_o,$$

dando

$$\beta = \frac{2R_1R_G + R_1^2R_G/R_2}{2R_1^2 + 6R_1R_2 + 4R_1R_G + 4R_2^2 + 4R_2R_G + R_1^2R_G/R_2}.$$

3) Para demostrar que  $v_o = \gamma(v_1 - v_2)$ , basta demostrar que con  $v_1 = v_2 = v$ ,  $v_o = 0$ . Es fácil comprobar que  $v_o = 0$  es consistente con  $v_1 = v_2 = v$  y con  $v_+ = v_-$ . En efecto, con  $v_o = 0$ , el camino que incluye la resistencia de valor  $R_1$  superior y las resistencia de valor  $R_2$  superiores y el camino que incluye la resistencia de valor  $R_1$  inferior y las resistencias de valor  $R_2$  inferiores son idénticos (la corriente por la resistencia de valor  $R_G$  es 0 por ver los extremos de dicha resistencia la misma tensión) y tenemos  $v_+ = v_-$ .

4) Para calcular  $\gamma$  basta hacer  $v_2 = 0$  y encontrar la relación entre  $v_1$  y  $v_o$ , que debe ser de la forma  $v_o = \gamma v_1$ . Con  $v_2 = 0$ , obtenemos el circuito, donde  $v_c$  es la tensión común a las dos entradas del amplificador operacional



La ley de Ohm aplicada a las resistencias de valor  $R_1$  da

$$i_1 = \frac{v_1 - v_c}{R_1} \quad (5.10)$$

y

$$i_2 = \frac{-v_c}{R_1}. \quad (5.11)$$

Calculemos  $v'_1$  en función de  $v_1$  y  $v_c$ :

$$v'_1 = v_c - R_2 i_1 = v_c - \frac{R_2}{R_1} v_1 + \frac{R_2}{R_1} v_c = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_c - \frac{R_2}{R_1} v_1. \quad (5.12)$$

De modo similar,

$$v'_2 = v_c - R_2 i_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_c. \quad (5.13)$$

Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de valor  $R_G$ , obtenemos

$$i_G = \frac{v'_2 - v'_1}{R_G} = \frac{R_2}{R_1 R_G} v_1. \quad (5.14)$$

Para determinar  $v_c$  en función de  $v_1$ , aplicamos la ley de Ohm a la resistencia de valor  $R_2$  inferior conectada a masa. Obtenemos, usando (5.10) y (5.14),

$$v'_1 = R_2(i_1 + i_G) = R_2 i_1 + R_2 i_G = \frac{R_2}{R_1}(v_1 - v_c) + \frac{R_2^2}{R_1 R_G} v_1 = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_G}\right) v_1 - \frac{R_2}{R_1} v_c.$$

Igualando con la expresión para  $v'_1$  dada por (5.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_G}\right) v_1 - \frac{R_2}{R_1} v_c &= \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_c - \frac{R_2}{R_1} v_1, \\ \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) v_c &= \frac{R_2}{R_1} \left(2 + \frac{R_2}{R_G}\right) v_1, \\ v_c &= \frac{(R_2/R_1)(2 + R_2/R_G)}{1 + 2R_2/R_1} v_1. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Utilizando dicho valor en (5.13), obtenemos

$$v'_2 = \frac{1 + R_2/R_1}{1 + 2R_2/R_1} \frac{R_2}{R_1} \left(2 + \frac{R_2}{R_G}\right) v_1 = \frac{(R_1 + R_2)R_2(R_2 + 2R_G)}{R_1(R_1 + 2R_2)R_G} v_1. \quad (5.16)$$

Usando (5.15) en (5.11), obtenemos

$$i_2 = -\frac{(R_2/R_1)(2 + R_2/R_G)}{R_1(1 + 2R_2/R_1)} v_1 = -\frac{R_2(R_2 + 2R_G)}{R_1(R_1 + 2R_2)R_G} v_1. \quad (5.17)$$

Finalmente, usando (5.14), (5.16) y (5.17),

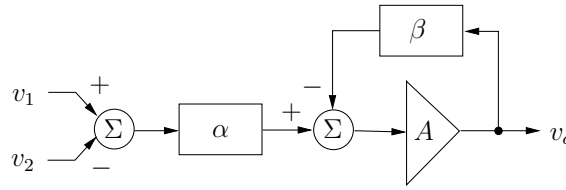
$$\begin{aligned} v_o &= v'_2 - R_2(i_2 - i_G) \\ &= \frac{(R_1 + R_2)R_2(R_2 + 2R_G)}{R_1(R_1 + 2R_2)R_G} v_1 + \frac{R_2^2(R_2 + 2R_G)}{R_1(R_1 + 2R_2)R_G} v_1 + \frac{R_2^2}{R_1 R_G} v_1 \\ &= \frac{(R_1 + R_2)R_2(R_2 + 2R_G) + R_2^2(R_2 + 2R_G) + R_2^2(R_1 + 2R_2)}{R_1(R_1 + 2R_2)R_G} v_1 \\ &= \frac{2R_1 R_2^2 + 2R_1 R_2 R_G + 4R_2^3 + 4R_2^2 R_G}{R_1(R_1 + 2R_2)R_G} v_1 \\ &= \frac{(R_1 + 2R_2)(2R_2^2 + 2R_2 R_G)}{R_1(R_1 + 2R_2)R_G} v_1 \\ &= \frac{2R_2^2 + 2R_2 R_G}{R_1 R_G} v_1 = \frac{2R_2(R_2 + R_G)}{R_1 R_G} v_1 = 2 \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_G}\right) v_1, \end{aligned}$$

de donde

$$\gamma = 2 \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_G}\right).$$

5) El diagrama de bloques tiene la siguiente forma, donde  $A$  es la ganancia de tensión diferencial

del amplificador operacional.



El valor de  $\beta$  fue determinado en el apartado 2). Falta determinar el valor de  $\alpha$ . Es fácil. Basta considerar que, de acuerdo con el diagrama de bloques, para  $A \rightarrow \infty$ ,  $v_o = (\alpha/\beta)(v_1 - v_2)$ . Ello da  $\gamma = \alpha/\beta$  y

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta\gamma = 2 \frac{2R_1R_G + R_1^2R_G/R_2}{2R_1^2 + 6R_1R_2 + 4R_1R_G + 4R_2^2 + 4R_2R_G + R_1^2R_G/R_2} \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_G}\right) \\ &= \frac{(2R_1^2R_G + 4R_1R_2R_G)(R_2 + R_G)}{2R_1^3R_G + 6R_1^2R_2R_G + 4R_1^2R_G^2 + 4R_1R_2^2R_G + 4R_1R_2R_G^2 + R_1^3R_G^2/R_2} \\ &= \frac{2R_1^2R_2R_G + 2R_1^2R_G^2 + 4R_1R_2^2R_G + 4R_1R_2R_G^2}{2R_1^3R_G + 6R_1^2R_2R_G + 4R_1^2R_G^2 + 4R_1R_2^2R_G + 4R_1R_2R_G^2 + R_1^3R_G^2/R_2}. \end{aligned}$$

6) Con respecto al amplificador diferencial básico, el circuito analizado tiene la ventaja de que la ganancia de tensión diferencial puede ser ajustada actuando solamente sobre una resistencia (la de valor  $R_G$ ). Con respecto al amplificador de instrumentación, el circuito analizado tiene el inconveniente de que las corrientes por las entradas no son, en general, nulas. Dependiendo de la aplicación, éste último inconveniente puede no ser grave. Por ejemplo, si  $v_1$  y  $v_2$  son las tensiones dadas por dos fuentes de señal con idéntica resistencia de salida  $R_S$ , el circuito analizado amplificará la diferencia de las tensiones que proporcionarían las dos fuentes de señal en vacío con una ganancia dada por la expresión para  $\gamma$  obtenida en el apartado 4), con  $R_1$  sustituido por  $R_1 + R_S$ , es decir

$$2 \frac{R_2}{R_1 + R_S} \left(1 + \frac{R_2}{R_G}\right).$$

En ese caso, el circuito analizado es una alternativa atractiva, por su mayor sencillez, al amplificador de instrumentación.